

Analiza 3 — 8. predavanje

Franc Forstnerič

Univerza v Ljubljani



OM FMF, Ljubljana
zimski semester 2020–21

Vsebina 8. predavanja

Obravnavali bomo naslednje teme o tokovih vektorskih polj.

- 1 Fundamentalna domena toka
- 2 Osnovne lastnosti toka
- 3 Kompletna vektorska polja
- 4 Uporaba funkcij Lyapunova
- 5 Liouvilleova formula za volumen toka

Enoličnost rešitev

Opazujemo sistem diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

na domeni $D \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$, kjer je $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$.

Lemma

Naj bosta $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ rešitvi danega sistema enačb, ki sta definirani na intervalih $I \subset \mathbb{R}$ oziroma $J \subset \mathbb{R}$. Če za neko točko $t_0 \in I \cap J$ velja $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0)$, potem velja $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ za vse $t \in I \cap J$.

Dokaz: Množica

$$E = \{t \in I \cap J : \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)\}$$

je zaprta v intervalu $I \cap J$, ker sta obe funkciji zvezni.

Po izreku o enoličnosti rešitve začetnega problema sledi, da je E tudi odprta. Ker je $I \cap J$ povezana množica, sledi $E = I \cap J$.

Maksimalna domena rešitve

Posledica

Za vsako točko $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ ima začetni problem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ natanko eno rešitev $\mathbf{x}(t)$ na nekem največjem odprtem intervalu

$$I_{t_0, \mathbf{x}_0} = (\alpha(t_0, \mathbf{x}_0), \omega(t_0, \mathbf{x}_0)) \subset \mathbb{R},$$

ki vsebuje točko t_0 : $-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}_0) < t_0 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0) \leq +\infty$.

To pomeni, da dane rešitve ne moremo nadaljevati na noben večji interval, ki vsebuje $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$. Lahko pa morda najdemo rešitve na drugi intervalih, disjunktih z $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$. Te rešitve nimajo ničesar opraviti z opazovano.

Maksimalni interval rešitve $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ dobimo tako, da v množico vseh parov $(I, \mathbf{x})$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ odprt interval in je $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ rešitev, uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$ tako, da proglasimo poljubna dva para $(I, \mathbf{x})$ in $(J, \mathbf{y})$ za ekvivalentna, če je $I \cap J \neq \emptyset$ in je $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ na $I \cap J$. Relacijo nato razširimo po tranzitivnosti:

$$(I, \mathbf{x}) \sim (J, \mathbf{y}) \text{ in } (J, \mathbf{y}) \sim (K, \mathbf{z}) \implies (I, \mathbf{x}) \sim (K, \mathbf{z}).$$

Za $I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ vzamemo unijo vseh intervalov v ekvivalenčnem razredu, ki vsebuje neko lokalno rešitev danega začetnega problema okrog $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Tokovnice so paroma disjunktne

Zgornji argument pokaže naslednjo pomembno lastnost maksimalnih rešitev.

Trditev

Če sta $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ maksimalni rešitvi sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, potem sta njuna grafa v faznem prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ bodisi disjunktne, bodisi sovpadata.

Če je sistem avtonomen, torej $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, potem sta poljubni dve maksimalni trajektoriji v $\mathbb{R}^n$ bodisi disjunktne, bodisi sovpadata.

Prva trditev je direktna posledica enoličnosti lokalnih rešitev in definicije maksimalnih rešitev.

Za dokaz drugega dejstva opazimo, da je za vsako rešitev $\mathbf{x}(t)$ avtonomnega sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ tudi $t \mapsto \mathbf{x}(t + s)$ njegova rešitev za poljuben $s \in \mathbb{R}$.

Če se dve maksimalni tokovnici $\mathbf{x}(t)$ in $\mathbf{y}(t)$ ujemata v paru točk, torej $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_1)$, potem se tokovnici $\mathbf{x}(t)$ in $t \mapsto \mathbf{y}(t + t_1 - t_0)$ ujemata pri $t = t_0$ in zato po enoličnosti in maksimalnosti sovadata.

Vsaka trajektorija avtonomnega sistema je bodisi vložena krivulja, bodisi stacionarna točka vektorskega polja. Tokovnica, ki je krivulja, ne vsebuje nobene stacionarne točke. Množica vseh trajektorij tvori **fazni portret sistema**.

Fundamentalna domena in lastnosti toka

Pojem toka vektorskega polja oziroma, ekvivalentno, sistema diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

smo uvedli že v 5. predavanju. Za poljubno začetno točko $(t_0, \mathbf{x}) \in D$ označimo s $t \mapsto \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ rešitev začetnega problema s $\phi_{t_0,t_0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Preslikava

$$(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$$

se imenuje **tok vektorskega polja** $\mathbf{F}$, ki je inicializiran v času t_0 . Množica

$$\Omega_{t_0} = \{(t, \mathbf{x}) : (t_0, \mathbf{x}) \in D, t \in I_{t_0, \mathbf{x}}\} = \{(t, \mathbf{x}) : \alpha(t_0, \mathbf{x}) < t < \omega(t_0, \mathbf{x})\}$$

je **fundamentalna (maksimalna) domena toka** $(t, \mathbf{x}) \mapsto \phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$.

Direktno iz definicij in izreka o lastnosti rešitev sledijo naslednja dejstva:

- 1 $\phi_{t,t} = \text{Id}, \quad \phi_{t,s} \circ \phi_{s,u} = \phi_{t,u}.$
- 2 Naj bo $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$. Za vsak par števil $s, t \in \mathbb{R}$ je preslikava

$$\{\mathbf{x} : (t, \mathbf{x}) \in \Omega_s\} \ni \mathbf{x} \longrightarrow \phi_{t,s}(\mathbf{x}) \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{C}^r$ difeomorfizem na svojo sliko in velja $\phi_{t,s}^{-1} = \phi_{s,t}$.

Tok avtonomnega vektorskega polja

V primeru avtonomnega vektorskega polja $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ označimo s

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t,0}(\mathbf{x})$$

tok polja, ki je inicializiran v času $t_0 = 0$. To pomeni, da je

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\phi_t(\mathbf{x})), \quad \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Za fiksni s je očitno $t \mapsto \phi_{t+s}(\mathbf{x})$ tokovnica, ki je v času $t = 0$ v točki $\phi_s(\mathbf{x})$. Isto velja za $t \mapsto \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$. Iz enoličnosti sledi

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \quad \phi_0 = \text{Id}_D, \quad \phi_{-t} = \phi_t^{-1}$$

na maksimalnih domenah danih preslikav. Odtod sledi

$$\phi_{t,s} = \phi_t \circ \phi_s^{-1}.$$

Družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ s temi lastnostmi se imenuje **lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov** na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Beseda **lokalna** se nanaša na dejstvo, da je domena posamezne preslikave ϕ_t lahko prava poddomena v D .

Preslikava $\mathbf{x} \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ se imenuje **premik za čas t** (angl. **time-forward map**).

Infinitezimalni generator, kompletna vektorska polja

Obratno: Če je $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ lokalna 1-parametrična grupa difeomorfizmov na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in definiramo avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} \phi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=0}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

potem je $\phi_t(\mathbf{x})$ ravno tok polja $\mathbf{F}$. To vidimo z odvajanjem identitete $\phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}))$ po t pri $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_t(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\phi_s(\mathbf{x})).$$

To vektorsko polje $\mathbf{F}$ se imenuje **infinitezimalni generator** grupe $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje **kompletno**, če za vsako točko $\mathbf{x} \in D$ tok $t \mapsto \phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Z drugo besedo, avtonomno vektorsko polje $\mathbf{F}$ je kompletno, če (in samo če) je fundamentalna domena toka enaka $\Omega = \mathbb{R} \times D$.

V tem primeru je družina $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ **enoparametrična grupa avtomorfizmov** domene D . (Avtomorfizem je difeomorfizem D na D .)

Primer 1

Z metodo ločitve spremenljivk smo videli, da ima enačba

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

rešitev

$$x(t; x_0) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

Če zamenjamo začetni pogoj x_0 z x in rešitev označimo s $\phi_t(x)$, vidimo

$$\phi_t(x) = \frac{x}{1 - t x} \quad \dots\dots \text{tok polja } F(x) = x^2.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo infinitezimalni generator

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \phi_t(x) = x^2 = F(x).$$

Fundamentalna domena je

$$\Omega = \{(t, x) : x \geq 0, -\infty < t < 1/x\} \cup \{(t, x) : x < 0, 1/x < t < +\infty\}.$$

Vektorsko polje $F(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ torej ni kompletno.

Primer 2

Oglejmo si sistem dveh enačb:

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = -xy.$$

Poiskati želimo tok $\phi_t(x, y)$ in najti njegovo fundamentalno domeno. V ta namen najprej rešimo zgornji enačbi ob začetem pogoju

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Prva enačba je homogena linearna v x in neodvisna od y ; rešitev je

$$x(t) = x_0 e^{2t}.$$

Vstavimo rešitev v drugo enačbo:

$$\dot{y} = -x_0 e^{2t} y, \quad y(0) = y_0.$$

To je spet homogena linearna enačba in rešitev je

$$y(t) = y_0 e^{-\int_0^t x_0 e^{2s} ds} = y_0 e^{x_0(1-e^{2t})/2}.$$

Tok polja $\mathbf{F}(x, y) = (2x, -xy)$ je torej enak

$$\phi_t(x, y) = \left(x e^{2t}, y e^{x(1-e^{2t})/2} \right)$$

Fundamentalna domena je $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{(x,y)}^2$, torej je polje kompletno.

Tokovnice z omejenim maksimalnim intervalom

Trditev

Naj bo $I = (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ maksimalni interval neke rešitve $\mathbf{x}(t)$ sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Če je $\omega < +\infty$, potem za vsako kompaktno množico $K \subset D$ obstaja število $c \in I$, tako da velja

$$\mathbf{x}(t) \in D \setminus K \text{ za vsak } c < t < \omega.$$

Analogen rezultat velja za spodnjo mejo $\alpha > -\infty$.

Torej tokovnica $\mathbf{x}(t) \in D$ zapusti vsako kompaktno množico v D , ko gre t proti končni spodnji ali zgornji meji maksimalnega intervala. To pomeni, da gre točka $\mathbf{x}(t)$ proti robu domene D ali pa proti neskončnosti v $\mathbb{R}^n$. Taka pot se imenuje **divergentna** v D .

Trditev pove, da **je edini možni razlog, zakaj neka tokovnica ne živi večno, da v končnem času doseže rob domene D sistema v $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.**

Analogna lastnost velja tudi za neavtonomne sisteme, le da je v tem primeru D domena v $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. **Graf $(t, \mathbf{x}(t))$ rešitve je divergenten v D , ko gre čas t proti končni zgornji ali spodnji meji maksimalnega intervala.**

Tokovnice z omejenim maksimalnim intervalom

Dokaz trditve. Denimo, da za neko kompaktno množico $K \subset D$ ni takega števila c . To pomeni, da obstaja naraščajoče zaporedje $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ števil v $I = (\alpha, \omega)$ z $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = \omega$, za katere je $\mathbf{x}(t_j) \in K$.

Po eksistenčnem izreku ima vsaka točka $p \in D$ odprto okolico $U_p \subset D$ in število $\epsilon_p > 0$, tako da ima vsak začetni problem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y} \in U_p$ rešitev na intervalu $(-\epsilon_p, +\epsilon_p)$.

Ker je množica K kompaktna, končno mnogo takih okolic pokriva K . Naj bo $\epsilon > 0$ najmanjše od ustreznih števil. Tedaj za katerokoli točko $p \in K$ rešitev, ki gre pri $t = 0$ skozi p , obstaja (vsaj) na intervalu $(-\epsilon, +\epsilon)$.

Izberimo t_j v zgornjem zaporedju tako, da je $\omega - t_j < \epsilon$. Naj bo $\mathbf{y}(t)$ rešitev na intervalu $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$ z začetnim pogojem $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(t_j) \in K$. Tedaj lahko sestavimo novo rešitev $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ na večjem intervalu $(\alpha, t_j + \epsilon) \supsetneq I$ takole:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t), & \alpha < t \leq t_j; \\ \mathbf{y}(t - t_j), & t_j \leq t < t_j + \epsilon. \end{cases}$$

To je v protislovju s predpostavko, da je I maksimalni interval rešitve. Analogno dokažemo trditev glede spodnje meje $\alpha > -\infty$.

Posledica

Če tokovnica $\mathbf{x}(t)$ na maksimalnem intervalu $I \subset \mathbb{R}$ leži v neki kompaktni množici $K \subset \mathbb{R}^n$, potem je $I = \mathbb{R}$, torej je kompletna (živi večno).

Če vsaka tokovnica danega sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ leži v neki kompaktni množici, potem je polje $\mathbf{F}$ kompletno (vse njegove tokovnice živijo večno).

Primer

Naj bo $u(x, y)$ gladka funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$, tako da je vsaka njena nivojnica $\{(x, y) \in D : u(x, y) = c\}$ za $c \in \mathbb{R}$ kompaktna (ali prazna). Tedaj je prirejeni Hamiltonov sistem

$$\dot{x} = -u_y, \quad \dot{y} = u_x$$

na D kompleten. Videli smo namreč, da tok tega sistema leži v nivojnicah $\{u = c\}$, ki so kompaktne.

Analogen rezultat velja za Hamiltonove sisteme na domenah v $\mathbb{R}^{2n}$.

Posledica: fundamentalna domena toka je odprta

Naj bo Ω_{t_0} fundamentalna domena toka ϕ_{t,t_0} :

$$\Omega_{t_0} = \{(t, \mathbf{x}) : (t_0, \mathbf{x}) \in D, \alpha(t_0, \mathbf{x}) < t < \omega(t_0, \mathbf{x})\}.$$

Trditev

Funkcija $-\infty \leq \alpha(t_0, \mathbf{x}) < +\infty$ je navzgor polzvezna v spremenljivki $\mathbf{x}$, funkcija $-\infty < \omega(t_0, \mathbf{x}) \leq +\infty$ je navzdol polzvezna in fundamentalna domena Ω_{t_0} je odprta množica v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dokaz Oglejmo si trditev glede funkcije $\omega(t_0, \mathbf{x})$.

Biti navzdol pozvezna pomeni, da za vsak $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ in število $c < \omega(t_0, \mathbf{x}_0)$ obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ točke $\mathbf{x}_0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in U$ velja $c < \omega(t_0, \mathbf{x})$. To pomeni, da se $\omega(t_0, \mathbf{x})$ ne more nezvezno zmanjšati.

To vidimo takole. Izberimo število c_1 , da je $c < c_1 < \omega(t_0, \mathbf{x}_0)$. Tokovnica $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0)$ torej obstaja za vsak $t \in [t_0, c_1]$. Ta interval je kompakten in zato je

$$C = \{(t, \phi_{t,t_0}(\mathbf{x}_0)) : t_0 \leq t \leq c_1\}$$

kompaktna podmnožica domene D .

Dokaz posledice

Naj bo V neka okolica tira C s kompaktnih zaprtjem $\overline{V} \subset D$.

Po Gronwallovi lemi (oz. izreku o zvezni odvisnosti rešitev od začetnega pogoja) obstaja okolica U točke $\mathbf{x}_0$, tako da za vsak $\mathbf{x} \in U$ in vsak $t_0 \leq t \leq c_1$ velja $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x}) \in V$, v kolikor seveda $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ obstaja.

Tokovnica $\phi_{t,t_0}(\mathbf{x})$ torej ne more divergirati proti robu domene D (ali proti ∞) na intervalu $t_0 \leq t \leq c_1$, zato obstaja vsaj do časa $t = c_1$ (po trditvi o tokovnicah z omejenim časovnim intervalom). To ravno pomeni, da je $\omega(t_0, \mathbf{x}) \geq c_1 > c$ za vsak $\mathbf{x} \in U$. S tem smo dokazali, da je funkcija $\mathbf{x} \mapsto \omega(t_0, \mathbf{x})$ navzdol polzvezna.

Analogen sklep lahko naredimo za $t \rightarrow \alpha(t_0, \mathbf{x})$, le da so neenakosti sedaj obrnjene in je slednja navzgor polzvezna (to je, ne more se nezvezno povečati).

Pokažimo še, da je fundamentalna domena Ω_{t_0} odprta. Naj bo $(t_1, \mathbf{x}_1) \in \Omega_{t_0}$. Izberemo števili c_1, c_2 , tako da je $\alpha(t_0, \mathbf{x}_1) < c_1 < t_1 < c_2 < \omega(t_0, \mathbf{x}_1)$. Po pravkar dokazanem obstaja okolica U točke $\mathbf{x}_1$, da je $\alpha(t_0, \mathbf{x}) < c_1 < c_2 < \omega(t_0, \mathbf{x})$ za vsak $\mathbf{x} \in U$. Torej je množica $V := \{(t, \mathbf{x}) : c_1 < t < c_2, \mathbf{x} \in U\} \subset \Omega_{t_0}$ odprta okolica točke $(t_1, \mathbf{x}_1)$.

Funkcije Lyapunova in kompletnost v pozitivnem času

Zvezna funkcija $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ se imenuje **funkcija izčrpanja**, če je vsaka podnivojnica $\{u \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, kompaktna. Ekvivalentno, če gre zaporedje $\mathbf{x}_j \in D$ ($j \in \mathbb{N}$) proti robu D ali ∞ , je $\lim_{j \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}_j) = +\infty$.

Funkcija izčrpanja $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^1(D)$ se imenuje **funkcija Lyapunova** za avtonomen sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na D , če obstaja kompaktna množica $K \subset D$, tako da velja

$$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{za vsak } \mathbf{x} \in D \setminus K \quad (\text{pogoj Lyapunova}).$$

Izrek (Lyapunov)

Če ima sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ funkcijo Lyapunova, potem je vektorsko polje $\mathbf{F}$ kompletno v pozitivnem času, to je, njegov tok $\phi_t(\mathbf{x})$ obstaja za vse $t \in \mathbb{R}_+$ in $\mathbf{x} \in D$.

Dokaz izreka Lyapunova

Dokaz. Naj bo $\mathbf{x}(t)$ poljubna rešitev sistema na maksimalnem intervalu $I = (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$. Izberimo dovolj velik $c \in \mathbb{R}$, tako da pogoj Lyapunova velja na množici $\{u > c\} = D \setminus \{u \leq c\}$. (Opomba: $\{u \leq c\}$ je kompaktna.)

Na vsakem intervalu $J \subset I$, na katerem je $\mathbf{x}(t) \in \{u > c\}$, torej velja

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \leq 0.$$

Zato je funkcija

$$I \ni t \longrightarrow g(t) := u(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}$$

(šibko) monotono padajoča na vsakem intervalu $J \subset I$, kjer je $g > c$.

Odtod sledi, je funkcija $g(t) = u(\mathbf{x}(t))$ navzgor omejena na $t \in [0, \omega)$. Če je c dovolj velik, da je $g(0) < c$, potem je $g(t) \leq c$ za vsak $t \in [0, \omega)$. (Zakaj?)

To pomeni, da tokovnica $\{\mathbf{x}(t) : 0 \leq t < \omega\}$ leži v kompaktni podmnožici $\{u \leq c\} \subset D$. Odtod sledi $\omega = +\infty$ po izreku o kompletnosti toka.

Primer funkcije Lyapunova

Opazujmo ravninski sistem

$$\dot{x} = -x + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \dot{y} = -2y + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Sistem je nelinearen in ga je verjetno nemogoče rešiti eksplicitno. Lahko pa pokažemo, da je tok $\phi_t(x, y)$ kompleten v pozitivnem času.

Označimo dano vektorsko polje z $\mathbf{F} = (f_1, f_2)$. Naj bo $u(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$; očitno je to funkcija izčrpanja na $\mathbb{R}^2$. Velja

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} = (2x, y) \cdot (f_1, f_2) = -2(x^2 + y^2) + \frac{3xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Lahko je videti, da je drugi člen v vsoti po absolutni vrednosti navzgor omejen s $3\sqrt{x^2+y^2}$, zato je pri dovolj veliki vrednosti izraza $x^2 + y^2$ prvi (negativen) člen dominanten, torej velja

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} < 0 \quad \text{za dovolj velik } x^2 + y^2.$$

To pomeni, da je u funkcija Lyapunova za ta sistem, zato je polje kompletno v pozitivnem času.

Izrek o kletki

Naj bo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$. Kompaktna množica $K \subset D$ se imenuje **kletka** za tok polja $\mathbf{F}$, če nobena tokovnica ne more izstopiti iz K .
Natačno: če je $\phi_{t_0}(\mathbf{x}) \in K$ za nek t_0 in $\mathbf{x} \in D$, potem je $\phi_t(\mathbf{x}) \in K$ za vsak $t \geq t_0$. Posledično je tokovnica kompletna v pozitivnem času.

Eagles, Hotel California: "We are programmed to receive. You can check out any time you like but you can never leave!"

Če je $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija Lyapunova, potem izrek Lyapunova pove, da je vsaka podnivojnica $\{u \leq c\}$ za dovolj velik $c \in \mathbb{R}$ kletka.
Sedaj bomo dokazali naslednji natančnejši izrek.

Izrek

Naj bo $K \subset D$ kompaktna množica oblike $K = \{u \leq 0\}$, kjer je u funkcija razreda $\mathcal{C}^2$ na odprti okolici K in je $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \partial K = \{u = 0\}$. Če je $\mathbf{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na D in velja $\nabla u \cdot \mathbf{F} \leq 0$ na ∂K , potem je K kletka za tok polja $\mathbf{F}$.

Opomba Iz pogoja $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \partial K = \{u = 0\}$ po izreku o implicitni funkciji sledi, da je rob ∂K hiperploskev razreda $\mathcal{C}^2$. Funkcija u s to lastnostjo se imenuje **definijska funkcija** množice K .

Dokaz izreka o kletki

Dokaz Če izrek ne velja, obstajata točka $\mathbf{x}_0 \in \partial K$ in število $\delta > 0$, tako da je $\mathbf{x}(t) := \phi_t(\mathbf{x}_0) \in D \setminus K$ za vsak $0 < t \leq \delta$ in $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Oglejmo si funkcijo $g(t) = u(\mathbf{x}(t))$ za $0 \leq t \leq \delta$. Iz pogojev sledi $g(0) = 0$ in $g(t) > 0$ za $0 < t \leq \delta$. Njen odvod je enak

$$\dot{g}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla u(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)).$$

Funkcija $h(\mathbf{x}) := \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$ razreda $\mathcal{C}^1$ je na robu ∂K manjša ali enaka nič, zato na nekem zunanjem ovratniku roba ∂K (to je, množici $A = \{0 \leq u \leq c\}$ za nek $c > 0$) velja $h(\mathbf{x}) \leq C \text{dist}(\mathbf{x}, \partial K)$ za neko konstanto $C > 0$. Iz izreka o implicitni funkciji sledi, da je v okolici roba ∂K funkcija $|u(\mathbf{x})|$ primerljiva z razdaljo $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial K)$ točke $\mathbf{x}$ do roba ∂K , zato velja tudi ocena $h(\mathbf{x}) \leq Cu(\mathbf{x})$ za $\mathbf{x} \in A$ z neko drugo konstanto C . Če $\delta > 0$ po potrebi zmanjšamo, odtod sledi

$$\dot{g}(t) = h(\mathbf{x}(t)) \leq C \cdot u(\mathbf{x}(t)) = C g(t), \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Iz dokaza Gronwallove leme (ali z direktno integracijo) sledi

$$g(t) \leq g(0)e^{Ct} = 0 \quad \text{za } 0 \leq t \leq \delta,$$

kar je v protislovju s predpostavko $g(t) > 0$ za $0 < t \leq \delta$.

Tok na podmnogoterostih

Dokaz izreka o kletki nam da tudi naslednji rezultat.

Izrek

Naj bo $M = \{u = 0\}$ zaprta hiperploskev v domeni D , kjer je u funkcija razreda $\mathcal{C}^2$ na odprti okolici M in je $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ za vsak $\mathbf{x} \in M$. Če je $\mathbf{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na D in je $\nabla u \cdot \mathbf{F} \equiv 0$ na M , potem za vsako točko $\mathbf{x} \in M$ velja $\phi_t(\mathbf{x}) \in M$ za vse t na maksimalnem intervalu, torej je M **invariantna množica toka**.

Pogoj $\nabla u \cdot \mathbf{F} = 0$ na M pomeni, da vektorsko polje $\mathbf{F}$ tangentno na M . Za dokaz zadošča uporabiti argument v dokazu izreka o kletki z obeh strani M , torej tok ne more prečkati M v nobeni smeri.

To je poseben primer naslednjega izreka. Vsaka gladka podmnogoterost $M \subset D$ kodimenzije d je lokalno v okolici vsake svoje točke množica skupnih ničel gladih funkcij $u_1, \dots, u_d$ z linearno neodvisnimi gradienti.

Izrek

Če je M topološko zaprta gladka podmnogoterost domene D in je vektorsko polje $\mathbf{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$ tangentno na M vzdolž M , potem je M invariantna množica.

Protiprimer za ne-Lipschitzova polja

Dokaz izreka o kletki velja pod šibkejšo predpostavko, da je sta gradient ∇u ter vektorsko polje $\mathbf{F}$ Lipschitzovi. To zadošča za ključno oceno

$$\nabla u \cdot \mathbf{F} \leq 0 \text{ na } \partial K = \{u = 0\} \implies \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq C \cdot u(\mathbf{x}) \text{ na } \{0 \leq u \leq c\}.$$

Če vektorsko polje $\mathbf{F}$ ni Lipschitzovo, izrek o kletki ne velja, kar pokaže naslednji enorazsežni primer na $x \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = F(x) = \sqrt{|x|}.$$

Rešitev enačbe

$$x(t) = \begin{cases} t^2/4, & t \geq 0, \\ -t^2/4, & t < 0 \end{cases}$$

je pri $t = 0$ v stacionarni točki $x = 0$ polja F , vendar jo prečka.

Interval $K = [-1, 0]$ zadošča vsem ostali predpostavkam izreka o kletki, vendar ni kletka.

Vektorsko polje s kompaktnim nosilcem

Trditev

Vsako vektorsko polje $\mathbf{F}$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ s kompaktnim nosilcem (to je, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ izven neke kompaktne množice $K \subset D$) je kompletno.

Dokaz. Vsaka točka $\mathbf{x} \in D \setminus K$ je stacionarna točka in zato velja $\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Odtod sledi, da tokovnica $\phi_t(\mathbf{x})$ skozi poljubno točko $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in K$ ostane v K za vse vrednosti t na maksimalnem intervalu.

Sledi, da je maksimalni interval vsake tokovnice enak $\mathbb{R}$.

Grupa difeomorfizmov deluje tranzitivno

Posledica

Za vsako povezano domeno $D \subset \mathbb{R}^n$ deluje grupa $\text{Diff}(D)$ vseh gladkih difeomorfizmov $D \rightarrow D$ tranzitivno na D , to je, poljubno točko $p \in D$ lahko preslikamo v poljubno drugo točko $q \in D$ z difeomorfizmom.

Ideja dokaza. Naj bosta $p, q \in D$ poljubni točki. Izberemo gladek vložen lok $\Gamma \subset D$ od p do q in ga parametriziramo z injektivno gladko preslikavo $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma$, ki zadošča

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma(1) = q, \quad \dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \text{za vsak } t \in [0, 1].$$

Funkcija

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) := \gamma'(t), \quad t \in [0, 1]$$

je gladko vektorsko polje vzdolž loka Γ in γ je njegova tokovnica.

Z metodami gladke analize (particije enote) lahko $\mathbf{F}$ razširimo do gladkega vektorskega polja $\mathbf{F}$ s kompaktnim nosilcem na D .

Njegov tok $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Diff}(D)$ je zato kompleten (ter miruje izven nosilca polja) in zadošča $\phi_1(p) = q$.

Dve nalogi

Naloga 1. Naj bo $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$, ki je konstantna na vsaki tokovnici vektorskega polja $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. (Taka funkcija u se imenuje prvi integral sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.) Označimo tok polja $\mathbf{F}$ s ϕ_t . Pokaži, da je tedaj preslikava

$$t \mapsto \phi_{h(\mathbf{x})t}(\mathbf{x})$$

tok polja $h(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x})$. To vektorsko polje ima v vsaki točki isto smer kot $\mathbf{F}$, le njegova velikost je različna. Če je polje $\mathbf{F}$ kompletno, je tudi $h\mathbf{F}$ kompletno.

Naloga 2. Za vsako vektorsko polje $\mathbf{F}$ na $D \subset \mathbb{R}^n$ obstaja pozitivna gladka funkcija $h : D \rightarrow (0, +\infty)$, tako da je polje $h\mathbf{F}$ kompletno.

Ideja dokaza na $D = \mathbb{R}^n$: Označimo z $\mathbb{B}_r \subset \mathbb{R}^n$ kroglo polmera r s središčem v izhodišču. Funkcijo h izberemo tako, da je dovolj majhna na vsaki krogelni lupini $\mathbb{B}_{k+1} \setminus \mathbb{B}_k$, tako da vsaka tokovnica, ki prečka to lupino, potrebuje za prečenje vsaj čas 1. Torej nobena tokovnica polja $h\mathbf{F}$ ne more v končnem času do neskončnosti in je zato kompletna.

Spreminjanje volumna v toku

Zanimivo in pomembno je naslednje vprašanje. Fiksirajmo $t_0 \in \mathbb{R}$ in naj bo $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ tok vektorskega polja $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$, lahko tudi neavtonomnega.

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omejena domena z robom, ki ima volumen nič, na kateri je tok ϕ_t definiran na nekem intervalu $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$. Zanima nas, kako se spreminja volumen potujoče domene $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ s časom $t \in I$.

Naj bodo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Potem je

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} du_1 du_2 \cdots du_n.$$

Označimo $\phi_t(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = (x_1(t, \mathbf{u}), \dots, x_n(t, \mathbf{u}))$. Tedaj je

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\Omega} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n,$$

kjer je

$$J(t, \mathbf{u}) = \frac{\partial(x_1(t, \mathbf{u}), \dots, x_n(t, \mathbf{u}))}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det \left(\frac{\partial x_i(t, \mathbf{u})}{\partial u_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Jacobijeva determinanta preslikave $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(t, \mathbf{u}) = \phi_t(\mathbf{u})$ pri fiksnem t .

Divergenca vektorskega polja in Liouvilleova formula

Izrek

Jacobijeva determinanta $J(t, \mathbf{u})$ toka vektorskega polja $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ zadošča Liouvilleovi formuli

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{u})) \cdot J(t, \mathbf{u}),$$

kjer je

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

divergenca vektorskega polja $\mathbf{F}$. Odtod sledi

$$J(t, \mathbf{u}) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s, \mathbf{u})) ds}.$$

Če je $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, je $J(t, \mathbf{u}) = 1$ in tok polja $\mathbf{F}$ ohranja volumen.

Formula za $J(t, \mathbf{u})$ v izreku sledi z integracijo linearne homogene diferencialne enačbe v prvi vrstici, upošteva $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}$ in zato $J(t_0, \mathbf{u}) \equiv 1$.

Divergenca vektorskega polja in Liouvilleova formula

Liouvilleov izrek lahko zapišemo v naslednji ekvivalentni obliki.

Izrek

Naj bo $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$, $\phi_t = \phi_{t,t_0}$ tok polja $\mathbf{F}$, in $\Omega \subset D$ zaprta omejena domena z volumnom. Tedaj velja

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\phi_t(\Omega)) = \int_{\phi_t(\Omega)} \text{div } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n$$

za vse t , za katere je tok ϕ_t definiran na Ω .

Dejansko, z odvajanjem po t pod integralom vidimo, da je leva stran enaka

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Omega_t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} J(t, \mathbf{u}) du_1 du_2 \cdots du_n,$$

desna stran pa je po formuli za zamenjavo spremenljivk v integralu enaka

$$\int_{\phi_t(\Omega)} \text{div } \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{F}(t, \phi_t(\mathbf{u})) J(t, \mathbf{u}) du_1 \cdots du_n.$$

Dokaz Liouvilleove formule

Pri $n = 1$ je formula očitna. Zaradi preprostosti bomo napisali dokaz v primeru $n = 2$; ista ideja z več pisanja deluje v vsaki dimenziji.

Uvedimo oznake

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad (u_1, u_2) = (u, v), \quad \mathbf{F} = (f, g).$$

Tedaj je

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{x}_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ \dot{y}_u & \dot{y}_v \end{vmatrix}.$$

Z verižnim pravilom in upoštevanjem diferencialne enačbe dobimo

$$\dot{x}_u = \frac{\partial}{\partial u} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial u} f(t, x(t, u, v), y(t, u, v)) = f_x x_u + f_y y_u$$

$$\dot{x}_v = \frac{\partial}{\partial v} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial v} f(t, x(t, u, v), y(t, u, v)) = f_x x_v + f_y y_v$$

in podobno

$$\dot{y}_u = g_x x_u + g_y y_u, \quad \dot{y}_v = g_x x_v + g_y y_v.$$

Dokaz Liouvilleove formule

Vstavimo izraze za $\dot{x}_u$, $\dot{x}_v$ v prvo determinanto v izrazu za $\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v)$:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_u & \dot{x}_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_x x_u + f_y y_u & f_x x_v + f_y y_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = f_x \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} + f_y \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = f_x J.$$

Podobno, če vstavimo izraza za $\dot{y}_u$ in $\dot{y}_v$ v drugo determinanto v formuli za $\frac{\partial}{\partial t} J(t, u, v)$, dobimo

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ \dot{y}_u & \dot{y}_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ g_x x_u + g_y y_u & g_x x_v + g_y y_v \end{vmatrix} = g_y J.$$

Seštejemo in dobimo Liouvilleovo formulo

$$\frac{\partial}{\partial t} J = (f_x + g_y) J = \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot J.$$

Dva primera

Primer

Naj bo $\rho(x, y)$ gladka funkcija. Hamiltonovo polje $\mathbf{H}_\rho = (-\rho_y, \rho_x)$ zadošča

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\rho = -\rho_{yx} + \rho_{xy} = 0,$$

torej njegov tok ohranja ploščino.

Analogno velja za Hamiltonova polja na domenah v $\mathbb{R}^{2n}$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

Primer

Naj bo $u(x_1, \dots, x_n)$ gladka funkcija. Njen gradient ima divergenco

$$\operatorname{div} \nabla u = \operatorname{div} (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = \sum_{k=1}^n u_{x_k x_k} = \Delta u,$$

torej Laplaceov operator. Po Liouvilleovem izreku tok gradienta ∇u :

- ohranja volumen, če je u **harmonična funkcija** ($\Delta u = 0$);
- povečuje volumen (ekspanziven tok), če je u **subharmonična funkcija** ($\Delta u \geq 0$);
- zmanjšuje volumen, če je u **superharmonična funkcija** ($\Delta u \leq 0$).