

① POKAŽI, DA JE MNOŽICA KONČNIH PODMNOŽIC $\mathcal{N}$ ŠTEVNO NESKONČNA.

R: IMAMO

$$\mathcal{A} = \{ A \subseteq \mathbb{N} : \text{končna} \}$$

ISČEMO INJEKTIVNI PRESLIKAVI

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$g: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$$

PRVA JE OČITNA:

$$f(n) = \{n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

PRI DRUGI SI POMAGAMO Z DVOJIŠKIM ZAPISOM:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow |A| = n \in \mathbb{N}$$

$$A = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}, \quad m_j < m_{j+1}$$

TEJ MNOŽICI PRIREDIMO ŠTEVILO

$$g(A) = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_n}$$

t.j. ŠTEVILO, KI IMA V DVOJIŠKEM ZAPISU ENICE NATANKO NA MESTIH m_j . KER JE DVOJIŠKI ZAPIS ŠTEVILA ENOLIGEN, SE NE MORE

ZGODITI, DA BI IMELI DVE MNOŽICI Z ISTIMI ELEMENTI ENAKO SLIKO t.j. iz

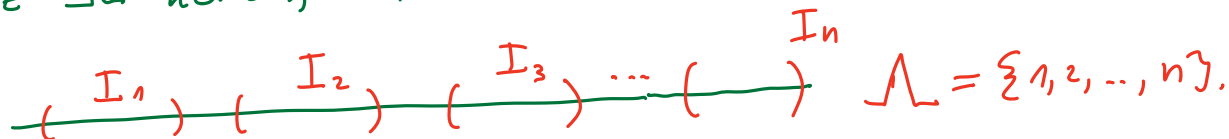
$$2^{m_1} + \dots + 2^{m_n} = 2^{k_1} + \dots + 2^{k_\ell}$$

SLEDI:

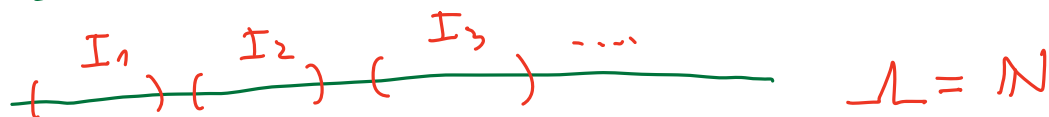
$$\ell = n \quad \text{IN} \quad m_j = k_j \quad \text{ZA} \quad 1 \leq j \leq n.$$

② NAD BO $A = \{I_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$, KJER SO I_α
 PAROMA DISJUNKTNI, NEPRAZNI INTERVALI.
 POKAŽI, DA JE $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{N}|$.

R: ĆE JE $\mathcal{A}$ KONČNA, IMAMO NA PRIMER:



ĆE JE $\mathcal{A}$ ŠTEVNO NESKONČNA, PA IMAMO NA PRIMER



TRDIMO, DA VEČ KOT TOLIKO INTERVALOV NE
 MOREMO IMETI. TO DOKAŽIMO S KONSTRUKCIJO
 USTREZNE INJEKTIVNE PRESLIKAVE, KER SO I_α NEPRAZNI
 OBSTAJAJO $q_\alpha \in I_\alpha \cap \mathbb{Q}$. DEFINIRAMO:

$$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Q},$$

$$f(\alpha) = q_\alpha.$$

TO INJEKTIVNA PRESLIKAVA, SICER BI BIL ED q_α
 V DVEH I_α , KAR PA NI MOGOČE, SAJ SO
 INTERVALI DISJUNKTNI. TOREJ JE $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

③ UGOTOVI, ALI STA NASLEDNJI MNOŽICI ŠTEVNI?

$$A = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots) ; x_j \in \{0, 1\} \text{ za vse } j \in \mathbb{N} \}$$

$$B = \{ (x_1, x_2, x_3, \dots) \in A ; x_j \leq x_{j+1} \}$$

R: V PRVI MNOŽICI SO ZAPOREDJA, KI SO SEŠTAVLJENA IZ ENIC IN NIČEL. TO MALCE SPOMINJA NA DVOJISKI DECIMALNI ZAPIS:

NPR.

$$0.875_{(10)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.11100\dots_{(2)} \approx (1, 1, 1, 0, 0, \dots) \in A$$

POSLEDIČNO SUMIMO, DA JE TA MNOŽICA NEŠTEVNA IN EKVIPOLENTNA INTERVALU $[0, 1]$. NEKAJ TEŽAV NAM POVRŽOČA LE NEPOLOČNOST ZAPISA. NPR.

$$0.01111\dots_{(2)} = 0.1000\dots_{(2)}$$

ZARADI NJE NASLEDNJA FUNKCIJA NI INJEKTIVNA:

$$f: A \rightarrow [0, 1]$$

$$f(x_1, x_2, \dots) = 0.x_1x_2x_3\dots_{(2)}$$

REŠITEV JE UPORABA CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖDERJEVEGA IZREKA IN KONSTRUKCIJA DVEH INJEKTIVNIH FUNKCIJ.

$$g: A \rightarrow [0, 1]$$

$$g(x_1, x_2, \dots) = 0.x_1x_2\dots_{(10)}$$

TA FUNKCIJA JE INJEKTIVNA, SAJ V DESETISKEM SISTEMU $0.01111\dots \neq 0.1$, SEVEDA PA NI SURJEKTIVNA.

PO DRUGI STRANI LATIKO V NASPROTHI SMERI

DEFINIRAMO:

$$h: [0, 1] \rightarrow A$$

$x \in [0, 1]$ IMA ZAPIS $0.x_1x_2\dots$,
KJER SE ENICE NE POHAVLJAJO.

$$h(x) = (x_1, x_2, \dots)$$

TUDI TA PRESLIKAVA JE SEDAJ INJEKTIVNA, NI
PA BIDEKTIVNA. VSEENO SKLENEMO, DA VELJA:

$$|A| = |[0, 1]|.$$

SEDAJ SI OGLEDAMO ELEMENTE MNOŽICE B :

$$(0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 1, \dots) \in B$$

j -TO
MESTO

RAZEN ZA NIČELNO ZAPOREDJE OBSTAJA $j \in \mathbb{N}$,
DA SO $x_k = 1$ ZA $k \geq j$. TOREJ IMAMO OČITNO
BIDEKCIJO:

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow B$$

$$f(0) = (0, 0, 0, \dots)$$

$$f(n) = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 1, \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

n -TO
MESTO

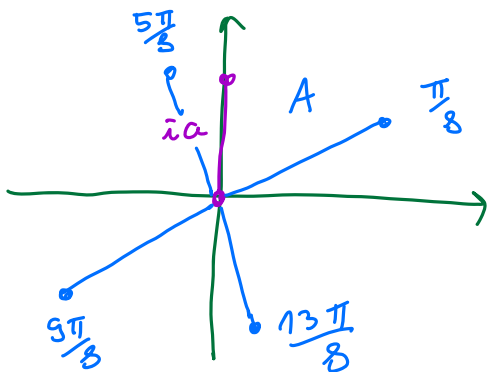
SKLEP:

$$|B| = |\mathbb{N} \cup \{0\}| = |\mathbb{N}|$$

B JE ŠTEVNA.

④ NAJ BO $A = \{z \in \mathbb{C} : z^4 = i\alpha, \alpha \in [0, 1]\}$.
 POKAŽI, DA JE $|A| = |[0, 1]|$.

R: SKICIRAJMO MNOŽICO A:



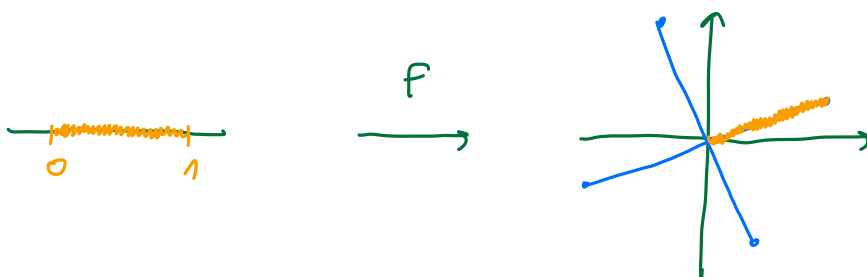
KONSTRUIRAJMO INJEKCIJO

$$f: [0, 1] \rightarrow A$$

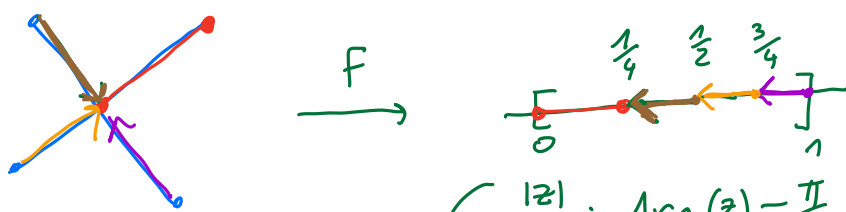
$$g: A \rightarrow [0, 1]$$

PRI PRVI IMAMO VELIKO SVOBODE, IZBEREMO
 LATIKO NA PRIMER:

$$f(x) = x e^{i\pi/8}, \quad x \in [0, 1]$$



V DRUGI MORAMO BITI MALCE BOLJ SPRETLJ:



$$f(z) = \begin{cases} \frac{|z|}{4}; \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{8} & \text{in } |z| \in [0, 1] \\ \frac{1}{4} + \frac{|z|}{4}; \operatorname{Arg}(z) = \frac{5\pi}{8} & \text{in } |z| \in (0, 1] \\ \frac{1}{2} + \frac{|z|}{4}; \operatorname{Arg}(z) = \frac{9\pi}{8} & \text{in } |z| \in (0, 1] \\ \frac{3}{4} + \frac{|z|}{4}; \operatorname{Arg}(z) = \frac{13\pi}{8} & \text{in } |z| \in (0, 1] \end{cases}$$