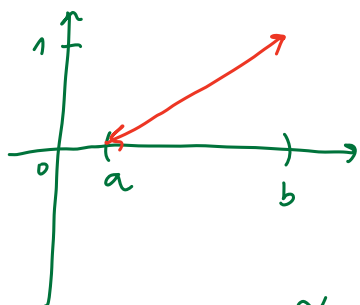


① POKAŽI, DA SO INTERVALI OBLIKE (a, b) ZA $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ EKVIPOLENTNI.

R: POKAŽIMO, DA JE (a, b) EKVIPOLENTEN $(0, 1)$.
 IŠČEMO BIJEKCIJO $f: (a, b) \rightarrow (0, 1)$. DOBRA
 JE NA PRIMER:



$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$x = \frac{y-a}{b-a} \Rightarrow (b-a)x + a = y$$

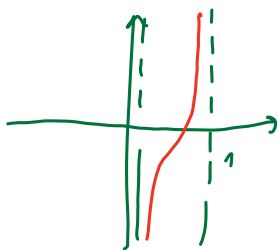
$$f^{-1}(x) = (b-a)x + a$$

SKLEP: ZA $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ IMAMO $|(a, b)| = |(\tilde{a}, \tilde{b})|$,
 SAJ LAHKO VEMO VZAMENJO KOMPOZITUM BIJEKCIJ:

$$(a, b) \xrightarrow{f} (0, 1) \xrightarrow{\tilde{f}} (\tilde{a}, \tilde{b})$$

$\tilde{f} \circ f$

SEDAJ POIŠČIMO BIJEKCIJO $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$:



NPR.

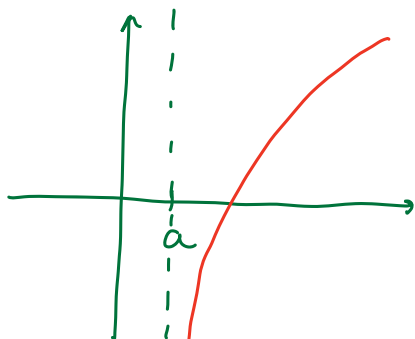
$$g(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

SKLEP: POLJUBEN (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, JE EKVIPOLENTEN $\mathbb{R}$, SAJ LAHKO

$$VZAMENJO: (a, b) \xrightarrow{f} (0, 1) \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

NAZADNJE RABIMO ŠE BIJEKCIJO $h: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.



NPR.

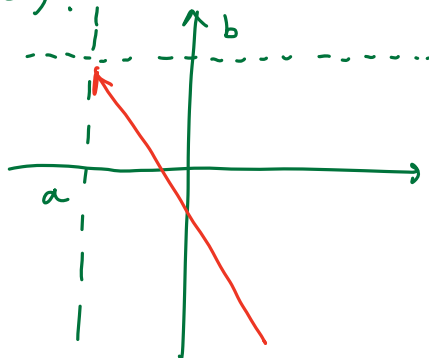
$$h(x) = \ln(x-a)$$

$$h^{-1}(x) = e^x + a$$

SKLEP: VSAK (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, JE EKUIPOLENTEN (c, ∞) , $c \in \mathbb{R}$,
 SAJ LAHKO VZAMEMO:

$$(a, b) \xrightarrow{f} (0, 1) \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{h^{-1}} (c, \infty).$$

NAZADNJE RABIMO ŠE BIJEKCIJO MED (a, ∞) IN $(-\infty, b)$:



NPR.

$$k(x) = b + (a - x)$$

$$k^{-1}(x) = (b - x) + a$$

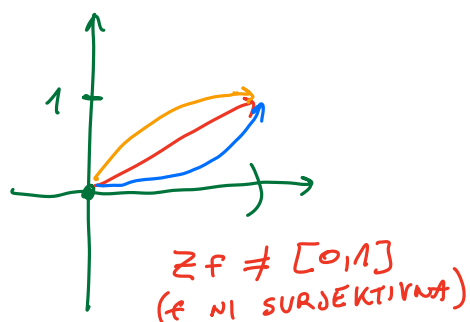
SKLEP: TUDI INTERVAL $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, JE EKUIPOLENTEN VSEM PREDHODNIM.

(2) POKAŽI, DA STA $[0, 1)$ IN $[0, 1]$ EKUIPOLENTNA.

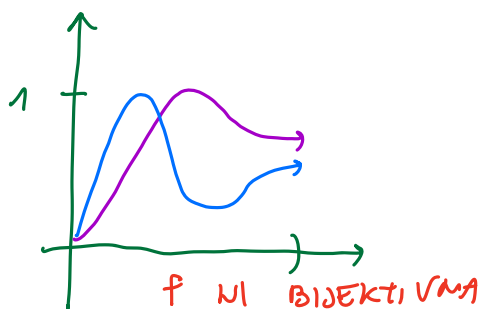
R: IŠČEMO BIJEKCIJO $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1]$.

ČE SKICIRAMO GRAF POLJUBNE ZVEZNE FUNKCIJE NAD $[0, 1)$ Z ZAČETNO VREDNOSTI $zf \subseteq [0, 1]$, NAM JE HITRO JASNO, DA SE ZGODI EDEEN OD DVEH PROBLEMIV:

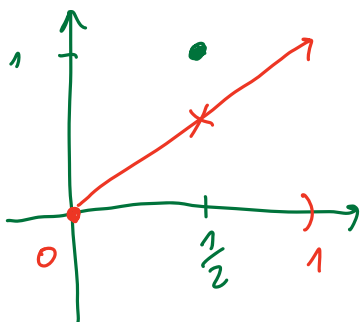
(i)



(ii)

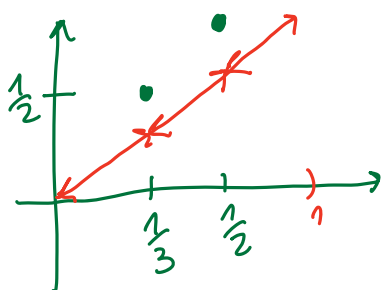


Torej izteho nezvezno bijekcijo. Pa denimo,
da je točka $\frac{1}{2}$ tista, ki se slika v 1.



Če za ostale točke
velja $f(x) = x$, je
edini problem, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_f$.

Denimo, da v $\frac{1}{2}$ preslikamo $\frac{1}{3}$:



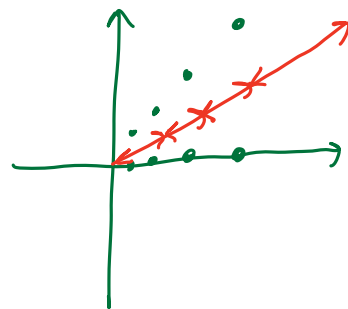
Sedaj manjka $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}_f$,
če izberemo $f(x) = x$
za ostale točke.

Ključna ideja: ker je $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ ekvipotentna
množica $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ to ni problem.

Iskana preslikava je:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = x \quad \text{sicer}$$



Komentar:

na enak način pokažemo, da je tudi
 $|\llbracket a, b \rrbracket| = |\llbracket a, b \rrbracket| = |\llbracket a, b \rrbracket| = |\llbracket a, b \rrbracket|$
 še več, intervalu lahko dodamo števno mnogo točk.

CANTOR - BERNSTEIN - SCHRÖDERJEV IZREK

ČE MNOŽICI A IN B STA EKVIOLENTNI,
ČE OBSTAJATA INJEKTIVNI PRESLIKAVI
 $f: A \rightarrow B$ IN $g: B \rightarrow A$

KOMENTAR:

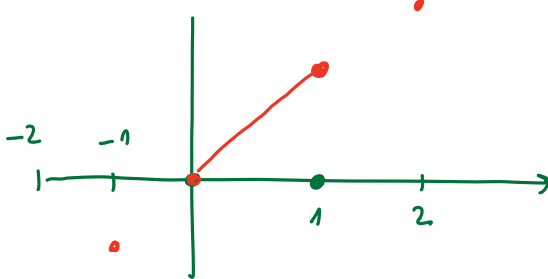
NAVADNO JE LAŽJE NAJTI DVE INJEKTIVNI
KOT PA ENO BJEKTIVNO PRESLIKAVO.

③ POKAŽI, DA JE $|\mathbb{R}| = |[0,1] \cup \mathbb{N}|$.

PO IZREKU RABIMO INJEKTIVNI PRESLIKAVI

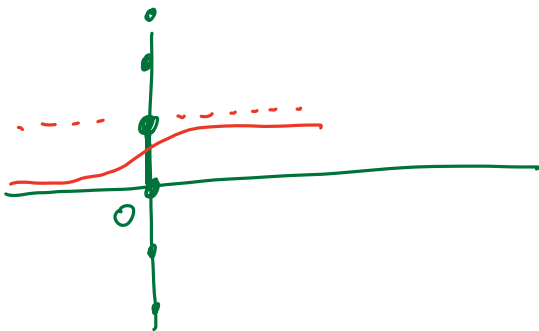
$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0,1] \cup \mathbb{N} \quad \text{IN} \quad g: [0,1] \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

PRESLIKAVA g JE OČITNA, SAJ JE $[0,1] \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$,
ŽATO LAHKO VZAMEMO KAR PREDPIS $g(x) = x$.



TA PRESLIKAVA JE
INJEKTIVNA, KJER JE
DEFINIRANA, NI PA SURJEKTIVNA.

TUDI PRI PRESLIKAVI f SI POMAGAMO Z GRAFOM:



KER JE DOVOLJ POISKATI
INJEKTIVNO PRESLIKAVO, LAHKO
VZAMEMO KAR

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right)$$

④ POKAŽI, DA JE $[0,1)$ EKVIVALENTNA $[0,1) \times [0,1)$.

R: ZNOVA ENO INJEKTIVNO PRESLIKAVO NAJDEMO TAKOJ:

NPR.

$$f: [0,1) \rightarrow [0,1) \times [0,1) \\ x \mapsto (x, 0)$$

V DRUGO SMER PA SI POMAĞAMO Z DECIMALNIM ZAPISOM.

$$g: [0,1) \times [0,1) \rightarrow [0,1)$$

$$\text{NAJ BO } (x, y) \in [0,1) \times [0,1).$$

POTEM ZAPIŠEMO:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.x_1x_2x_3\dots \\ y &= 0.y_1y_2y_3\dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{ZAPIS BREZ PONAVLJAJOČIH} \\ \text{SE DEVETIC} \end{array}$$

SEDAJ KONSTRUIRAMO SLIKO:

$$g(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots \in [0,1)$$

PREMIŠLIMO, DA JE g RES INJEKTIVNA:

$$\text{ČE } g(x, y) = g(\tilde{x}, \tilde{y}), \text{ TO PDMENI}$$

$$0.x_1y_1x_2y_2\dots = 0.\tilde{x}_1\tilde{y}_1\tilde{x}_2\tilde{y}_2\dots$$

KER SE DEVETICE NE PONAVLJAJO, VELJA

$$x_j = \tilde{x}_j \text{ IN } y_j = \tilde{y}_j$$

$$\text{OZIROMA } \left. \begin{aligned} x &= 0.x_1x_2\dots = 0.\tilde{x}_1\tilde{x}_2\dots = \tilde{x} \\ y &= 0.y_1y_2\dots = 0.\tilde{y}_1\tilde{y}_2\dots = \tilde{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

ZANIMIVOST:

g NI SURJEKTIVNA, SAJ NPR. ŠTEVILA

$0.191919\dots$ NI V ZALOZI VREDNOSTI

(KER NE SMEŠ VZETI $y = 0.9999\dots$)