

Analiza 3 — 6. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 6. predavanja

V drugem poglavju bomo spoznali izreke o obstoju rešitev navadnih diferencialnih enačb in njihovih lastnostih.

V prvem predavanju drugega poglavja si bomo ogledali naslednje teme.

- 1 Obstoje rešitev navadne diferencialne enačbe
- 2 Zvezna odvisnost rešitve od začetnega pogoja
- 3 Picardova iteracija
- 4 Ocene napak v Picardovi iteraciji

Kaj bomo pokazali

Naj bo $f(t, x)$ zvezna funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, ki zadošča Lipschitzovemu pogoju v spremenljivki x :

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$$

za neko konstanto $L \in \mathbb{R}_+$. Dokazali bomo, da ima vsak začetni problem

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D$$

natanko eno lokalno rešitev

$$x(t) = x(t; t_0, x_0)$$

na nekem intervalu $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subset \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Poleg tega sta rešitev in njen t -odvod zvezno odvisna od začetnega pogoja (t_0, x_0) .

Če je funkcija f gladka razreda $\mathcal{C}^r(D)$ za nek $r \in \mathbb{N}$, je vsaka rešitev $x(t; t_0, x_0)$ razreda $\mathcal{C}^r$ v vseh spremenljivkah. Iz enačbe sledi, da je njen t -odvod $\dot{x}(t; t_0, x_0) = f(t, x(t; t_0, x_0))$ prav tako razreda $\mathcal{C}^r$ v vseh spremenljivkah.

Analogni rezultati veljajo za sisteme navadnih diferencialnih enačb.

Osnovna ideja

Odvedljiva funkcija $x(t)$ na intervalu $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, katere graf leži v dani domeni D , zadošča začetnemu problemu

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

za neko točko $(t_0, x_0) \in D$ natanko tedaj, ko zadošča integralni enačbi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Desno stran enačbe opazujemo kot operator, ki zvezni funkciji $x(s)$ na $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ priredi zvezno odvedljivo funkcijo

$$(\mathcal{A}x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Če nam uspe pokazati, da je operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev na nekem polnem metričnem podprostoru E Banachovega prostora $\mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ vseh zveznih funkcij na danem intervalu s supremum metriko, potem po Banachovem izreku obstaja natanko ena negibna točka $x \in E$ operatorja $\mathcal{A}$. Očitno je ta negibna točka rešitev začetnega problema.

Osnovni pravokotnik

Izberimo števili $a > 0$, $b > 0$ tako, da zaprt pravokotnik

$$P = P_{a,b} = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

leži v domeni $D \subset \mathbb{R}^2$. Naše osnovne predpostavke so naslednje:

- f je zvezna na P .
- $|f(t, x)| \leq M$ za vsak $(t, x) \in P$.
- $|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|$ za vsak par $(t, x) \in P$, $(t, x') \in P$.

Fiksirajmo število α , $0 < \alpha \leq a$, katerega vrednost bomo določili kasneje.

Označimo s $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$ Banachov prostor vseh zveznih funkcij $x(t, y)$ na pravokotniku $P_{\alpha,b/2} \subset P_{a,b}$, opremljen s supremum normo

$$\|x\| = \sup\{|x(t, y)| : (t, y) \in P_{\alpha,b/2}\}$$

in prirejeno funkcijo razdalje (metriko) $d(x, x') = \|x - x'\|$.

Iz predmeta Analiza 1 vemo, da je vsako enakomerno Cauchyjevo zaporedje zveznih funkcij enakomerno konvergentno in njegova limita je zvezna funkcija. Odtod sledi, da je prostor $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$ s to metriko poln metričen prostor.

Integralni operator

Definirajmo podmnožico

$$E = \{x \in \mathcal{C}(P_{\alpha,b/2}) : x(t_0, y) = y, |x(t, y) - x_0| \leq b \text{ za vsak } (t, y) \in P_{\alpha,b/2}\}.$$

Funkcijo $x = x(t, y) = x_y(t)$ iz množice E si predstavljamo kot družino zveznih funkcij spremenljivke $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ki je zvezno odvisna od parametra $y \in [x_0 - b/2, x_0 + b/2]$, tako da je izpolnjen začetni pogoj $x(t_0, y) = y$ in da graf funkcije x leži v pravokotniku $P_{\alpha,b} \subset P_{a,b}$.

Očitno je E zaprta podmnožica polnega metričnega prostora $\mathcal{C}(P_{\alpha,b/2})$, zato je E z zgoraj definirano funkcijo razdalje poln metričen prostor.

Oglejmo si operator

$$\mathcal{A} : E \longrightarrow \mathcal{C}(P_{\alpha,b/2}), \quad \mathcal{A}(x)(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds.$$

Funkcija $\mathcal{A}(x)$ je zvezna na $P_{\alpha,b/2}$, odvedljiva po t in zadošča

$$\frac{\partial \mathcal{A}(x)(t, y)}{\partial t} = f(t, x(t, y)), \quad \mathcal{A}(x)(t_0, y) = y.$$

Operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ je skrčitev

Najprej pokažimo, da $\mathcal{A}$ preslika E nazaj v E , če je število $\alpha > 0$ dovolj majhno. V ta namen za poljubno funkcijo $x \in E$ ocenimo supremum razlike med funkcijo $\mathcal{A}(x)$ in konstanto x_0 na $(t, y) \in P_{\alpha, b/2}$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x)(t, y) - x_0| &\leq |y - x_0| + \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds \right| \\ &\leq b/2 + M\alpha \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Upoštevali smo $|f| \leq M$, $|t - t_0| \leq \alpha$, in zadnja neenakost velja, če je

$$\alpha \leq \frac{b}{2M}.$$

Tedaj graf funkcije $\mathcal{A}(x)$ nad intervalom $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ leži v pravokotniku $P_{\alpha/2, b}$ in je zato $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ endomorfizem.

Operator $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ je skrčitev

Sedaj pokažimo, da je $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev, če je število $\alpha > 0$ dovolj majhno. Naj bosta $x, \tilde{x} \in E$ poljubna elementa. Spomnimo, da je L Lipschitzova konstanta za f . Ocenimo razliko med funkcijama $\mathcal{A}(x)$ in $\mathcal{A}(\tilde{x})$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x)(t, y) - \mathcal{A}(\tilde{x})(t, y)| &\leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \tilde{x}(s, y)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s, y)) - f(s, \tilde{x}(s, y))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L |x(s, y) - \tilde{x}(s, y)| ds \right| \\ &\leq L\alpha \|x - \tilde{x}\| \quad \text{za } |t - t_0| \leq \alpha. \end{aligned}$$

Če izberemo $0 < \alpha < 1/L$, sledi $0 < L\alpha < 1$ in preslikava $\mathcal{A}$ je skrčitev:

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(\tilde{x})\| \leq L\alpha \|x - \tilde{x}\|.$$

Povzetek: Če ob začetnih predpostavkah število α izberemo tako, da je

$$0 < \alpha < \min\{a, b/2M, 1/L\},$$

potem je preslikava $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev za faktor $q = L\alpha < 1$.

Zaključek

Po Banachovem izreku obstaja natanko ena negibna točka $x \in E$ operatorja $\mathcal{A} : E \rightarrow E$. Torej x zadošča enačbi

$$x(t, y) = \mathcal{A}(x)(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds, \quad (t, y) \in P_{\alpha, b/2}.$$

Če odvajamo po t , dobimo za vsako točko $(t, y) \in P_{\alpha, b/2}$:

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y.$$

To pomeni, da je $x(\cdot, y)$ rešitev zgornjega začetnega problema na intervalu $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ki je zvezno odvisna od začetnega pogoja $y \in [x_0 - b/2, x_0 + b/2]$. Z manjšo spremembo v dokazu bi lahko ugotovili, da je rešitev zvezno odvisna tudi od začetnega časa t_0 .

Analogen dokaz deluje tudi za sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in je $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ zvezno vektorsko polje na neki domeni v faznem prostoru $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^n$, ki je Lipschitzovo v spremenljivki $\mathbf{x}$.

Izrek o obstoju lokalnih rešitev navadnih DE

S tem smo dokazali glavni del naslednjega izreka o obstoju in zveznosti lokalnih rešitev sistema navadnih diferencialnih enačb. Zadnji del izreka za primer $F \in \mathcal{C}^r(D, \mathbb{R}^n)$ bomo dokazali v 7. predavanju. Trditve o obstoju realno analitičnih rešitev ne bomo dokazali, ker je dokaz tehnično precej zahteven.

Izrek

Naj bo D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ in $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ zvezna preslikava, ki je lokalno na D Lipschitzova v prostorski spremenljivki $\mathbf{x}$. Potem za vsako točko $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ obstajata okolica $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U \subset D$ ter število $\alpha > 0$, tako da ima začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{y}, \quad (s, \mathbf{y}) \in U$$

natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ na intervalu $t \in (s - \alpha, s + \alpha)$.

Rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ je zvezna v vseh spremenljivkah, odvedljiva po t , in njen t -odvod je zvezen v vseh spremenljivkah.

Če je $\mathbf{F}$ gladka razreda $\mathcal{C}^r(D)$ za nek $r \in \mathbb{N}$, potem sta vsaka lokalna rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y})$ ter njen t -odvod gladki razreda $\mathcal{C}^r$ na svoji domeni.

Če je $\mathbf{F}$ realno analitična, je vsaka rešitev realno analitična.

Sistemi navadnih DE s parametri

Zgornji izrek in njegov dokaz lahko še nekoliko posplošimo.

Pogosto naletimo na diferencialne enačbe ali njihove sisteme, v katerih so poleg začetnega pogoja prisotni dodatni parametri; slednji se pojavijo tudi v rešitvi.

Kot primer si oglejmo si začetni problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{y},$$

kjer je $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$ vektor dodatnih parametrov.

Izrek o obstoju in regularnosti rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ še vedno velja, s podobnim dokazom, v katerega vgradimo odvisnost od parametra $\mathbf{u}$.

- Če je funkcija $\mathbf{F}$ zvezna v vseh spremenljivkah in Lipschitzova v spremenljivki $\mathbf{x}$, sta rešitev $\mathbf{x}(t; s, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ in njen t -odvod zvezna v vseh spremenljivkah.
- Če je $\mathbf{F}$ gladka razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$, sta rešitev in njen t -odvod gladki razreda $\mathcal{C}^r$.
- Če je $\mathbf{F}$ realno analitična, je vsaka rešitev realno analitična.

Picardova iteracija

Spomnimo se, da negibno točko skrčitve $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ najdemo z iteracijo. Začnemo s poljubno $x_0 \in E$ in rekurzivno definiramo

$$x_{k+1} = \mathcal{A}(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vsako tako dobljeno zaporedje funkcij x_k konvergira proti negibni točki $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in E$ preslikave $\mathcal{A}$, torej rešitvi diferencialne enačbe.

Začnemo lahko s konstantno preslikavo $x_0(t) \equiv x_0$ in iteriramo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds \\ &\dots\dots\dots \\ x_{k+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds \end{aligned}$$

Ta postopek se imenuje **Picardova iteracija** (**Émil Picard**, 1856–1941).

Primer Picardove iteracije

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1.$$

Iteracija:

$$x_0(t) = 1$$

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_0(s)^2 ds = 1 + t$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1(s)^2 ds = 1 + \int_0^t (1 + s)^2 ds = 1 + t + t^2 + t^3/3$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t x_2(s)^2 ds = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

.....

Rešitev je

$$x(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad -1 < t < 1.$$

Opazimo, da se Taylorjev polinom reda k v točki $t_0 = 0$ približka $x_k(t)$ ujema z ustreznim Taylorjevim polinomom limite $x(t)$. To je splošno dejstvo, ki ga bomo dokazali v nadaljevanju.

Hitrost konvergence iterativ k rešitvi

Naj bo $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ skrčitev s faktorjem $0 \leq q < 1$ na polnem metričnem prostoru (E, d) , torej je

$$d(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(\tilde{x})) \leq q \cdot d(x, \tilde{x}) \quad \text{za vsak par } x, \tilde{x} \in E.$$

Potem za vsako zaporedje iterativ

$$x_0, \quad x_1 = \mathcal{A}(x_0), \quad x_2 = \mathcal{A}(x_1), \dots$$

in za limito $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ veljajo naslednje ocene za vsak $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &\leq q^k d(x_0, x_1), \\ d(x, x_k) &\leq \sum_{j=k}^{\infty} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} q^j d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^j \\ &= d(x_0, x_1) \frac{q^k}{1 - q}. \end{aligned}$$

Ocena napake v Picardovi iteraciji

Uporabimo te ocene v Picardovi iteraciji, kjer za začetni približek x_0 vzamemo konstanto $x_0(t) \equiv x_0$ iz začetnega pogoja $x(t_0) = x_0$. Naslednji približek je

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds, \quad |x_1(t) - x_0| \leq M \cdot |t - t_0|.$$

Tu je $M > 0$ zgornja meja za $|f|$ na osnovnem pravokotniku $P_{a,b}$.

Videli smo, da na vsakem intervalu $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, kjer je

$$0 < \alpha < \min\{a, b/2M, 1/L\},$$

velja

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(\tilde{x})\| \leq \alpha L \|x - \tilde{x}\|.$$

Torej je število $q = \alpha L < 1$ faktor skrčitve preslikave $\mathcal{A} : E \rightarrow E$ na pravokotniku $P_{\alpha, b/2}$.

Ocena napake v Picardovi iteraciji

Na prejšnji strani smo videli naslednjo oceno za razdaljo med k -tim približkom x_k in rešitvijo x :

$$d(x, x_k) \leq d(x_0, x_1) \frac{q^k}{1 - q}.$$

Pri nas je

$$q = \alpha L \quad \text{in} \quad |x_1(t) - x_0| \leq M \cdot |t - t_0|.$$

Uporabimo to oceno za fiksen t , ki zadošča $|t - t_0| \leq \alpha$ (torej lahko α nadomestimo z $|t - t_0|$ in vzamemo $q = |t - t_0|L$):

$$|x(t) - x_k(t)| \leq M \cdot |t - t_0| \frac{(|t - t_0|L)^k}{1 - |t - t_0|L} = M \frac{|t - t_0|^{k+1} L^k}{1 - |t - t_0|}.$$

Vidimo, da se funkcija $x(t)$ in njen k -ti približek $x_k(t)$ v Picardovi iteraciji ujemata do reda k v začetni točki $t = t_0$; napaka je reda velikosti

$$|x(t) - x_k(t)| = O(|t - t_0|^{k+1}), \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

Izboljšana ocena napake v Picardovi iteraciji

Dobljeno oceno napake lahko bistveno izboljšamo. Začnemo kot prej:

$$x_0(t) = x_0, \quad x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds.$$

Naj bo $x(t)$ rešitev enačbe, torej

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad |t - t_0| \leq \alpha.$$

Naprej pa takole. Naj bo L Lipschitzova konstanta za f in $|f| \leq M$. Tedaj:

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right| \leq M|t - t_0|, \\ |x(t) - x_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_0)| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - x_0| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t M|s - x_0| ds \right| \\ &\leq ML \frac{|t - t_0|^2}{2}. \end{aligned}$$

Izboljšana ocena napake v Picardovi iteraciji

Dobljeno oceno sedaj uporabimo v naslednji oceni:

$$\begin{aligned}|x(t) - x_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_1(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - x_1(s)| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t ML \frac{|s - t_0|^2}{2} ds \right| \\ &\leq ML^2 \frac{|t - t_0|^3}{3!}.\end{aligned}$$

Nadaljujemo induktivno in za vsak $k = 1, 2, 3, \dots$ dobimo oceno

$$|x(t) - x_k(t)| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L} \frac{(L|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

To je $(k+1)$ -ti člen v eksponentni vrsti za $\frac{M}{L}e^{L|t-t_0|}$. Ta vrsta konvergira bistveno hitreje kot geometrijska vrsta zaradi faktorja $(k+1)!$ v imenovalcu.

Obstoj rešitev pri šibkejših pogojih

Začetni problem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

ima lokalno v okolici (t_0, x_0) rešitev tudi v primeru, ko je funkcija f samo zvezna (in ni nujno Lipschitzova v spremenljivki x).

Eksistenčno teorija za take sisteme najdemo npr. v prvih dveh poglavjih knjige P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1964.

Videli pa smo že primere, ko rešitev ni enolična, to je, skozi isto točko (t_0, x_0) lahko poteka več rešitev enačbe. Konkreten tovrsten primer je enačba

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

Funkcija $x \mapsto \sqrt{|x|}$ v okolici točke $x = 0$ ni Lipschitzova, je pa Hölderjevo zvezna z indeksom $1/2$.

V tem primeru seveda nima smisla govoriti o zvezni odvisnosti rešitev od začetnega pogoja.