

Analiza 3 — 7. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 7. predavanja

V tem predavanju si bomo ogledali naslednje teme.

- 1 Gronwallova lema
- 2 Ocena razdalj med tokovnicami
- 3 Gladka odvisnost rešitev diferencialnih enačb od začetnih pogojev in parametrov
- 4 Taylorjev razvoj toka
- 5 Numerične metode za aproksimacijo rešitev

Gronwallova lema (Thomas Hakon Gronwall, 1877-1932)

Lema

Naj bo $g(t) \geq 0$ nenegativna zvezna funkcija na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ki zadošča neenakosti

$$g(t) \leq C + K \int_a^t g(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

za nek par nenegativnih konstant $C, K \geq 0$. Potem velja

$$g(t) \leq Ce^{K(t-a)}, \quad t \in [a, b].$$

Dokaz: Definirajmo funkcijo

$$G(t) := C + K \int_a^t g(s) ds \geq g(t), \quad t \in [a, b].$$

$$\dot{G}(t) = Kg(t), \quad \frac{\dot{G}}{G} = K \frac{g}{G} \leq K, \quad \log G(t) \leq \log G(a) + K(t-a),$$

$$g(t) \leq G(t) \leq G(a)e^{K(t-a)} = Ce^{K(t-a)}.$$

Uporaba: Ocena oddaljenosti tokovnic

Trditev

Naj bo $x(t, y)$ rešitev začetnega problema

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y$$

na nekem intervalu $t_0 \in I$ in za neko množico začetnih vrednosti $y \in U \subset \mathbb{R}$.

Denimo, da graf funkcije x leži v domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, na kateri velja Lipschitzova ocena

$$|f(t, x) - f(t, x')| \leq L|x - x'|.$$

Tedaj velja naslednja ocena za razdaljo med dvema tokovnicama:

$$|x(t, y) - x(t, y_0)| \leq |y - y_0|e^{L|t-t_0|}.$$

Tokovnici se torej oddaljujeta največ eksponentno. Primer z eksponentno rastjo je npr. kar $\dot{x} = x$ z rešitvijo $x(t, x_0) = x_0 e^t$.

$$x(t, y) = y + \int_{t_0}^t f(s, x(s, y)) ds$$

$$x(t, y) - x(t, y_0) = y - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s, y)) - f(s, x(s, y_0))) ds$$

Definirajmo funkcijo

$$g(t) := |x(t, y) - x(t, y_0)| \geq 0.$$

Po trikotniški neenakosti in z uporabo Lipschitzove ocene člena pod integralom sledi

$$g(t) \leq |y - y_0| + L \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right|.$$

Po Gronwallovi lemi sledi

$$g(t) \leq |y - y_0| e^{L|t-t_0|}$$

in lema je dokazana.

Splošnejša oblika Gronwallove leme

Lema

Naj bosta $g(t)$ in $u(t)$ nenegativni zvezni funkciji na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in $C \geq 0$ konstanta. Če je

$$g(t) \leq C + \int_a^t u(s)g(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

potem velja

$$g(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)ds}, \quad t \in [a, b].$$

Dokaz. Denimo najprej, da je $C > 0$. Tedaj

$$G(t) := C + \int_a^t u(s)g(s)ds \geq C > 0, \quad t \in [a, b],$$

$$\dot{G}(t) = u(t)g(t) \leq u(t)G(t), \quad t \in [a, b].$$

Z integracijo dobimo $g(t) \leq G(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)ds}$ za $t \in [a, b]$.

Za $C = 0$ sledi $g(t) \equiv 0$ z limitnim prehodom.

Ocena razdalje rešitev pri perturbaciji enačbe

Soroden problem je ocena razdalje med tokovnicami različnih sistemov diferencialnih enačb. Naj bosta $x(t)$ in $y(t)$ rešitvi problemov

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0; \quad \dot{y} = g(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Denimo, da je $|f - g| \leq \epsilon$ in je L Lipschitzova konstanta za g . Tedaj je

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) &= x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - g(s, x(s))) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (g(s, x(s)) - g(s, y(s))) ds \end{aligned}$$

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \epsilon |t - t_0| + L \left| \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \right|.$$

Iz Gronwallove leme sledi

$$|x(t) - y(t)| \leq (|x_0 - y_0| + \epsilon |t - t_0|) e^{L|t - t_0|}.$$

Gladka odvisnost rešitve od začetnega pogoja

Sedaj bomo dokazali naslednji izrek, ki smo ga že omenili v 6. predavanju.

Izrek

Naj bo D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ in $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ preslikava razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$. Potem sta rešitev $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ začetnega problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}$$

in njen t -odvod funkciji razreda $\mathcal{C}^r$ v spremenljivkah $(t, \mathbf{y})$.

Opomba: Vsaka funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ na neki domeni je lokalno Lipschitzova. Za funkcije na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ to sledi direktno iz Lagrangejeve formule

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \text{za nek } \xi \in (x_1, x_2).$$

Če zožimo f na nek zaprt omejen interval $J \subset I$ in definiramo $L = \max\{|f'(\xi)| : \xi \in J\}$, sledi

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \text{za vsak par } x_1, x_2 \in J.$$

Podobno dokažemo rezultat za funkcije več spremenljivk.

Dokaz, $r = 1$

Omejimo se na primer $n = 1$, ko je $x = x(t, y)$ skalarna funkcija.

Najprej bomo obravnavali primer $r = 1$, torej je funkcija $f(t, x)$ zvezno parcialno odvedljiva in je funkcija $x(t, y)$ rešitev enačbe

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y$$

na nekem kompaktnem intervalu $t \in I$. Dokazati želimo, da parcialni odvod

$$\psi(t, y) := \frac{\partial x}{\partial y}(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1$$

obstaja za $t \in I$. Če ta odvod obstaja, potem z odvajanjem osnovne enačbe po spremenljivki y vidimo, da ψ zadošča enačbi

$$\dot{\psi}(t, y) = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y))\psi(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1.$$

To je družina homogenih linearnih diferencialnih enačb, ki je zvezno odvisna od parametra y . Imenuje se **linearizacija** prvotne enačbe vzdolž rešitve $x(t, y)$.

Po eksistenčnem izreku rešitev $\psi(t, y)$ obstaja in je zvezna. Prav tako je njen t -odvod $\dot{\psi}(t, y)$ zvezna funkcija, kar vidimo iz desne strani zgornje enačbe.

Dokaz, $r = 1$

Sedaj bomo dokazali, da je rešitev $x(t, y)$ osnovne enačbe zares odvedljiva po y in velja $\frac{\partial x}{\partial y}(t, y) = \psi(t, y)$, kjer je $\psi(t, y)$ rešitev zgornje linearne DE.

Naj bo $D' \subset D \subset \mathbb{R}^2$ malce manjša domena, ki vsebuje graf opazovane rešitve $x(t, y)$. Ker je f razreda $\mathcal{C}^1$, obstaja za vsak $\epsilon > 0$ tak $\delta > 0$ (neodvisen od t z danega kompaktnega intervala), da za vsak par točk $x, x_0 \in D'$ velja

$$f(t, x) - f(t, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)(x - x_0) + R(t, x, x_0),$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |R(t, x, x_0)| < \epsilon |x - x_0|.$$

Naj bosta $x(t, y)$ in $x(t, y_0)$ dve rešitvi iz dane družine, pri čemer bomo y_0 fiksirali, y pa spreminjali.

Z integracijo diferencialnih enačb za x in ψ dobimo naslednje identitete.

Dokaz, $r = 1$

$$\begin{aligned}x(t, y) - x(t, y_0) &= y - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s, y)) - f(s, x(s, y_0))) ds \\&= y - y_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) (x(s, y) - x(s, y_0)) ds \\&\quad + \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds\end{aligned}$$

$$\psi(t, y_0) = 1 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) \psi(s, y_0) ds$$

$$\psi(t, y_0)(y - y_0) = y - y_0 + \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) \psi(s, y_0)(y - y_0) ds.$$

Odštejemo drugo enačbo od prve:

$$\begin{aligned}g(t, y) &:= x(t, y) - x(t, y_0) - \psi(t, y_0)(y - y_0) \\&= \int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, y_0)) g(s, y) ds + \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds.\end{aligned}$$

Dokaz, $r = 1$

Sedaj bomo ocenili ostanek R in funkcijo g . Spomnimo se:

$$|x - x_0| < \delta \implies |R(t, x, x_0)| < \epsilon |x - x_0| \quad \text{za vsak } t \in I.$$

Iz Gronwallove neenakosti smo dobili oceno

$$|x(t, y) - x(t, y_0)| \leq |y - y_0| e^{L|t - t_0|} < \delta,$$

kjer je L Lipschitzova konstanta za $f(t, x)$ v spremenljivki x . Zadnja ocena $< \delta$ velja, če je y dovolj blizu y_0 in je $|t - t_0| \leq C$ za nek $C > 0$. Odtod sledi

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t R(s, x(s, y_0), x(s, y)) ds \right| &\leq \epsilon C \max_{|s - t_0| \leq C} |x(s, y) - x(s, y_0)| \\ &\leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL}. \end{aligned}$$

Izberimo $M > 0$, tako da velja

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y_0)) \right| \leq M \quad \text{za } |t - t_0| \leq C.$$

Iz definicije g in zgornjih ocen sledi za $|t - t_0| \leq C$

$$|g(t, y)| \leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL} + M \left| \int_{t_0}^t |g(s, y)| ds \right|$$

Dokaz, $r = 1$

Iz Gronwallove leme sledi za $|t - t_0| \leq C$:

$$|g(t, y)| \leq \epsilon C |y - y_0| e^{CL} e^{M|t-t_0|} \leq \epsilon C |y - y_0| e^{C(L+M)}.$$

Za dan $\epsilon > 0$ ta ocena velja, če je razlika $|y - y_0|$ dovolj majhna, pri čemer so C, L, M konstante (neodvisne od y). To ravno pomeni, da je

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{|g(t, y)|}{|y - y_0|} = 0 \quad \text{za vsak } t \in I.$$

Ker po definiciji funkcije g velja

$$x(t, y) - x(t, y_0) = \psi(t, y_0)(y - y_0) + g(t, y),$$

sledi iz definicije parcialnega odvoda, da je

$$\frac{\partial x}{\partial y}(t, y_0) = \psi(t, y_0), \quad t \in I,$$

kar smo želeli dokazati.

S tem je izrek o regularnosti dokazan za $r = 1$. Iz analize dokaza lahko vidimo, da velja isti rezultat tudi ob prisotnosti dodatnih parametrov v enačbi in rešitvi.

Skica dokaza za $r > 1$

Denimo sedaj, da je funkcija f razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $x(t, y)$ rešitev problema

$$\dot{x}(t, y) = f(t, x(t, y)), \quad x(t_0, y) = y.$$

Videli smo, da njen prvi parcialni odvod

$$\psi(t, y) := \frac{\partial x}{\partial y}(t, y)$$

obstaja in zadošča homogeni linearni diferencialni enačbi

$$\dot{\psi}(t, y) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y))\psi(t, y), \quad \psi(t_0, y) = 1.$$

Sedaj bi radi dokazali, da je $\psi(t, y)$ zvezno parcialno odvedljiva na spremenljivko y . Če je odvedljiva, potem njen odvod

$$\phi(t, y) := \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, y)$$

zadošča naslednji enačbi, ki jo dobimo z odvajanjem enačbe za ψ :

Skica dokaza za $r > 1$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t, y) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y)) \psi(t, y) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, y)) \phi(t, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x(t, y)) \psi(t, y)^2, \quad \phi(t_0, y) = 0.\end{aligned}$$

To je družina nehomogenih linearnih diferencialnih enačb z zveznimi koeficienti in parametrom y za funkcijo $\phi(t, y)$. Taka enačba ima rešitev na vsakem intervalu, kjer so koeficienti definirani in zvezni.

S tem smo problem reducirali na prejšnji primer za $r = 1$ s tem, da imamo sedaj družino diferencialnih enačb, odvisnih od parametra y . Ta razlika ni bistvena in podobno kot prej lahko pokažemo z uporabo Gronwallove leme, da je $\phi(t, y)$ dejansko enak parcialnemu odvodu $\psi(t, y)$ po y .

Analogno nadaljujemo za višje odvode. V induktivnem koraku predpostavimo, da je f razreda $\mathcal{C}^{r+1}$. Enačbo za r -ti odvod $\frac{\partial^r f}{\partial y^r} x(t, y)$ odvajamo po y in dobimo novo linearno diferencialno enačbo z zveznimi koeficienti za $(r+1)$ -ti odvod $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial y^{r+1}} x(t, y)$. Nato postopamo kot zgoraj.

Taylorjev razvoj rešitve enačbe

Denimo, da je funkcija $x(t)$ rešitev problema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Iz definicije sledi

$$x(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^1$, lahko osnovno enačbo odvajamo po t in dobimo

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)).$$

V točki $t = t_0$ je torej

$$\ddot{x}(t_0) = f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0),$$

$$x(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0))(t - t_0)^2 + o(|t - t_0|^2).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$, lahko enačbo r -krat odvajamo in s tem dobimo Taylorjev razvoj rešitve $x(t)$ okrog $t = t_0$ do reda $r + 1$.

Taylorjev razvoj rešitve enačbe

Višje odvode lahko na krajši način zapišemo z uvedbo diferencialnega operatorja

$$V = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x}.$$

Ta operator predstavlja vektorsko polje $V(t, x) = (1, f(t, x))$ na ravnini, ki pripada sistemu enačb

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = f(t, x).$$

Vrednost operatorja V na poljubni funkciji $g(t, x)$ je nova funkcija

$$V(g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} \right) g = g_t + g_x f.$$

Z odvajanjem funkcije $g(t, x(t))$, kjer je $x(t)$ rešitev enačbe, dobimo

$$\frac{d}{dt} g(t, x(t)) = g_t(t, x(t)) + g_x(t, x(t)) f(t, x(t)) = V(g)(t, x(t)).$$

Če to uporabimo na funkciji $g = f$, dobimo iz $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$:

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) f(t, x(t)) = V(f)(t, x(t)).$$

Taylorjev razvoj rešitve enačbe

Če uporabimo isto formulo za funkcijo $g = V(f)$, dobimo

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) = V(V(f))(t, x(t)) = V^2(f)(t, x(t)).$$

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$, lahko induktivno nadaljujemo in dobimo za vsak $k \in \{1, \dots, r+1\}$:

$$\frac{d^k}{dt^k}x(t) = V^{k-1}(f)(t, x(t)).$$

Formula je pravilna tudi za $k = 1$, ko je $\dot{x} = V^0 f = f$.

S tem dobimo Taylorjev razvoj rešitve $x(t)$ okrog $t = t_0$:

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k!} V^{k-1}(f)(t_0, x(t_0))(t - t_0)^k + o(|t - t_0|^{r+1}).$$

Taylorjev razvoj toka vektorskega polja

Analogna Taylorjeva formula velja za rešitve sistema diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}),$$

kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$. Če je $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$, dobimo z odvajanjem rešitve

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) \dot{x}_j(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) f_j(t, \mathbf{x}(t)).\end{aligned}$$

Za k -to komponento $x_k(t)$ rešitve $\mathbf{x}(t)$ imamo

$$\ddot{x}_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} f_k(t, \mathbf{x}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}(t)) f_j(t, \mathbf{x}(t))$$

Prirejeni diferencialni operator je torej

$$V = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Taylorjev razvoj toka vektorskega polja

Če definiramo

$$V(\mathbf{F}) = V(f_1, \dots, f_n) := (V(f_1), \dots, V(f_n)),$$

lahko enačbo za drugi odvod $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ rešitve zapišemo v vektorski obliki

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = V(\mathbf{F})(t, \mathbf{x}(t)).$$

Če je $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^r$, dobimo z indukcijo

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{x}(t) = V^{k-1}(\mathbf{F})(t, \mathbf{x}(t)), \quad k = 1, 2, \dots, r+1,$$

pri čemer je

$$V^k(\mathbf{F}) = (V^k(f_1), \dots, V^k(f_n)).$$

Taylorjev razvoj rešitve okrog neke začetne točke $(t_0, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0)$ je torej

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k!} V^{k-1}(\mathbf{F})(t_0, \mathbf{x}_0) (t - t_0)^k + o(|t - t_0|^{r+1}).$$

Uporaba pri numeričnem reševanju

Radi bi poiskali približno rešitev problema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

na nekem intervalu $[t_0, b]$. Interval razdelimo na veliko število n enakih delov dolžine $\delta = (b - t_0)/n$ in uvedemo delilne točke

$$t_k = t_0 + k\delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

V najpreprostejši linearni aproksimaciji aproksimiramo rešitev $x(t)$ na prvem intervalu $[t_0, t_1]$ z linearno funkcijo

$$x_1(t) = x_0 + \dot{x}(t_0)(t - t_0) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

Označimo

$$x_1 = x_1(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta.$$

Na intervalu $[t_1, t_2]$ na enak način določimo aproksimativno linearno rešitev

$$x_2(t) = x_1 + \dot{x}(t_1)(t - t_1) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1).$$

Tako nadaljujemo do konca.

Uporaba pri numeričnem reševanju

Napaka na vsakem intervalu je reda velikosti $o(1/n)$; kumulativna napaka na n intervalih je torej $n \cdot o(1/n)$. Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot o(1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n)}{1/n} = 0,$$

zaporedje tako dobljenih odsekov linearnih približkov konvergira k pravi rešitvi enakomerno na intervalu $[t_0, b]$, ko gre število delilnih točk proti ∞ .

Če je f razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{N}$, lahko dobimo boljše približke rešitve z uporabo Taylorjevih polinomov stopnje $r + 1$. Npr., pri $r = 1$ vzamemo na intervalu $[t_0, t_1]$ kvadratični približek

$$x_1(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)(t_0, x_0)(t - t_0)^2.$$

Označimo $x_1 = x_1(t_1)$. Na naslednjem intervalu $[t_1, t_2]$ vzamemo približek

$$x_2(t) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1) + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)(t_1, x_1)(t - t_1)^2.$$

Tako nadaljujemo do konca. Enakomerna napaka pri uporabi Taylorjevih polinomov reda $r + 1$ je reda velikosti $n \cdot o(1/n^{r+1}) = o(1/n^r)$.