

Kompleksna števila

1. Poenostavi:

(a) $(5 + 3i)(2 - 7i)$

(b) $(4 - 3i)^2$

(c) $\frac{1}{3-4i}$

(d) $\frac{2-7i}{5+3i}$

(e) i^3, i^4, i^{31}

(f) $(1 + 2i)^3$

(g) $\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2$

(h) $\left| \frac{-5+10i}{8+6i} - \frac{25+5i}{3-4i} \right|$

Rešitev:

(a) $31 - 29i$

(b) $7 - 24i$

(c) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

(d) $-\frac{11}{34} - \frac{41}{34}i$

(e) $-i, 1, -i$

(f) $-11 - 2i$

(g) $\frac{-5}{169} + \frac{12}{169}i$

(h) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

2. Naj bo $z = 2 - 3i$ in $w = 4 + 5i$. Določi:

(a) $z + w, zw$

(b) $\frac{z}{w}$

(c) $\bar{z}, \bar{w}$

(d) $|z|$ and $|w|$

Rešitev:

(a) $6 + 2i$

(b) $23 - 2i$

(c) $-\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i$

(d) $4 - 5i$

(e) $\sqrt{13}, \sqrt{41}$

3. Poišči realno in imaginarno komponento ter konjugirano vrednost kompleksnega števila

$$z = \frac{i}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}.$$

Rešitev: $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}, \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$

4. Kolikšna je vrednost izraza

$$1 + i + i^2 + \dots + i^n$$

za $n = 4k$ in $n = 4k + 3$.

Rešitev: 1, 0

5. Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo.

(a) $\bar{z} = z^2,$

(b) $|z| + z = 2 + i,$

(c) $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i,$

(d) $|z + 1| = |2z - 1|,$

(e) $z(z - i) = i\bar{z}.$

Rešitev:

(a) $z_1 = 0, z_2 = 1, z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $z = \frac{3}{4} + i$

(c) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - i$

(d) $\{x + iy : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$, tj. krožnica s središčem v $(1, 0)$ in polmerom 1.

(e) $z_1 = 0, z_2 = \pm 1 + i.$

6. V kompleksni ravnini skiciraj naslednje množice

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 = 4\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{7\pi}{4}, 1 < |z| \leq 2\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i + 2| \leq 4\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$

Rešitev:

- (a) $\{x + ix : x \in \mathbb{R}\}$, tj. simetrala daljice med 1 in i .
- (b) Del kolobarja med radijema 1 in 2 in med kotoma $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{7\pi}{4}$.
- (c) $\{x + iy : (x - 1)^2 + y^2 \leq 16\}$, tj. zaprt krog s središčem $-2 + i$ in polmerom 4.
- (d) $\{x + ix : x \in \mathbb{R}\}$, tj. simetrala daljice med 1 in i .

7. Naslednja kompleksna števila zapiši v polarni obliki.

- (a) $-1 - i$
- (b) -3

Rešitev:

- (a) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$
- (b) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$

8. Izračunaj vrednost naslednjih izrazov.

- (a) $1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3$
- (b) $\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5$
- (c) $\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1+i)^{10}}$
- (d) $\sqrt[5]{-3 + \sqrt{3}i}$

Rešitev:

- (a) 0
- (b) $-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (c) 1024
- (d) $\sqrt[10]{12} \left(\cos \left(\frac{5\pi + 2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi + 2\pi k}{5} \right) \right), k = 0, 1, 2, 3, 4$

9. V kompleksnih številih reši naslednje enačbe in skiciraj rešitve v kompleksni ravnini.

- (a) $z^2 = -7 + 24i$
- (b) $z^3 + 1 = 0$
- (c) $z^3 + i = 0$,
- (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

Rešitev:

- (a) $z_1 = 3 + 4i, z_2 = -3 - 4i$
- (b) $z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $z_1 = i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

(d) $z_1 = -\sqrt{3} - i, z_2 = 1 - i\sqrt{3}, z_3 = -1 + i\sqrt{3}, z_4 = \sqrt{3} + i$