

# Kompleksna analiza: zapiski vaj

February 23, 2022

## 1 Osnovne lastnosti holomorfnih funkcij

Domena v  $\mathbb{C}$  je enostavno povezana odprta množica.

**Naloga 1.** Izrazi operator  $\Delta : \mathcal{C}^2(D) \rightarrow \mathcal{C}^0(D)$ ,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$  s pomočjo operatorjev  $\frac{\partial}{\partial z}$  in  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

**Rešitev 1.** Izračunajmo  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (u_x + iu_y) = \frac{1}{4} (u_{xx} - iu_{xy} + iu_{yx} + u_{yy}) = \frac{\Delta u}{4},$$

torej je  $\Delta u = 4\bar{\partial}\partial$ . Podobno vidimo, da je tudi  $\Delta u = 4\partial\bar{\partial}$ , torej v posebnem velja

$$\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial.$$

Dvakrat zvezno odvedljivim funkcijam  $u$  na  $D$ , ki zadoščajo  $\Delta u = 0$ , pravimo *harmonične funkcije*.

**Naloga 2.** Naj bo  $f$  holomorfnna funkcija na  $D$ . Dokaži, da sta njen realni in imaginarni del harmonični funkciji.

**Rešitev 2.** Pišimo  $f = u + iv$ . Ker je  $f$  holomorfnna, je  $\bar{\partial}f = 0$ , torej velja

$$\Delta(f) = \partial(\bar{\partial}f) = 0,$$

po drugi strani pa je  $\Delta(f) = \Delta u + i\Delta v$ . Ker sta  $u, v$  realni funkciji, sta vektorja  $\Delta u(z), i\Delta v(z) \in \mathbb{C}$  linearno neodvisna za poljuben  $z \in D$ . Sledi  $\Delta u(z) = \Delta v(z) = 0$  za poljuben  $z \in D$ , torej sta  $u$  in  $v$  harmonični funkciji na  $D$ . Iz računa je razvidno tudi, da je  $\Delta f(z) = 0$  za vse  $z$ . Holomorfne funkcije so torej harmonične.

**Naloga 3.** Naj bo  $D \subset \mathbb{C}$  povezana domena, tj. povezana in enostavno povezana odprta množica, in  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  gladka harmonična funkcija. Dokaži, da obstaja harmonična funkcija  $v \in \mathcal{C}^\infty(D)$ , tako da je  $f = u + iv$  holomorfnna funkcija na  $D$ .

**Rešitev 3.** Recimo, da takšna funkcija  $v$  obstaja. Iz Cauchy-Riemannovega sistema sledi

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x.$$

Predpostavimo najprej, da je  $D$  konveksna (ali zvezdasta glede na neko točko  $(x_0, y_0)$ ). Želimo definirati  $v$  kot

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x u_y(t, y) dt + C(y).$$

Veljati mora

$$v_y(x, y) = - \int_{x_0}^x u_{yy}(t, y) dt + C'(y) = u_x(x, y), \quad C'(y) = u_x(x, y) + \int_{x_0}^x u_{yy}(t, y) dt.$$

Ker je  $u$  harmonična, je  $u_{yy}(t, y) = -u_{xx}(t, y)$  za vse  $(t, y) \in D$ . Dobimo

$$C'(y) = u_x(x, y) + \int_{x_0}^x u_{yy}(t, y) dt = u_x(x, y) - \int_{x_0}^x u_{xx}(t, y) dt = u_x(x_0, y).$$

Z integracijo dobimo  $C(y) = \int_{y_0}^y u_x(x_0, t) dt$ . Definirajmo

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u_x(x_0, t) dt - \int_{x_0}^x u_y(t, y) dt$$

Velja

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = u_x(x_0, y) - \int_{x_0}^x u_{yy}(x, t) dt = u_x(x_0, y) + \int_{x_0}^x u_{xx}(x, t) dt = u_x(x, y).$$

Sledi

$$v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0,$$

torej je  $v$  harmonična funkcija, ki je konjugirana funkciji  $u$ . Sledi, da je  $f = u + iv$  holomorfná. Če  $D$  ni konveksna, izberemo neko točko  $(x_0, y_0)$  in za poljubno točko  $(x, y)$  definiramo  $v$  kot integral

$$v(x, y) = \int_{\gamma} u_x dy - u_y dx,$$

kjer je  $\gamma$  stopničasta pot od  $(x_0, y_0)$  do  $(x, y)$ . Ker je  $D$  lokalno konveksna, saj za vsako točko v  $D$  obstaja nek odprt disk v  $D$  s centrom v tej točki, takšna pot obstaja. Integral po  $\gamma$  se nato prevede na vsoto integralov zgornje oblike. Ker je  $D$  enostavno povezana, je integral neodvisen od poti, torej enolično definira funkcijo  $v$  na  $D$ .

**Naloga 4.** Naj bo  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorfná funkcija na domeni  $D$ . Pokaži, da obstaja holomorfná funkcija  $g$ , ki zadošča  $f = e^g$ . Takšni funkciji  $g$  pravimo *logaritem funkcije*  $f$  in jo označimo z  $g = \log f$ .

**Rešitev 4.** Recimo, da takšna funkcija  $g$  obstaja. Če odvajamo enačbo  $f = e^g$  dobimo

$$f' = g' e^g = g' f,$$

torej mora veljati  $g' = f'/f$ . Ker  $f$  nima ničel na  $D$ , je funkcija  $f'/f$  holomorfná na  $D$ . Za poljubno enostavno sklenjeno krivuljo  $\gamma$  v  $D$  torej po Cauchyjevem izreku velja

$$\oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = 0.$$

Sledi, da je integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

neodvisen od poti. V posebnem je  $F$  holomorfná, kar lahko preverimo po definiciji:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\int_{z_0}^{z+h} \frac{f'(t)}{f(t)} dt - \int_{z_0}^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt}{h} = \frac{\int_z^{z+h} \frac{f'(t)}{f(t)} dt}{h} = \frac{f'(\tilde{z})}{f(\tilde{z})}$$

za nek  $\tilde{z} \in B(z, |h|)$ , saj je funkcija  $f'/f$  zvezna, torej je  $F$  kompleksno odvedljiva. Definirajmo

$$g(z) = \log(f(z_0)) + \int_{z_0}^z \frac{f'(t)}{f(t)} dt.$$

Očitno je  $f(z_0) = e^{g(z_0)}$ . Iz zgornjega izračuna pa vidimo, da je  $f'(z) = (e^g)'(z)$ , torej je  $f(z) = e^{g(z)}$  za vse  $z \in D$ .

**Opomba 1.** V resnici velja

$$f(z_0) = e^{g(z_0) + 2ik\pi}, \quad \text{za poljuben } k \in \mathbb{Z}.$$

Ustrezni funkciji  $g$  je torej števno mnogo. Z drugimi besedami,  $g$  je določena do konstante natančno.

**Naloga 5.** Pokaži, da za zvezno odvedljive funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  velja

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

**Rešitev 5.** Računamo po definiciji:

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2} \overline{(u_x + iv_x + iu_y - v_y)} = \frac{1}{2} (u_x - iv_x - iu_y - v_y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

**Naloga 6.** Izrazi s pomočjo  $\partial$ ,  $\bar{\partial}$ :

a)  $\partial(f \circ g)$ ,

b)  $\bar{\partial}(f \circ g)$ .

**Rešitev 6.** a) Računamo

$$\begin{aligned} 2\partial(f \circ g) &= \partial(u(q(x, y), w(x, y)) + iv(q(x, y), w(x, y))) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f \circ g) - i \frac{\partial}{\partial y}(f \circ g) = \\ &= u_x q_x + u_y w_x + iv_x q_x + iv_y w_x - iu_x q_y - iu_y w_y + v_x q_y + v_y w_y = \\ &= u_x(q_x - iq_y) + iv_x(q_x - iq_y) + u_y(w_x - iw_y) + iv_y(w_x - iw_y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(q_x - iq_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(w_x - iw_y) = \\ &= f_x 2\partial \left(\frac{g + \bar{g}}{2}\right) + f_y 2\partial \left(\frac{g - \bar{g}}{2i}\right) = \\ &= (f_x - if_y)\partial g + (f_x + if_y)\partial \bar{g} = \\ &= 2\partial f \partial g + 2\bar{\partial} f \partial \bar{g}. \end{aligned}$$

b) Na podoben način dobimo

$$\begin{aligned} 2\bar{\partial}(f \circ g) &= \bar{\partial}(u(q(x, y), w(x, y)) + iv(q(x, y), w(x, y))) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f \circ g) + i \frac{\partial}{\partial y}(f \circ g) = \\ &= u_x q_x + u_y w_x + iv_x q_x + iv_y w_x + iu_x q_y + iu_y w_y - v_x q_y - v_y w_y = \\ &= u_x(q_x + iq_y) + u_y(w_x + iw_y) + iv_x(q_x + iq_y) + iv_y(w_x + iw_y) = \\ &= (u_x + iv_x)(q_x + iq_y) + (u_y + iv_y)(w_x + iw_y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} 2\bar{\partial} \left(\frac{g + \bar{g}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} 2\bar{\partial} \left(\frac{g - \bar{g}}{2i}\right) = \\ &= (f_x - if_y)\bar{\partial} g + (f_x + if_y)\bar{\partial} \bar{g} = \\ &= \partial f \bar{\partial} g + \bar{\partial} f \bar{\partial} \bar{g} \end{aligned}$$

**Naloga 7.** a) Izpelj Greenovo identiteto za vektorsko polje  $F = (f_1, f_2) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in zvezno odvedljivo funkcijo  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  na omejeni domeni  $D \subset \mathbb{C}$  z gladkim robom, sestavljenim iz končne unije Jordanovih krivulj:

$$\int_D \langle \nabla, F \rangle g dx dy = \int_{\partial D} \langle \vec{n}, F \rangle g ds - \int_D \langle F, \nabla g \rangle dx dy,$$

kjer je  $\vec{n}$  zunanja enotska normala na  $\partial D$ .

b) Naj bo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija na domeni  $D$  z enakimi lastnostmi kot zgoraj in naj bo  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$  gladka funkcija na  $D$  s kompaktnim nosilcem v  $D$ , kjer je  $D$  domena z enakimi lastnostmi kot zgoraj. Pokaži, da velja

$$\int_D (\Delta f) g dx dy = \int_D f (\Delta g) dx dy.$$

c) Izračunaj  $\Delta\varphi$ , kjer je

$$\varphi := \frac{\log |z|}{2\pi}.$$

d) Pokaži, da je  $\varphi$  fundamentalna rešitev Laplaceovega operatorja  $\Delta$ . To pomeni, da za poljubno testno funkcijo  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$  velja

$$\iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) \Delta g(\zeta) d\zeta d\bar{\zeta} = g(0).$$

**Opomba 2.** Fundamentalna rešitev  $\varphi$  nam izrazi rešitev  $u$  enačbe  $\Delta u = f$  kot integral (konvolucijo)

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) \varphi(z - \zeta) d\zeta d\bar{\zeta}$$

**Rešitev 7.** a) Predpostavimo najprej, da je  $D$  enostavno povezano območje z robom  $\gamma$ . Parametriziramo  $\gamma$  z naravnim parametrom  $s$ , tako da velja  $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$  in  $\vec{n} = (\dot{y}, -\dot{x})$ , kjer je  $\vec{n}$  zunanja enotska normala. Ob oznakah  $F = (P, Q)$  sledi:

$$\langle \vec{n}, F \rangle = P\dot{y} - Q\dot{x},$$

torej je  $\langle \vec{n}, F \rangle g ds = (gP)dy - (gQ)dx$ . Po Stokesovem izreku velja

$$\int_{bD} \langle \vec{n}, F \rangle g ds = \int_{\gamma} \langle \vec{n}, F \rangle g ds = \int_0^{\ell(\gamma)} (gP)\dot{y} - (gQ)\dot{x} dt \int_{\gamma} (gP)dy - (gQ)dx = \int_D ((gP)_x + (gQ)_y) dx dy.$$

Preprost izračun pokaže, da je zgornji integrand enak  $\langle \nabla g, F \rangle + g \nabla \cdot F$ . Enakost za enostavno povezana območja sledi.

V splošnem je rob  $bD$  unija paroma disjunktnih regularnih gladkih krivulj  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , ki jih parametriziramo z naravnim parametrom  $s_0 \in [0, S_i]$ , tj. za vse  $i = 0, \dots, n$  velja

$$\|\dot{\gamma}_i(s_i)\| \equiv 1.$$

Poleg tega zahtevamo, da je  $bD$  koherentno orientiran, tj.

$$n_i^1 \dot{y}_i - n_i^2 \dot{x}_i \equiv 1,$$

kjer je  $\gamma_i = (x_i, y_i)$  in je  $\vec{n}_i = (n_i^1, n_i^2)$  zunanja enotska normala na robno komponento  $\gamma_i$ . Ker je  $\|\dot{\gamma}_i\| \equiv 1$ , lahko vzamemo  $\vec{n}_i = (\dot{y}_i, -\dot{x}_i)$ . Natančneje, naj bo  $\vec{n}_i(s)$  enotski vektor za katerega velja  $\langle \dot{\gamma}_i(s), \vec{n}_i(s) \rangle = 0$  za vse  $s$  in

$$\gamma_i(s) - t\vec{n}_i(s) \in D, \quad \text{za vse dovolj majhne } t \geq 0.$$

Tu predpostavljamo, da je  $\gamma_0$  rob enostavno povezanega območja  $D' \subset \mathbb{C}$ , tako da je  $D \subset D'$ . Enak izračun kot zgoraj nato pokaže enakost za splošna območja z gladkim robom:

$$\int_{bD} \langle \vec{n}, F \rangle g ds = \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} \langle \vec{n}, F \rangle g ds = \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j} (gP)dy - (gQ)dx = \int_{bD} (gP)dy - (gQ)dx = \int_D ((gP)_x + (gQ)_y) dx dy.$$

b) Za poljubno  $\mathcal{C}^2$ -funkcijo  $f$  je

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Ker je  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$ , je  $g|_{bD} \equiv 0$  in  $\nabla g|_{bD} \equiv 0$ , torej velja po prejšnji točki:

$$\begin{aligned} \int_D (\Delta f) g dx dy &= \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds - \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx dy = - \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx dy = \\ &= \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds - \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx dy = \int_D \nabla \cdot (\nabla g) f dx dy = \\ &= \int_D f \Delta g dx dy. \end{aligned}$$

c) Velja

$$\Delta\varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{4}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(z\bar{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log z + \log \bar{z}) = 0$$

na  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

d) Preveriti moramo, da za poljubno testno funkcijo  $g \in C_c^\infty(\mathbb{C})$  velja

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(x, y) \Delta g(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy = g(0).$$

Velja  $|\zeta|^2 = x^2 + y^2$ . Zgornji integral je torej enak

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta g(x, y) \log(x^2 + y^2) dx dy$$

Ker ima  $g$  kompakten nosilec, velja  $g \equiv 0$  na  $\mathbb{C} \setminus B(0, r) =: B_r$  za dovolj velik  $r > 0$ . Zgornji integral razdelimo na dva dela:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r \setminus B_\varepsilon} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy = A + B.$$

Oglejmo si najprej člen  $B$ . Uporabimo polarne koordinate in dobimo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B_\varepsilon} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy = \frac{1}{4\pi} \int_{B_\varepsilon} \Delta g(x, y) \log(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \Delta g(x, y) \log(r) r dt dr$$

Ker je  $g$  gladka, je  $|\Delta g| \leq M$  na  $\overline{B_\varepsilon}$ . Ker je  $\lim_{r \rightarrow 0} r \log r = 0$ , je funkcija  $r \mapsto r \log r$  omejena na  $[0, \varepsilon]$ , torej je  $|r \log r| \leq K$ . Ocenimo

$$\left| \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \Delta g(x, y) \log(r) r dt dr \right| \leq \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} |\Delta g(x, y) \log(r) r| dt dr \leq KM \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} dt dr = 2KM\pi\varepsilon.$$

Sledi  $B \rightarrow 0$ , ko gre  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Označimo še  $D = B_r \setminus B_\varepsilon$  in izračunajmo člen  $A = \int_D f \Delta g dx dy$ . Iz Greenove identitete sledi

$$\begin{aligned} \int_D f \Delta g dx dy &= \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds - \int_D \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx dy = \\ &= \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds - \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds + \int_D g \Delta f dx dy = \\ &= I - J + K \end{aligned}$$

Iz točke c) sledi, da je  $K = 0$ . Sedaj izračunajmo  $I$ :

$$I = \int_{bB_r} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds - \int_{bB_\varepsilon} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds = - \int_{bB_\varepsilon} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle f ds = - \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \int_{bB_\varepsilon} \langle \vec{n}, \nabla g \rangle ds.$$

Saj je  $f|_{bB_\varepsilon} \equiv \log \varepsilon / (2\pi)$ . Ker je integrand omejen na  $\overline{B_\varepsilon}$ , za neko konstanto  $C > 0$  velja  $|I| \leq C\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$ , ko gre  $\varepsilon \downarrow 0$ . Za  $J$  izračunamo

$$J = \int_{bD} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds = \int_{bB_r} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds - \int_{bB_\varepsilon} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds = - \int_{bB_\varepsilon} \langle \vec{n}, \nabla f \rangle g ds = - \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{bB_\varepsilon} g ds.$$

Ker je  $g$  zvezna na  $\overline{B_\varepsilon}$ , velja  $J \rightarrow g(0)$ , ko gre  $\varepsilon \downarrow 0$ . Sledi

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Delta g(x, y) \log |\zeta| dx dy = I - J + K + B \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 + g(0) + 0 + 0 = g(0).$$

**Naloga 8** (Riemannov izrek o odpravljeni singularnosti). Naj bo  $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná funkcija, omejena na neki okolici izhodišča. Dokaži, da se  $f$  holomorfno razširi na  $\mathbb{D}$ .

**Rešitev 8.** Definirajmo funkcijo  $h(z) = z^2 f(z)$ . Ker je  $f$  omejena na neki okolici izhodišča, recimo  $|f| \leq M$ , velja  $|h(z)| \leq |z|^2 M \rightarrow 0$ , ko gre  $z \rightarrow 0$ . Sledi, da se  $h$  zvezno razširi na  $\mathbb{D}$ . Izračunamo odvod  $h$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) \rightarrow 0$$

z enakim argumentom kot prej, tj.  $f$  je omejena na okolici izhodišča. Sledi, da je  $h$  kompleksno odvedljiva v izhodišču, torej je holomorfná. Razvijemo  $h$  v Taylorjevo vrsto:

$$h(z) = h(0) + h'(0)z + h''(0)z^2 + o(z^2) = h''(0)z^2 + o(z^2).$$

Naj bo  $\tilde{f} = h(z)/z^2$ . Očitno je  $\tilde{f} = f$  na  $\mathbb{D}^*$ , blizu izhodišča pa velja

$$\tilde{f}(z) = \frac{h''(0)z^2 + o(z^2)}{z^2} = h''(0) + \frac{o(z^2)}{z^2} \xrightarrow{z \rightarrow 0} h''(0).$$

Sledi, da je  $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  zvezna funkcija, holomorfná na  $\mathbb{D}^*$ . Ker je  $\tilde{f}$  vsota konvergentne potenčne vrste v spremenljivki  $z$ , je holomorfná.

**Opomba 3.** Konvergenčni radij Taylorjeve vrste holomorfne funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  v točki  $z \in D$  je enak radiju največjega diska s središčem v  $z$ , ki leži v  $D$ . Natančneje:

$$R = \sup\{r > 0 : B(z, r) \subset D\}.$$

**Naloga 9** (Cauchyjeve ocene). Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná funkcija in naj bo  $D \Subset \Omega$  disk s središčem v  $a \in \Omega$ , tako da je  $\overline{D} \subset \Omega$ . Pokaži, da veljajo Cauchyjeve ocene:

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!M}{r^k},$$

kjer je  $r$  radij diska  $D$  in je  $M = \max_{\zeta \in \partial D} |f(\zeta)|$ .

**Rešitev 9.** Po Cauchyjevi formuli velja

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta.$$

Ker vrsta

$$\frac{1}{\zeta - a} = 1 + (\zeta - a) + (\zeta - a)^2 + \dots$$

konvergira enakomerno na  $\partial D \ni \zeta$ , lahko  $k$ -krat odvajamo pod integralom in dobimo

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

Na  $\partial D$  velja  $|f(\zeta)| \leq M$  ter  $|\zeta - a| \equiv r$ , od koder dobimo oceno

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{M}{r^{k+1}} |d\zeta| = \frac{k!M}{2\pi} \int_0^1 \frac{2\pi r}{r^{k+1}} |e^{2\pi i t}| dt = \frac{k!M}{r^k}$$

**Naloga 10** (Princip identičnosti). Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  povezana domena in  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfni funkciji na  $\Omega$ . Če velja  $f|_A \equiv g|_A$ , kjer je  $A \subset \Omega$  neka množica s stekališčem v  $\Omega$ , tedaj je  $f \equiv g$  na  $\Omega$ .

**Opomba 4.** Točka  $q \in \Omega$  je stekališče množice  $A$ , če je za poljubno okolico  $U$  točke  $q$  množica  $(U \setminus \{q\}) \cap A$  neprazna, tj. poljubna okolica  $q$  vsebuje neko točko iz  $A$ , ki je različna od  $q$ .

**Rešitev 10.** Dovolj je pokazati, da je holomorfna funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  konstantno enaka 0, čim ima njena množica ničel neko stekališče v  $\Omega$ . Naj bo torej  $Z_f = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$  in naj bo  $A$  množica stekališč množice  $Z_f$ . Pokažimo, da je  $A$  hkrati odprta in zaprta.

Pokažimo najprej, da je  $A$  zaprta. Naj bo  $q$  neko stekališče množice  $A$ . Tedaj poljubna odprta okolica  $U$  točke  $q$  vsebuje nek  $w \in A \setminus \{q\}$ . Ker je  $U$  odprta, je okolica za točko  $w$ , torej vsebuje neko točko  $z \in Z_f$ . Ker je bila  $U$  poljubna, je  $q$  stekališče množice  $Z_f$ , torej je  $q \in A$ .

Naj bo sedaj  $q \in A$ . Ker je  $f$  holomorfna v  $q$ , je na neki okolici  $U \subset \Omega$  točke  $q$  enaka vsoti svoje Taylorjeve vrste:  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-q)^j$ . Ker je  $q$  ničla  $f$ , velja  $c_0 = 0$ . Recimo, da  $f$  ni konstantno enaka 0 na  $U$ . Tedaj obstaja najmanjši tak  $j_0 \in \mathbb{N}$ ,  $j_0 \geq 1$ , da velja  $c_{j_0} \neq 0$ , torej je  $f(z) = c_{j_0}(z-q)^{j_0} + o((z-q)^{j_0})$ . Funkcija  $g(z) = f(z)/(z-q)^{j_0}$  je torej omejena na neki okolici  $V \subset U$  točke  $q$  in je holomorfna na  $V \setminus \{q\}$ , torej ima po Riemannovem izreku odpravljivo singularnost v  $q$  in velja  $g(q) = c_{j_0} \neq 0$ . Ker je  $g$  holomorfna, je zvezna, torej obstaja okolica  $V' \subset V$  točke  $q$ , tako da je  $g(z) \neq 0$  za vse  $z \in V'$ . Ker je  $f(z) = (z-q)^{j_0}g(z)$ , velja  $f(z) \neq 0$  za vse  $z \in V' \setminus \{q\}$ , torej je  $q$  izolirana ničla funkcije  $f$ , kar je v nasprotju s predpostavko o tem, da je  $q$  stekališče množice  $Z_f$ . Sledi  $f|_U \equiv 0$ , torej je  $A$  odprta.

Ker je  $\Omega$  povezana, sta edini njeni podmnožici, ki sta hkrati odprti in zaprti ravno prazna množica in  $\Omega$ . Ker je  $A$  po predpostavki neprazna, sledi  $A = \Omega$ .

**Naloga 11.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  odprta množica. Označimo  $\Omega^+ = \{z \in \Omega : \Im z > 0\}$  in  $\Omega^- = \{z \in \Omega : \Im z < 0\}$ . Naj bo še  $I = \Omega \cap \mathbb{R}$  in naj bosta funkciji  $f : \Omega^+ \cup I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \Omega^- \cup I \rightarrow \mathbb{C}$  zvezni ter holomorfni na  $\Omega^+$  oz.  $\Omega^-$ . Naj velja  $f|_I \equiv g|_I$ . Dokaži, da je tedaj

$$F(z) := \begin{cases} f(z); & z \in \Omega^+ \cup I \\ g(z); & z \in \Omega^- \cup I \end{cases}$$

holomorfna funkcija na  $\Omega$ .

**Namig 1.** Uporabi Morerov izrek: če je  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  zvezna funkcija, za katero je  $\int_{b\Delta} f dz = 0$  za vsak trikotnik  $\Delta$ , za katerega velja  $\overline{\Delta} \subset D$ , potem je  $f$  holomorfna. Namesto trikotnikov lahko v pogoju vzamemo tudi enostavne sklenjene krivulje, ki omejujejo neko območje v  $\Omega$ , tj. kontraktibilne zanke.

**Rešitev 11.** Ker velja  $f|_I \equiv g|_I$ , je funkcija  $F$  dobro definirana. Za poljuben trikotnik  $\overline{\Delta}$ , ki leži bodisi v  $\Omega^+$  bodisi v  $\Omega^-$  je Morerov pogoj za  $F$  izpolnjen. Če katera od stranic trikotnika leži na  $I$ , je pogoj prav tako izpolnjen, saj je  $f$  zvezna na  $\Omega_+ \cup I$ . Recimo sedaj, da trikotnik  $\overline{\Delta}$  seka tako  $\Omega^+$  kot tudi  $\Omega^-$ . Razdelimo trikotnik na dve območji  $\Delta^\pm = \overline{\Delta} \cap \Omega^\pm \subset \Omega^\pm$ . Območji skladno orientiramo, tedaj pa velja

$$\int_{b\Delta} F dz = \int_{b\Delta^+} f dz + \int_{b\Delta^-} g dz = 0.$$

Sledi, da je Morerov pogoj izpolnjen za poljuben trikotnik  $\overline{\Delta} \subset \Omega$ , torej je  $F$  holomorfna na  $\Omega$ .

**Naloga 12** (Schwarzov princip zrcaljenja). Naj bo  $f : D := \Omega_+ \cup I \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfna funkcija na množici  $D \subset \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ , ki ima realne vrednosti na  $D \cap \mathbb{R} = I \subset \mathbb{R}$ . Dokaži, da se  $f$  razširi na  $D \cup D^*$ , kjer je

$$D^* = \{\bar{z} : z \in D\}.$$

**Rešitev 12.** Definirajmo  $f^* : D^* \rightarrow \mathbb{C}$  s predpisom  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . Z odvajanjem se prepričamo, da je  $f^*$  holomorfna funkcija na  $D^*$ . Ker za  $z \in D \cap \mathbb{R}$  velja  $f(z) = f(\bar{z}) = \overline{f(\bar{z})} = f^*(z)$ , saj ima  $f$  realne vrednosti na  $D \cap \mathbb{R}$ , velja po principu identičnosti  $f(z) = f^*(z)$  za vse  $z \in D \cap D^*$ , saj je  $D$  odprta množica, torej je presek  $D \cap \mathbb{R}$  množica s stekališčem. Definirajmo

$$F(z) = \begin{cases} f(z); & z \in D \\ f^*(z) & z \in D^* \end{cases}$$

Iz zgornje razprave je razvidno, da je  $F$  dobro definirana. Po prejšnji nalogi sledi, da je tudi holomorfna.

**Naloga 13.** Naj bo  $f$  zvezna na  $\Omega_+ \cup I$  in holomorfnna na  $\Omega_+$ . Predpostavimo, da je  $f|_I \equiv 0$ . Pokaži, da je tedaj  $f \equiv 0$ .

**Rešitev 13.** Po principu zrcaljenja se  $f$  razširi na holomorfnno funkcijo  $\tilde{f}$  na  $\Omega$ . Ker je  $\tilde{f}|_I \equiv 0$  in je  $I$  množica s stekališčem, je  $\tilde{f} \equiv 0$ . Sledi  $f \equiv 0$ .

**Naloga 14.** Naj bodo  $\Omega$ ,  $\Omega_+$ ,  $\Omega_-$ ,  $I$ ,  $f$  kot zgoraj in dodatno predpostavimo, da je  $\Omega$  povezana,  $f$  injektivna na  $\Omega_+$ , da ima realne vrednosti na  $I$  in da velja  $\Im f(z) \neq 0$  na  $\Omega_+$ . Dokaži, da se tedaj  $f$  razširi do injektivne funkcije na  $\Omega$ .

**Rešitev 14.** Naj bo  $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfnna razširitev  $f$ , ki jo da princip zrcaljenja. Dokažimo, da je  $\tilde{f}$  injektivna. Po predpostavki je  $\tilde{f}$  injektivna na  $\Omega_+$ . Ker je  $\tilde{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  za poljuben  $\bar{z} \in \Omega_-$ , je tudi  $\tilde{f}|_{\Omega_-}$  injektivna. Naj bosta sedaj  $z, z' \in \Omega_+$ . Ker je funkcija  $z \mapsto \Im f(z)$  zvezna, je bodisi  $\Im f(z) > 0$  bodisi  $\Im f(z) < 0$  za vse  $z \in \Omega_+$ , torej je

$$\tilde{f}(\bar{z}') = \overline{f(z')} \neq f(z) = \tilde{f}(z).$$

Brez škode za splošnost predpostavimo  $\Im f(z) > 0$  na  $\Omega_+$ . Ker ima  $\tilde{f}$  realne vrednosti na  $I$ , je za injektivnost dovolj pokazati  $f(x) \neq f(y)$  za poljubna  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$ . Predpostavimo nasprotno. Ker je  $f$  injektivna na  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ , je nekonstantna na  $\Omega$ , torej je odprta po izreku o odprti preslikavi. Sledi, da slika diska  $\mathbb{D}(x, r)$  vsebuje nek disk  $\mathbb{D}(f(x), r')$ . Če izberemo  $r, r'$  dovolj majhna, tudi slika diska  $\mathbb{D}(y, r)$  vsebuje disk  $\mathbb{D}(f(y), r) = \mathbb{D}(f(x), r)$ . Nadalje lahko predpostavimo, da sta diska  $\mathbb{D}(x, r)$  in  $\mathbb{D}(y, r)$  disjunktna, tako da po potrebi zmanjšamo  $r$  in  $r'$ . Tedaj za poljuben  $z \in \mathbb{D}(x, r)_+$  dovolj blizu  $x$  obstaja nek  $z' \in \mathbb{D}(y, r)$ , tako da je  $f(z) = f(z')$ . Ker je  $f$  injektivna na  $\Omega_+ \cup \Omega_-$ , sledi  $z' \in \mathbb{D}(y, r) \cap I$ , vendar tedaj velja  $\Im f(z') = 0$ , ker je  $f$  realna na  $I$ , in hkrati  $0 < \Im f(z) = \Im f(z')$  po predpostavki. To je protislovje. Sledi, da je  $f$  injektivna tudi na  $I$ , torej je  $\tilde{f}$  injektivna na  $\Omega$ .

**Naloga 15** (Schwarzova lema). Naj bo  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorfnna funkcija in naj bo  $f(0) = 0$ . Dokaži, da velja

a)  $|f(z)| \leq |z|$  za vse  $z \in \mathbb{D}$ ,

b)  $|f'(0)| \leq 1$ .

Nato pokaži, da enakost v kateremu koli od zgornjih pogojev implicira  $f(z) = e^{i\theta}z$ .

**Rešitev 15.** a) Ker je  $f$  holomorfnna na  $\mathbb{D}$  in je  $f(0) = 0$ , sledi, da je Taylorjev razvoj  $f$  na  $\mathbb{D}$  oblike

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

torej je  $g(z) := f(z)/z$  holomorfnna funkcija na  $\mathbb{D}$  po izreku o odpravljeni singularnosti. Če je  $|z| = r$ , velja

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1,$$

torej je  $|g(z)| \leq 1$  po principu maksimuma, saj je  $g(z)$  holomorfnna na  $\mathbb{D}$ , od koder sledi

$$|f(z)| = |z| \cdot |g(z)| \leq |z|.$$

b) Velja

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1.$$

Če velja enakost v pogoju a) za neko točko  $z \in \mathbb{D}$ , potem je  $z$  maksimum funkcije  $|g(z)|$  in po principu maksimuma je  $g$  konstantna. Enakost sledi. Recimo, da velja enakost v pogoju b). Po principu maksimuma je tedaj  $|f'(z)| \equiv 1$ , saj je  $f'$  holomorfnna na  $\mathbb{D}$ , torej velja  $|f'(z)| \leq 1$ . Po krepkem principu maksimuma je  $f'$  konstantna, torej je  $f'(z) = e^{i\theta}$ . Sledi  $f(z) = e^{i\theta}z$ .

**Naloga 16.** Dokaži sledečo posplošitev Schwarzove leme. Naj bo  $f$  kot zgoraj, pri čemer dodatno zahtevamo, da je izhodišče ničla  $n$ -te stopnje. Dokaži, da tedaj velja  $|f(z)| \leq |z|^n$ . Če za nek  $z$  velja enakost, je  $f(z) = e^{i\theta}z^n$ .

**Rešitev 16.** Ker je  $f$  holomorfnna na  $\mathbb{D}$ , njena Taylorjeva vrsta konvergira na  $\mathbb{D}$ . Ker je izhodišče ničla  $n$ -te stopnje, sledi

$$f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

torej je  $g(z) = f(z)/z^n$  holomorfnna funkcija na  $\mathbb{D}$ . Kot prej vidimo, da je  $|g(z)| \leq 1$ , torej je  $|f(z)| \leq |z|^n$ . Če velja enakost, ima  $|g|$  maksimum v  $z$ , torej je  $g$  konstantna po principu maksimuma. Sledi, da je  $f(z) = e^{i\theta}z^n$ .

**Naloga 17.** Ali obstaja takšna holomorfná funkcija  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , da velja

- a)  $\{f(1/n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 0, 1/2, 1/3, 0, 1/4, 1/5, 1/6, 0, \dots\}$ ,
- b)  $\{f(1/n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots\}$ ,
- c)  $\{f(1/n)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, \dots\}$ ,
- d)  $f(z) = 1/z$  za vse  $z \in \mathbb{D}$ . (Tu predpostavljamo, da je  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ ).

**Rešitev 17.** a) Recimo, da takšna funkcija obstaja. Ker ima  $f$  ničle poljubno blizu izhodišča, je  $f(0) = 0$  in velja  $f \equiv 0$  na  $\mathbb{D}$  po principu identičnosti, kar je v nasprotju s predpostavko.

- b) Recimo, da takšna funkcija obstaja. Zaradi zveznosti je  $f(0) = 0$ . Naj bo  $g(z) = -z$ . Tedaj je  $g(1/2k) = -1/2k = f(1/2k)$  za vse  $k \in \mathbb{N}$ . Ker ima množica  $\{1/2k\}_{k \in \mathbb{N}}$  stekališče v  $\mathbb{D}$ , velja  $f = g$  po principu identičnosti, kar je v nasprotju s  $f(1/3) = 1/3$ .
- c) Recimo, da takšna funkcija obstaja. Zaradi zveznosti je  $f(0) = 0$ . Naj bo  $g(z) = z$ . Tedaj je  $g(1/2k) = 1/2k = f(1/2k)$  za vse  $k \in \mathbb{N}$ . Ker ima množica  $\{1/2k\}_{k \in \mathbb{N}}$  stekališče v  $\mathbb{D}$ , velja  $f = g$  po principu identičnosti, kar je v nasprotju s  $f(1/3) = 1/4$ .
- d) Recimo, da se  $f$  razširi na  $\mathbb{D}$ . Po Cauchyjevem izreku je tedaj  $0 = 1/(2\pi i) \int_{\partial \mathbb{D}} f(z) dz = 1/(2\pi i) \int_{\partial \mathbb{D}} dz/z = 1$ . Protislovje.

**Naloga 18.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  območje in  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná funkcija. Naj bo še  $z_0 \in \Omega$ . Pokaži, da Taylorjeva vrsta za  $f$  v točki  $z_0$  konvergira na disku  $D \subset \Omega$  s središčem v  $z_0$  radija  $R$ , kjer je

$$R = \sup\{r > 0 : \mathbb{D}(z, r) \subset \Omega\}.$$

**Rešitev 18.** Naj bo  $r < R$ . Tedaj je  $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$  in velja po Cauchyjevi formuli za poljuben  $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Naj bo  $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$ . Ker je  $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$ , velja

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left( 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \dots \right).$$

Označimo  $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$ . Vrsta  $1 + q + q^2 + \dots$  konvergira za vse  $q < 1$ , torej konvergira absolutno in enakomerno za vse  $z \in \mathbb{D}(z_0, r')$ , kjer je  $r' < r$ . Sledi, da lahko za  $z \in \mathbb{D}(z_0, r')$  členoma integriramo in dobimo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ker sta bila  $r' < r < R$  poljubna, sledi, da vrsta konvergira na poljubnem disku s središčem v  $z_0$ , ki je vsebovan v  $\Omega$ .

**Naloga 19** (Liouvilleov izrek). Dokaži, da je vsaka omejena cela funkcija konstantna.

**Rešitev 19.** Naj bo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  omejena, torej  $|f(z)| \leq M$  za nek  $M$  in vse  $z \in \mathbb{C}$ . Ker je  $f$  holomorfná na  $\mathbb{C}$ , je njena Taylorjeva vrsta s središčem v izhodišču povsod konvergentna in velja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

za poljuben  $r > 0$  po Cauchyjevi formuli. Iz Cauchyjeve ocene tedaj sledi  $|c_n| \leq M/(2\pi r^n)$ . Ko pošljemo  $r \rightarrow \infty$ , dobimo  $c_n = 0$  za vse  $n \geq 1$ , torej je  $f(z) \equiv f(0)$ .

**Naloga 20.** Naj bo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cela funkcija, ki zadošča

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|)^p \quad \text{za vse } z \in \mathbb{C},$$

za nek  $p > 0$  in  $M > 0$ . Dokaži, da je tedaj  $f$  polinom stopnje največ  $p$ .

**Rešitev 20.** Naj bo  $n = \lceil p \rceil$ . Za  $|z| > 1$  torej velja  $|f(z)| \leq (1 + |z|)^p \leq (1 + |z|)^n$ . Ker je  $f$  cela funkcija, njena Taylorjeva vrsta okoli izhodišča konvergira na  $\mathbb{C}$  in velja

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad \text{za vse } z \in \mathbb{C}.$$

Označimo z  $f_n$  Taylorjev polinom funkcije  $f$  stopnje  $n - 1$ . Tedaj je

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)| \leq M(1 + |z|)^n + (|c_0| + |c_1| \cdot |z| + \dots + |c_{n-1}| \cdot |z|^{n-1}) = |z|^n \left( C_0 + \frac{C_1}{|z|} + \dots + \frac{C_n}{|z|^n} \right).$$

Izraz na levi pa je enak

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \sum_{j=n}^{\infty} c_j z^j \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |c_j| \cdot |z|^j = |z|^n \sum_{j=n}^{\infty} |c_j| \cdot |z|^{j-n}.$$

Naj bo še  $h(z) = (f(z) - f_n(z))/z^n$ . Ker ima razlika  $f(z) - f_n(z)$  ničlo stopnje  $n$  v izhodišču, ima  $h$  tam odpravljivo singularnost, torej je  $h$  cela funkcija. Iz zgornje neenakosti sledi

$$|h(z)| \leq C_0 + \frac{C_1}{|z|} + \dots + \frac{C_n}{|z|^n} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0,$$

torej je  $h$  omejena. Po Liouvilleovem izreku je  $h$  konstantna, torej je  $c_j = 0$  za vse  $j \geq n + 1$ . Sledi, da je  $f$  polinom stopnje največ  $n \leq p + 1$ . Recimo, da je  $p < \lceil p \rceil$  in je  $f$  polinom stopnje  $n = \lceil p \rceil$ . Tedaj je

$$|f(z)| = |c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n| \geq |c_n| \cdot |z|^n \left( 1 - \frac{c_{n-1}}{|z|} + \dots + \frac{|c_0|}{|z|^n} \right) \geq N |z|^n$$

za nek  $N > 0$ , če je le  $|z|$  dovolj velik, saj gredo členi z negativnim predznakom proti 0, ko gre  $|z| \rightarrow \infty$ . Iz predpostavke sledi

$$N |z|^n \leq M(1 + |z|)^p, \quad \frac{N |z|^n}{(1 + |z|)^p} \leq M,$$

kar je protislovje, saj je stopnja člena v števcu strogo večja od stopnje imenovalca.

## 2 Funkcijski prostori in konvergenca

Naj bosta  $X, Y$  topološka prostora in naj bo  $\mathcal{C}(X, Y)$  prostor zveznih preslikav  $f : X \rightarrow Y$ . *Kompaktno-odprta topologija* na  $\mathcal{C}(X, Y)$  je podana s podbaznimi odprtimi množicami oblike

$$V(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\},$$

kjer je  $K \subset X$  kompaktna množica in  $U \subset Y$  odprta množica. Kompaktno-odprto topologijo imenujemo tudi *topologija enakomerne konvergence*.

**Naloga 21.** Dokaži, da je  $\mathcal{S} = \{V(K, U) : K \subset X \text{ kompaktna}, U \subset Y \text{ odprta}\}$  podbaza za topologijo na  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**Rešitev 21.** Pokazati moramo zgolj, da je unija vseh množic iz  $\mathcal{S}$  enaka  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Naj bo  $f : X \rightarrow Y$  zvezna preslikava in naj bo  $K \subset X$  kompaktna množica. Tedaj je tudi  $f(K)$  kompaktna in vsebovana v odprti množici  $U = Y$ , torej je  $f \in V(K, Y)$ . Ker je bila  $f$  poljubna, velja  $\mathcal{C}(X, Y) \subset V(K, Y) \in \mathcal{S}$ , torej je  $\cup \mathcal{S} = \mathcal{C}(X, Y)$ .

**Naloga 22.** Dokaži, da metrika

$$d_K : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(f, g) = \sup_{z \in K} |f(z) - g(z)|$$

inducira kompaktno-odprto topologijo na prostorih  $\mathcal{F} \in \{\mathcal{C}(K), \mathcal{A}(K)\}$ , kjer je  $K \subset \mathbb{C}$  kompaktna množica. Pokaži, da je  $\mathcal{F}$  poln metrični prostor in dokaži, da je  $d_K$  translacijsko invariantna metrika. Nato pokaži, da je  $\mathcal{F}$  lokalno konveksen vektorski prostor. Takim prostorom pravimo *Fréchetovi prostori*.

**Rešitev 22.** Najprej pokažimo, da je  $d$  res metrika. Očitno je  $d$  nenegativna in velja  $d(f, g) = 0$  natanko tedaj, ko je  $f = g$ . Prav tako je očitno  $d(f, g) = d(g, f)$  za poljubni funkciji  $f$  in  $g$  v  $\mathcal{F}$ . Pokažimo še trikotniško neenakost. Naj bodo  $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$ . Velja za poljuben  $z \in K$ :

$$|f(z) - h(z)| = |f(z) - g(z) + g(z) - h(z)| \leq |f(z) - g(z)| + |g(z) - h(z)|.$$

Trikotniška neenakost sledi, ko na obe strani neenakosti apliciramo supremum po  $z \in K$ .

Sedaj pokažimo, da je  $\mathcal{F}$  poln metrični prostor. Naj bo najprej  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjevo zaporedje zveznih funkcij na  $K$ . Ker je tedaj za poljuben  $z \in K$  tudi zaporedje  $\{f_n(z)\}$  Cauchyjevo, obstaja limitna funkcija  $f$ . Ker je konvergenca enakomerna, je  $f \in \mathcal{C}(K)$ , torej je  $(\mathcal{C}(K), d_K)$  poln metrični prostor.

Naj bo sedaj  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje zveznih funkcij na  $K$ , ki so holomorfne na notranjosti množice  $K$ . Iz prejšnje točke vemo, da limita zaporedja  $f$  obstaja in je zvezna. Naj bo  $\Delta$  trikotnik v  $K$ , tako da je  $\bar{\Delta} \subset K$ . Tedaj je

$$\int_{b\Delta} f(\zeta) d\zeta = \int_{b\Delta} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\zeta) d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b\Delta} f_n(\zeta) d\zeta = 0,$$

saj zaradi enakomerne konvergence zaporedja lahko zamenjamo integral in limito. Po Morerovem izreku sledi, da je  $f$  holomorfna na notranjosti  $K$ , torej je tudi  $\mathcal{A}(K)$  poln metrični prostor z metriko  $d_K$ .

Translacijska invarianca je očitna, saj za vse  $z$  velja  $|(f+h)(z) - (g+h)(z)| = |f(z) - g(z)|$ , torej je  $d(f+h, g+h) = d(f, g)$ . Pokažimo, da je krogla  $B_\varepsilon = \{f \in \mathcal{C}(X) : d(f, 0) < \varepsilon\}$  konveksna. Za poljubni funkciji  $g, h \in B$  je

$$d(tg + (1-t)h, 0) \leq d(tg, 0) + d((1-t)h, 0) = td(g, 0) + (1-t)d(h, 0) < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

torej je  $tg + (1-t)h \in B_\varepsilon$ . Ker to velja za poljuben  $\varepsilon$ , je  $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  sistem konveksnih okolic za ničelno funkcijo  $0 \in \mathcal{C}(X)$ , torej je  $\mathcal{C}(X)$  lokalno konveksen vektorski prostor.

Pokazati moramo še, da  $d_K$  inducira kompaktno odprto topologijo. Naj bo  $L \subset K$  kompaktna množica in si oglejmo podbazno množico  $V(L, U) \subset \mathcal{F}$ . Naj bo  $f \in V(L, U)$ . Ker je množica  $f(L) \subset U$  kompaktna, obstaja  $\varepsilon > 0$ , tako da je množica  $f(L)_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, f(K)) < \varepsilon\} \subset U$  vsebovana v  $U$ . Tedaj pa je tudi  $d_K$ -krogla  $B(f, \varepsilon)$  vsebovana v  $V(L, U)$ . Sledi, da je  $V(L, U)$  odprta v metrični topologiji. Vzemimo sedaj neko kroglo  $B(f, \varepsilon)$  in pokažimo, da je odprta v kompaktno-odprti topologiji. Naj bo za vsak  $z \in K$  množica  $U_z \subset f^{-1}(B(f(z), \varepsilon/2))$  neka relativno kompaktna odprta okolica točke  $z$  v  $K$  in naj bo  $V_z := V(\bar{U}_z, B(f(z), \varepsilon/2))$  podbazna okolica funkcije  $f$  v kompaktno odprti topologiji. Ker je  $K$  kompaktna, obstaja končno mnogo  $z_1, \dots, z_n \in K$ , tako da velja  $\cup_{j=1}^n (U_{z_j}) \supset K$ . Naj bo

$$V = \bigcap_{j=1}^n V_{z_j}.$$

Naj bo  $g \in V$  in  $z \in K$ . Tedaj je  $z \in U_{z_j}$  za nek  $j = 1, \dots, n$  in velja

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

saj  $g$  preslika  $\overline{U}_{z_j}$  v kroglo  $B(f(z_j), \varepsilon/2)$ . Sledi, da je  $V$  odprta okolica funkcije  $f$ , ki je vsebovana v  $B(f, \varepsilon)$ , torej je  $B(f, \varepsilon)$  odprta v kompaktno-odprti topologiji.

Družina zveznih funkcij  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K)$ , kjer je  $K \subset M$  kompaktna množica v metričnem prostoru  $(M, d)$ , je *enakozvezna*, če za poljuben  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , tako da za vse  $f \in \mathcal{F}$  in  $x, y \in K$  velja

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{čim je } d(x, y) < \delta.$$

Družina je *enakomerno omejena*, če obstaja takšen  $M > 0$ , da za vse  $x \in K$  ter vse  $f \in \mathcal{F}$  velja

$$|f(x)| \leq M.$$

Omejimo se na primer  $M = \mathbb{C}$ . Naj bo  $D$  domena in  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(D)$  neka družina funkcij. Pravimo, da je  $\mathcal{F}$  *enakozvezna na kompaktih*, če je za poljuben kompaktni  $K \subset D$  družina

$$\mathcal{F}|_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$$

enakozvezna. Podobno je družina  $\mathcal{F}$  *enakomerno omejena na kompaktih*, če je za poljuben kompaktni  $K$  družina  $\mathcal{F}|_K$  enakomerno omejena. Družina je *normalna*, če je  $\mathcal{F}$  kompaktna množica v  $\mathcal{C}^0(D)$  s šibko topologijo. Z drugimi besedami, vsako zaporedje funkcij v normalni družini dopušča podzaporedje, ki konvergira enakomerno na kompaktih k neki zvezni funkciji na  $D$ .

**Naloga 23.** Dokaži, da je družina funkcij  $f_n(x) = x^n$  enakomerno omejena na intervalu  $[0, 1]$ , ni pa enakozvezna.

**Rešitev 23.** Očitno za vse  $n \in \mathbb{N}$  in vse  $x \in [0, 1]$  velja  $|x^n| \leq 1$ . Naj bo sedaj  $\varepsilon > 0$  in pokažimo, da za poljuben  $\delta > 0$  obstajata  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|x - y| < \delta$  ter  $n \in \mathbb{N}$ , tako da je

$$|f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Naj bo  $y = 1$  in  $1 - \delta < x < 1$ . Tedaj velja  $|x|^n \rightarrow 0$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ , torej za dovolj velike  $n$  velja  $x^n < 1 - \varepsilon$ . Sledi

$$|f(x) - f(y)| = 1 - x^n > \varepsilon.$$

**Naloga 24.** Ali je družina  $f_n(x) = x^n$  normalna kot družina funkcij na intervalu  $(-1, 1)$ ?

**Rešitev 24.** Enako kot prej vidimo, da je družina enakomerno omejena na  $(-1, 1)$ , torej je enakomerno omejena na kompaktnih. Naj bo  $K \subset (-1, 1)$  kompaktna množica in naj bo  $M = \max_{x \in K} |x|$ . Tedaj je  $M < 1$  in  $K \subset [-M, M]$ . *Prvi način:* Pokažimo, da je družina enakozvezna na kompaktnih. Velja

$$|x^{n+1} - y^{n+1}| = |x - y| \cdot |x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n| \leq (n+1)M^n|x - y|.$$

Ker je  $M < 1$ , gre  $(n+1)M^n \rightarrow 0$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ , torej obstaja  $M' > 0$ , tako da je  $(n+1)M^n < M' < \infty$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ . Če je  $|x - y| < \varepsilon/M'$ , je  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ . Ker je družina enakozvezna in enakomerno omejena na kompaktnih, je normalna po izreku Arzelà-Ascoli.

*Drug način:* Očitno je  $|f_n(x)| \leq M^n$  za vse  $x \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , torej gre  $f_n \rightarrow 0$  enakomerno na  $K$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ . Sledi, da je  $\overline{\mathcal{F}}$  kompaktna v  $\mathcal{C}^0(-1, 1)$ .

**Naloga 25.** Pokaži, da je družina funkcij  $f_n(x) = \sin(nx)$  enakomerno omejena, vendar ni relativno kompaktna v prostoru  $\mathcal{C}^0((0, 1))$  s topologijo enakomerne konvergence na kompaktnih. Z drugimi besedami, pokaži, da zaporedje nima konvergentnega podzaporedja na nobenem kompaktnem podintervalu  $[a, b] \subset (0, 1)$  z neprazno notranjostjo.

**Rešitev 25.** Očitno je  $|f_n(x)| \leq 1$  za vse  $x \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  torej je družina enakomerno omejena. Recimo, da neko podzaporedje  $f_k$  konvergira enakomerno na  $[a, b]$  k zvezni funkciji  $f$ . Če je  $n = n(k)$  dovolj velik, je  $n(k)|b - a| > \pi$ , torej obstaja  $x_0^k \in [a, b]$ , tako da je  $n(k)x_0^k = l\pi$  za nek  $l \in \mathbb{N}$ . Sledi  $f_k(x_0^k) = f_{n(k)}(x_0^k) = 0$ . Ker to velja za vse dovolj velike  $k$ , dobimo zaporedje  $\{x_0^k\}_{k \geq k_0}$ . Ker je  $[a, b]$  kompakten, ima zaporedje stekališče  $x_0$  v  $[a, b]$ . Velja za dovolj velike  $k$ :

$$|f(x_0) - f_k(x_0^k)| \leq |f(x_0) - f(x_0^k)| + |f(x_0^k) - f_k(x_0^k)| \leq \varepsilon$$

za poljuben  $\varepsilon > 0$ , torej je  $f(x_0) = 0$ . Ker je bil  $[a, b]$  poljuben, sledi, da ima  $f$  ničlo v vsakem podintervalu  $I \subset (0, 1)$ , torej je njena množica ničel gosta. Sledi  $f \equiv 0$ . Na enak način kot zgoraj v poljubnem podintervalu  $[a, b]$  najdemo točko  $x_1$ , tako da je  $f(x_1) = 1$ , kar je protislovje. Sledi, da družina nima konvergentnega podzaporedja.

**Izrek 1** (Montel). Naj bo družina holomorfnih funkcij  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  na domeni  $\Omega \subset \mathbb{C}$  enakomerno omejena na kompaktnih v  $\Omega$ . Tedaj ima vsako zaporedje v  $\mathcal{F}$  neko podzaporedje, ki konvergira enakomerno na kompaktnih v  $\Omega$  k holomorfnemu funkciji na  $\Omega$ . Z drugimi besedami, pod temi predpostavkami je  $\mathcal{F}$  normalna družina.

**Opomba 5.** Drži tudi obrat: vsaka normalna družina holomorfnih funkcij je enakomerno omejena. Za poljubno kompaktno množico  $K \subset \Omega$  je polnorma  $\rho_K : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , ki jo podaja predpis  $\rho_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$ , zvezna funkcija (to vidimo iz definicije kompaktno-odprte topologije). Če je  $\mathcal{F}$  normalna družina, je njeno zaprtje kompaktna množica v  $\mathcal{O}(\Omega)$ , torej je slika  $\rho_K(\Omega)$  omejena množica v  $\mathbb{R}$ , kar pomeni, da je  $\mathcal{F}$  enakomerno omejena na kompaktnih.

**Naloga 26.** Naj bo  $f : T := \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  omejena holomorfnna funkcija na traku  $T$ , tako da je  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  za  $x \in \mathbb{R}$ . Pokaži, da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy) = 0, \quad \text{za vse } y \in (-1, 1).$$

**Namig:** oglej si družino  $f_n(z) = f(z + n)$ .

**Rešitev 26.** Ker je  $f$  omejena funkcija, recimo  $|f(z)| \leq M$  na  $T$ , je družina  $f_n$  enakomerno omejena na  $T$ , torej je normalna po Montelovem izreku. Naj bo  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  neko zaporedje naravnih števil in  $g : T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfnna funkcija, tako da zaporedje funkcij  $f_{n_k}$  konvergira enakomerno na kompaktnih v  $T$  k funkciji  $g$ . Za poljuben  $x \in \mathbb{R}$  velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x + n_k) = 0,$$

torej velja  $g(x) = 0$  za vse  $x \in \mathbb{R}$ . Ker je  $g$  holomorfnna, je  $g \equiv 0$  po principu identičnosti. Ker enak sklep velja za poljubno zaporedje v  $\mathbb{N}$ , je  $g \equiv 0$  edino stekališče množice  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(T)$ , torej je  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n + iy) = 0, \quad \text{za vse } x + iy \in T.$$

Vemo tudi, da  $f_n$  konvergira enakomerno na kompaktnih v  $T$  k ničelni funkciji. Naj bo  $y \in (-1, 1)$ . Naj bo  $|y| < r < 1$  in naj bo  $K = [-1, 1] \times [-r, r]$ . Ker je  $K$  kompaktna, za poljuben  $\varepsilon > 0$  za dovolj velike  $n$  velja  $|f_n(z)| < \varepsilon$ . Torej za vse  $x \in [-1, 1]$  velja  $|f(x + n + iy)| < \varepsilon$  za vse dovolj velike  $n$ , torej velja  $|f(x + iy)| < \varepsilon$  za vse  $x > n$ . Sledi  $f(x + iy) \rightarrow 0$ , ko gre  $x \rightarrow \infty$ .

**Naloga 27.** Konstruiraj normalno družino na  $\mathbb{D}$  in na  $\mathbb{C}$ .

**Rešitev 27.** Družina  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  avtomorfizmov diska je enakomerno omejena na  $\mathbb{D}$ , torej tudi na kompaktnih v  $\mathbb{D}$ . Splošneje je množica holomorfnih funkcij  $\{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}\}$  enakomerno omejena na  $\mathbb{D}$ . Družina

$$\{z \mapsto z^n : n \in \mathbb{N}\}$$

je enakomerno omejena na  $\mathbb{D}$ . Družina *Schlicht funkcij*

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : f(0) = 0, f'(0) = 1, f \text{ injektivna}\}$$

je kompaktna v  $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ . Družina celih funkcij  $f_n : z \mapsto z/n$  je enakomerno omejena na kompaktnih, torej je normalna.

**Naloga 28.** Ali je družina holomorfnih funkcij  $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : f(0) = 0, f'(0) = 1\}$  normalna?

**Rešitev 28.** Za  $a \in \mathbb{C}$  definiramo

$$f_a(z) = z + az^2.$$

Očitno je  $f_a \in \mathcal{F}$  za poljuben  $a \in \mathbb{C}$ , vendar zaporedje funkcij  $f_n(z) = z + nz^2$  nima stekališča, torej  $\mathcal{F}$  ni normalna.

**Naloga 29.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  domena. Dokaži, da je družina  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  normalna natanko tedaj, ko je za vsak disk  $D \subset \Omega$  normalna družina  $\mathcal{F}|_D$ .

**Rešitev 29.** Recimo, da je  $\mathcal{F}$  normalna in naj bo  $D \subset \Omega$  disk. Poljubna kompaktna množica  $K \subset D$  je kompaktna v  $\Omega$ , torej poljubno zaporedje  $(f_n|_D)$ , ki konvergira enakomerno na kompaktnih v  $\Omega$ , konvergira enakomerno na  $K$ . Ker je bila  $K$  poljubna, zaporedje konvergira enakomerno na kompaktnih v  $D$ . Sledi, da je družina  $\mathcal{F}|_D$  normalna za poljuben disk  $D \subset \Omega$ .

Sedaj predpostavimo, da je  $\mathcal{F}|_D$  normalna za vsak disk  $D$  v  $\Omega$ . Naj bo  $K \subset \Omega$  kompaktna množica in  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje holomorfnih funkcij  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Ker je  $\Omega$  odprta, za poljuben  $z \in K$  obstaja nek odprt disk  $D'_z \subset \Omega$  s središčem v  $z$ . Ker je  $K$  kompaktna, končno mnogo relativno kompaktnih odprtih diskov  $D_z \Subset D'_z$  pokrije  $K$ . Označimo jih z  $D_1, \dots, D_m$ . Zaporedje  $(f_n|_{D_1})$  je normalna družina, torej po Montelovem izreku dopušča podzaporedje  $(f_{n,1}|_{D_1})$ , ki konvergira enakomerno na  $\overline{D_1}$  k neki holomorfnii funkciji  $f_1 \in \mathcal{O}(D'_1)$ . Ker je  $f_1$  zvezna na  $\overline{D_1}$ , je omejena, torej je zaporedje  $(f_{n,1}|_{D_1})$  enakomerno omejeno na  $D_1$ . Nadaljujemo induktivno in na vsakem koraku dokažemo obstoj zaporedja  $\{f_{n,j+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots \subset \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ki konvergira enakomerno na  $\overline{D_{j+1}}$ , torej je enakomerno omejeno na uniji  $\overline{D_1} \cup \dots \cup \overline{D_{j+1}}$ . Po  $m$ -korakih dobimo podzaporedje  $\{f_{n,m}\} \subset \{f_n\}$ , enakomerno omejeno na  $K \subset \cup_{j=1}^m D_j \subset \cup_{j=1}^m \overline{D_j}$ . Po Montelovem izreku je  $\{f_{n,m}\}$  normalna družina, torej neko podzaporedje konvergira enakomerno na  $K$ .

Naj bo  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$  neko normalno izčrpanje za  $\Omega$ . Če je  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\mathcal{F}$ , lahko z zgornjim postopkom najdemo podzaporedje  $(f_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ , ki konvergira enakomerno na  $K_1$ . Nadaljujemo z indukcijo. Predpostavimo, da zaporedje  $(f_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira enakomerno na  $K_m$ . Z zgornjim postopkom lahko najdemo podzaporedje  $(f_{n,m+1}) \subset (f_{n,m})$ , ki konvergira enakomerno na  $K_{m+1}$ . Dobimo padajoče zaporedje zaporedij

$$(f_{n,1}) \supset (f_{n,2}) \supset \dots \supset (f_{n,m}) \supset \dots$$

ki konvergirajo enakomerno na množicah  $K_m$  iz izčrpanja. Sledi, da zaporedje  $(f_{n,n})$  konvergira enakomerno na poljubni množici  $K_m$ , torej konvergira enakomerno na kompaktnih v  $\Omega$ . Sledi, da je  $\mathcal{F}$  normalna družina.

*Boljši način:* Ker je  $\mathcal{F}|_D$  normalna, je enakomerno omejena na kompaktnih v  $D$ . Za vsak  $i = 1, \dots, m$  torej obstaja  $M_i$ , tak da je  $\|f\|_{D_i} \leq M_i$  za vse  $f \in \mathcal{F}$ , torej je  $\|f\|_K \leq \max_i \|f\|_{D_i} \leq \max_i M_i$ . Sledi, da je  $\mathcal{F}$  enakomerno omejena na  $K$ . Ker je bil  $K$  poljuben, je  $\mathcal{F}$  enakomerno omejena na kompaktnih v  $\Omega$ , torej je normalna po Montelovem izreku.

**Naloga 30.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  odprta množica in  $\mathcal{F}$  normalna družina holomorfnih funkcij na  $\Omega$ . Dokaži, da je tedaj tudi družina odvodov  $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$  normalna.

**Rešitev 30.** Po prejšnji nalogi je dovolj pokazati, da je  $\mathcal{F}'|_D$  normalna za poljuben disk  $D \subset \Omega$ . Naj bo  $K \subset D$  kompaktna množica. Tedaj obstaja  $r > 0$ , tako da je zaprt disk  $\overline{D}(z, r)$  vsebovan v  $D$  za poljuben  $z \in K$ . Ker je

$$\bigcup_{z \in K} \overline{D}(z, r) = K_r := \{z \in D : \text{dist}(z, K) \leq r\}$$

kompaktna množica v  $D$  in je  $\mathcal{F}$  enakomerno omejena na  $K_r$ , obstaja tak  $M \geq 0$ , da je  $\|f\|_{K_r} \leq M$  za vse  $f \in \mathcal{F}$ . Za poljuben  $z \in K$  velja po Cauchyjevi oceni:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r},$$

torej je  $\mathcal{F}'$  enakomerno omejena na  $K$ . Ker je bil  $K \subset D$  poljuben, je  $\mathcal{F}'$  enakomerno omejena na kompaktnih v  $D$ , torej je  $\mathcal{F}'|_D$  normalna družina po Montelovem izreku. Ker to velja za vse diske  $D \subset \Omega$ , je  $\mathcal{F}'$  normalna po prejšnji nalogi.

*Drug način:* Naj bo  $K' \subset \Omega$  kompaktna množica in naj bo  $K = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, K') \leq \varepsilon'\} \subsetneq \Omega$  kompaktna okolica za  $K'$  z neprazno notranjostjo. Tedaj poljubno zaporedje v  $\mathcal{F}$  vsebuje neko podzaporedje  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tako da konvergira  $f_n \rightarrow f$  enakomerno na  $K$ , torej za poljuben  $M > 0$  in za dovolj velike  $n$  velja  $|f(z) - f_n(z)| \leq M$  za vse  $z \in K$ . Ker je  $K'$  vsebovana v notranjosti  $K$ , za poljuben  $z \in K'$  obstaja nek disk  $D_z$  radija  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon'$  središčem v  $z$ , tako da je  $\overline{D}_z \subset \text{Int } K$ . Po Cauchyjevi oceni za  $f' - f'_n$  tedaj velja

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_z} \left| \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| d\zeta \leq \frac{M}{\varepsilon^2}.$$

Sledi, da zaporedje  $\{f'_n\}$  konvergira enakomerno na  $K'$  k funkciji  $f'$ . Ker je bila  $K'$  poljubna kompaktna množica, sledi, da je  $\mathcal{F}'$  normalna družina.

**Naloga 31.** Naj bo  $\mathcal{F}$  družina holomorfnih funkcij na domeni  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tako da je  $\mathcal{F}'$  normalna in je množica  $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$  omejena za nek  $a \in \Omega$ . Pokaži, da je tedaj tudi  $\mathcal{F}$  normalna.

**Rešitev 31.** Po eni od prejšnjih nalog je dovolj pokazati, da je  $\mathcal{F}|_D$  normalna za poljuben disk  $D$  v  $\Omega$ . Naj bo torej  $D \subset \Omega$  disk s središčem v  $z \in \Omega$ . Ker je  $f$  holomorfná, je  $\int_\gamma f'(\zeta)d\zeta = 0$  za poljubno sklenjeno krivuljo  $\gamma$  v  $\Omega$  ( $f'_n dz$  je eksaktna forma), torej je

$$f(z) = f(a) + \int_\eta f'(\zeta)d\zeta,$$

kjer je  $\eta$  poljubna krivulja v  $\Omega$ , ki zadošča  $\eta(0) = a$ ,  $\eta(1) = z$ . Sedaj fiksirajmo krivuljo  $\eta$ . Ker je  $\mathcal{F}'$  normalna, poljubno zaporedje funkcij v  $\mathcal{F}$  dopušča podzaporedje  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tako da zaporedje odvodov  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira enakomerno na kompaktnih v  $\Omega$  k neki holomorfní funkciji  $g \in \mathcal{O}(\Omega)$  in je zaporedje števil  $f_n(a)$  konvergentno. V posebnem je vsaka sklenjena krivulja  $\gamma$  v  $\Omega$  kompaktna, torej je

$$\left| \int_\gamma g(\zeta)d\zeta \right| \leq \int_\gamma |g(\zeta) - f'_n(\zeta)| \cdot |d\zeta| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sledi, da je s predpisom

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \int_a^z g(\zeta)d\zeta$$

dobro definirana holomorfná funkcija  $f$  na  $\Omega$ , pri čemer je integral na desni neodvisen od poti, ki povezuje točki  $a$  in  $z$ . V posebnem velja za  $z' \in D' \Subset D$ :

$$f(z') = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \int_\eta g(\zeta)d\zeta + \int_z^{z'} g(\zeta)d\zeta.$$

Pri tem v zadnjem členu vsote integriramo po daljici v  $D'$  s krajiščema  $z$  in  $z'$ . Ocenimo

$$|f(z') - f_m(z')| \leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) - f_m(a) \right| + \int_\eta |g(\zeta) - f'_m(\zeta)| \cdot |d\zeta| + \int_z^{z'} |g(\zeta) - f'_m(\zeta)| \cdot |d\zeta| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

saj zaporedje  $f'_n$  konvergira h  $g$  enakomerno na  $\overline{D'} \cup \eta([0, 1])$  za poljuben disk  $D' \Subset D$  s središčem v  $z$ . Ker je poljuben kompaktni  $K \subset D$  vsebovan v nekem takem disku  $D'$ , je zgornja konvergenca enakomerna na kompaktnih v  $D$ , torej je  $\mathcal{F}|_D$  normalna družina.

**Naloga 32.** Naj bo  $\Omega = \{|z + 1/2| < 1/2\}$ ,  $\omega = e^{2\pi i \alpha}$  in

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{z/n + \omega^n + 1}; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ugotovi, za katere parametre  $\alpha \in \mathbb{R}$  je družina  $\mathcal{F}$  normalna v  $\mathcal{O}(\Omega)$ . **Namig:** če je  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , je množica  $\{e^{2\pi i n \alpha}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gosta v  $S^1$ .

**Rešitev 32.** Opazimo, da družina  $\{n/z : n \in \mathbb{N}\}$  ni normalna, saj je vsako podzaporedje poljubnega zaporedja neomejeno na kompaktnih v  $\Omega$ , torej ne obstaja niti limita po točkah. Če je  $1 + \omega^n = 0$  za neskončno mnogo  $n$ ,  $\mathcal{F}$  ni normalna. To velja, če je  $e^{2\pi i \alpha}$  nek  $k$ -ti koren števila  $-1$ , torej je

$$e^{2\pi i k \alpha} = -1, \quad 2\pi i k \alpha = i\pi + 2im\pi, \quad \alpha = \frac{2m+1}{2k}.$$

Za poljuben takšen  $\alpha$ , kjer sta  $m, k \in \mathbb{Z}$ , torej  $\mathcal{F}$  ni normalna. Označimo množico vseh takšnih  $\alpha$  s  $P = \{p/q \in \mathbb{Q} : q = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/(2k)$ . Naj bo  $Q = \{p/q \in \mathbb{Q} : q = 2k+1, k \in \mathbb{N}\}$  množica okrajšanih ulomkov z lihimi imenovalci in naj bo  $\alpha = p/(2k+1) \in Q$ . Tedaj za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  velja:

$$\alpha n = \frac{np}{2k+1} = \frac{l(2k+1) + r}{2k+1} = l + \frac{r}{2k+1}$$

za nek  $l \in \mathbb{Z}$  ter  $r \in \mathbb{N}$ , ki ustreza  $r < 2k+1$ . Sledi

$$\exp(2\pi i n \alpha) = \exp\left(\frac{2\pi i r}{2k+1}\right).$$

Naj bo

$$\lambda = \min_{0 \leq r < 2k+1} \left| 1 + \exp \left( \frac{2\pi i r}{2k+1} \right) \right|.$$

Očitno je  $\lambda > 0$ . Sledi  $|1 + \omega^n| \geq \lambda > 0$  za vse  $n \in \mathbb{N}$ . Po drugi strani je za vse dovolj velike  $n$  in vse  $z \in \Omega$  tudi  $|z|/n < r < \lambda$ , torej je

$$|1 + \omega^n + z/n| \geq |1 + \omega^n| - \frac{|z|}{n} \geq \lambda - \frac{|z|}{n} > \lambda - r =: M > 0,$$

za vse  $z \in \Omega$ , torej je za dovolj velike  $n$ :

$$\frac{1}{z/n + \omega^n + 1} < \frac{1}{M}.$$

Sledi, da je družina  $\mathcal{F}$  enakomerno omejena, torej je normalna po Montelovem izreku. Opazimo, da je  $P \cup Q = \mathbb{Q}$ , torej moramo preveriti le še  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Ker je za poljuben takšen  $\alpha$  množica  $\{e^{2\pi i n \alpha}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gosta v  $S^1$ , obstaja zaporedje naravnih števil  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tako da velja

$$\exp(2\pi i n_k \alpha) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1.$$

Dokažimo, da zaporedje  $f_{n_k}$  nima konvergentnega podzaporedja. Izberimo zaporedje  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , tako da je  $|1 + \exp(2\pi i n_k \alpha)| < \varepsilon_k$ . Naj bo  $|z + 1/2| < 1/2$ . Tedaj je

$$|f_{n_k}(z)| = \frac{1}{|z/n_k + 1 + \omega^{n_k}|} \geq \frac{1}{|z|/n_k + \varepsilon_k} \rightarrow \infty,$$

ko gre  $k \rightarrow \infty$ . Poljubno podzaporedje zaporedja  $\{f_{n_k}\}$  torej divergira v točki  $z$ . Sledi, da družina  $\mathcal{F}$  ni normalna tudi za  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Naloga 33.** Naj bo  $\mathcal{F}$  razred preslikav  $f : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re z > 0\}$ , ki zadoščajo  $f(0) = 1$ . Pokaži, da je  $\mathcal{F}$  normalna družina. Ali lahko pogoj  $f(0) = 1$  izpustimo? Ali ga lahko zamenjamo s pogojem  $|f(0)| \leq 1$ ?

**Rešitev 33.** Naj bo  $\phi : \{\Re z > 0\} \rightarrow \mathbb{D}$  biholomorfna preslikava, podana s predpisom

$$\phi(z) = \frac{iz - i}{iz + i} = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Družina  $\phi \circ \mathcal{F}$  je torej vsebovana v množici preslikav  $\{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, f(0) = 0\}$ , ki je normalna družina, torej je normalna tudi  $\mathcal{F}$ . V odsotnosti pogoja  $\mathcal{F}$  vsebuje zaporedje funkcij  $f_n$ , za katere velja  $f_n(0) = n$ . Očitno zaporedje divergira, torej  $\mathcal{F}$  ni normalna družina.

**Opazimo:** zgornje zaporedje konvergira enakomerno k funkciji  $f \equiv \infty$ . **Posplošitev:** družina je *normalna\**, če vsako zaporedje dopušča podzaporedje, ki konvergira enakomerno k holomorfni funkciji ali k  $\infty$ . S to definicijo je družina  $\{f : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re z > 0\}\}$  normalna\*.

Preslikava  $\phi$  preslika območje  $H \cap \overline{D}$  na njegovo zrcalno sliko čez  $y$ -os. Na enak način kot zgoraj ugotovimo, da je  $\phi \circ \mathcal{F}$  normalna družina.

**Naloga 34** (Posplošitev Montelovega izreka). Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  domena in  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$  družina holomorfnih funkcij. Recimo, da obstaja odprta množica  $U \subset \mathbb{C}$ , ki jo zgrešijo vse  $f \in \mathcal{F}$ , tj.  $f(\Omega) \cap U = \emptyset$  za vse  $f \in \mathcal{F}$ . Dokaži, da je družina  $\mathcal{F}$  normalna\*.

**Rešitev 34.** Naj bo  $u \in U$  in definirajmo preslikavo  $\phi(z) = 1/(z - u)$ . Očitno je  $\phi \circ \mathcal{F}$  enakomerno omejena, saj je vsebovana v komplementu slike  $\phi(U)$ , ki predstavlja okolico za  $\infty \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Sledi, da je  $\phi \circ \mathcal{F}$  normalna družina. Po Hurwitzovem izreku vsako konvergentno zaporedje v  $\mathcal{F}$  konvergira bodisi k funkciji, ki je konstantno enaka 0, bodisi k funkciji brez ničel, saj  $\phi \circ f$  nima ničel za noben  $f \in \mathcal{F}$ . Ker je  $0 = \phi(\infty)$ , velja v primeru, da zaporedje konvergira enakomerno k  $\infty$ . V drugem primeru pa konvergira k  $\phi \circ f$ , kjer je  $f$  limitna funkcija zaporedja v  $\mathcal{F}$ , saj je  $\phi : \mathbb{C} \setminus \{u\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  biholomorfna.

### 3 Konformne preslikave in Riemannove ploskve

**Naloga 35.** Poišči biholomorfne preslikave med naslednjimi območji, kjer  $\mathbb{H}$  označuje polravnino  $\mathbb{H} = \{\Im z > 0\}$ :

- a)  $\mathbb{H}$  in  $\{e^{x+iy} \in \mathbb{C} : 0 < y < \pi/4\}$ ,
- b)  $\mathbb{H}$  in  $\{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < \pi\}$ ,
- c)  $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}$  in  $\{x + iy \in \mathbb{C} : x < 0, 0 < y < \pi\}$ .

**Rešitev 35.** Skica.

**Naloga 36.** Ali obstaja holomorfna surjekcija  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ?

**Rešitev 36.** Naj bo  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  biholomorfna preslikava diska na zgornjo polravnino. Nato uporabimo predpis  $H \ni z \mapsto (z - i)^2$ .

**Naloga 37.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  domena,  $0 \in \Omega$ . Naj bo  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  injektivna holomorfna preslikava,  $f(0) = 0$ . Predpostavi, da  $\Omega' = f(\Omega) \neq \mathbb{D}$ . Poišči injektivno holomorfno preslikavo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ , ki zadošča  $F(0) = 0$  in  $|F'(0)| > |f'(0)|$ .

**Rešitev 37.** Očitno je dovolj preveriti lastnosti  $F$  na povezani komponenti  $0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ , torej lahko predpostavimo, da je  $\Omega$  povezana. Po Riemannovem izreku je tedaj  $\mathbb{D} \cong \Omega$ . Naj bo  $\psi : \mathbb{D} \xrightarrow{\cong} \Omega$  biholomorfna preslikava,  $\psi(0) = 0$ . Po Schwarzovi lemi je tedaj

$$|(f \circ \psi)'(0)| = |f'(0)| \cdot |\psi'(0)| \leq 1$$

pri čemer velja  $|f'(0)| = 1/|\psi'(0)|$  natanko tedaj, ko je  $f \circ \psi$  rotacija okoli izhodišča. Ker  $f$  ni surjektivna, velja  $|f'(0)| < 1/|\psi'(0)|$ , torej preslikava  $F = \psi^{-1}$  ustreza želenim lastnostim.

*Poiščimo eksplicitno formulo za  $F$ :* Naj bo  $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \Omega'$  in naj bo  $\psi_\alpha = (\alpha - z)/(1 - \bar{\alpha}z)$  avtomorfizem diska, ki zamenja točki  $0$  in  $\alpha$ . Tedaj na  $\Omega'' := \psi_\alpha(\Omega')$  obstaja holomorfen kvadratni koren  $g : \Omega'' \rightarrow \mathbb{C}$ , saj je  $\Omega''$  enostavno povezana in ne vsebuje ničle (dvig enostavno povezane domene v krov). Naj bo  $F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$ . Tedaj je

$$F'(0) = \psi'_{g(\alpha)}(\sqrt{\alpha})g'(\alpha)\psi'_\alpha(0)f'(0) = -\frac{1-|\alpha|}{(1-|\alpha|)^2} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (|\alpha|^2 - 1) f'(0) = \frac{1+|\alpha|}{2\sqrt{\alpha}} f'(0).$$

Sledi  $|F'(0)| = \delta(|\alpha|)|f'(0)|$ , kjer je  $\delta(x) = (1+x)/(2\sqrt{x})$ . Zanima nas vrednost  $\delta(x)$  za  $0 < x < 1$ . Odvajamo in dobimo

$$\delta'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{2x - (1+x)}{4x^{3/2}} = \frac{x-1}{4x^{3/2}}.$$

Funkcija  $\delta$  je torej padajoča na  $(0, 1)$ . Ker je  $\delta(1) = \lim_{x \uparrow 1} \delta(x) = 1$ , sledi, da je  $\delta(x) > 1$  za vse  $0 < x < 1$ , torej je  $|F'(0)| > |f'(0)|$ . Ker je  $g : \Omega'' \rightarrow \mathbb{C}$  injektivna funkcija, je  $F$  injektivna.

**Naloga 38.** Naj bosta  $\omega_1$  in  $\omega_2$  kompleksni števili, ki sta linearno neodvisni kot vektorja v  $\mathbb{R}^2$ . Naj bo  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ . Na  $\mathbb{C}$  definiramo ekvivalenčno relacijo s predpisom

$$z_1 \sim z_2 \quad \text{natanko tedaj, ko velja} \quad z_1 - z_2 \in \Gamma.$$

Množico ekvivalenčnih razredov označimo z  $\mathbb{C}/\Gamma$  in jo opremimo s kvocientno topologijo, tako da je projekcija  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  zvezna.

- a) Pokaži, da je  $\mathbb{C}/\Gamma$  kompakten prostor.
- b) Pokaži, da je kvocientna projekcija  $\pi$  odprta.
- c) Naj bo  $V \subset \mathbb{C}$  odprta množica, ki seka vsak ekvivalenčni razred največ v eni točki. Pokaži, da je  $\pi(V)$  odprta in je  $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V) =: U$  homeomorfizem. Inverz  $\varphi = (\pi|_V)^{-1}$  je kompleksna karta na  $\mathbb{C}/\Gamma$ .
- d) Pokaži, da je množica  $\mathcal{U}$  vseh takšnih kart  $(U, \varphi)$  kompleksen atlas na  $\mathbb{C}/\Gamma$ .

**Rešitev 38.** a) Opazimo, da je  $\pi(\mathbb{C}) = \pi(K)$ , kjer je  $K$  paralelogram  $K = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}$ , torej je  $\mathbb{C}/\Gamma = \pi(\mathbb{C}) = \pi(K)$  kompaktna.

- b) Naj bo  $W \subset \mathbb{C}$  odprta množica. Njena slika  $\pi(W)$  je po definiciji kvocientne topologije odprta natanko tedaj, ko je odprto njeno *nasičenje*  $\pi^{-1}(\pi(W))$ . Množica

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{w \in W} (w + \Gamma) = \bigcup_{g \in \Gamma} (g + W),$$

je odprta, torej je  $\pi(W)$  odprta v  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Sledi, da je  $\pi$  odprta preslikava.

- c) Iz pogoja na  $V$  sledi, da je  $\pi|_V$  injektivna, torej je homeomorfizem na množico  $\pi(V)$ .
- d) Naj bosta  $(U_1, \varphi_1)$  in  $(U_2, \varphi_2)$  dve karti na  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Preveriti moramo, da je preslikava  $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  biholomorfna kot preslikava  $\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ . Očitno je injektivna, saj je kompozicija homeomorfizmov, torej zadošča preveriti, da je holomorfna. Iz konstrukcije sledi, da obstajata odprti množici  $V_1, V_2$  v  $\mathbb{C}$ , tako da je  $\varphi_i = (\pi|_{V_i})^{-1}$  za  $i = 1, 2$ , torej je

$$\varphi_{12} = (\pi|_{V_2})^{-1} \circ \pi|_{V_1}.$$

Za poljuben  $z$  je torej  $\varphi_{12}(z) - z \in \Gamma$ . Funkcija  $z \mapsto \varphi_{12}(z) - z$  je očitno zvezna, ker ima vrednosti v diskretni množici je lokalno konstantna, torej je v posebnem konstantna na vsaki komponenti za povezanost množice  $\varphi_{12}(U_1 \cap U_2)$ . Sledi, da je  $\varphi_{12}$  holomorfna, kar smo želeli dokazati.

## 4 Meromorfne funkcije in Riemannova sfera

Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  domena v  $\mathbb{C}$ . Pravimo, da je funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  *meromorfna na  $\Omega$* , če obstaja diskretna množica točk  $\{a_j\} =: A \subset \Omega$ , tako da je zožitev  $f|_{\Omega \setminus A} : \Omega \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfn in za vse  $a \in A$  velja  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . Točke  $a$  so *poli funkcije  $f$* .

Množico  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \mathbb{CP}^1$  opremimo s topologijo kot kompaktifikacijo z eno točko kompleksne ravnine  $\mathbb{C}$ . Množica  $U \subset \mathbb{CP}^1$  je odprta, če velja bodisi  $U \subset \mathbb{C}$  in je  $U$  odprta v  $\mathbb{C}$  bodisi je  $\infty \in U$  ter je množica  $\mathbb{C} \setminus U$  kompaktna. Na  $\mathbb{CP}^1$  uvedemo pokritje  $\{U_1, U_2\}$ , kjer je  $U_1 = \mathbb{C}$  in  $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \infty$  ter preslikavi  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z$  in  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto 1/z$ . Preslikavo  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : z \mapsto 1/z$  imenujemo *prehodna preslikava*. Tako definiranimu pokritju in preslikavam pravimo *atlas* na  $\mathbb{CP}^1$ , ki množico  $\mathbb{CP}^1$  opremi s strukturo *Riemannove ploskve*, tj. enorazsežne kompleksne mnogoterosti. Preslikava  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  je *holomorfn*, če sta holomorfn preslikavi  $f \circ \varphi_{1,2}^{-1}$ . Preslikava  $f : \mathbb{C} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{CP}^1$  je *holomorfn* v točki  $a \in \Omega$ , če je  $f(a) \in U_{1,2}$  in je preslikava  $\varphi_{1,2} \circ f$  dobro definirana ter holomorfn na neki okolici točke  $a$ . Preslikava  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{CP}^1$  je holomorfn, če je holomorfn v vsaki točki  $a \in \Omega$ .

**Naloga 39.** Dokaži, da je  $\mathbb{CP}^1$  s topologijo, definirano kot zgoraj, kompaktna.

**Rešitev 39.** Naj bo  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in \Lambda}$  odprto pokritje prostora  $\mathbb{CP}^1$ . Tedaj obstaja nek  $j = j_0$ , tako da  $U_0 = U_{j_0}$  vsebuje  $\infty$ . Ker je  $U_0$  odprta, je  $K = \mathbb{CP}^1 \setminus U_0$  kompaktna po definiciji topologije na  $\mathbb{CP}^1$ , torej obstaja končno mnogo  $U_j \in \mathcal{U} \setminus \{U_0\}$  ki pokrijejo  $K$ . Označimo jih z  $U_1, \dots, U_n$ . Tedaj pa je  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$  iskano končno podpokritje.

**Naloga 40.** Naj bo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  domena in naj bo  $f$  meromorfna funkcija na  $\Omega$ . Če je  $p$  pol funkcije  $f$ , definiramo  $f(p) := \infty$ . Pokaži, da je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{CP}^1$  holomorfn funkcija.

**Rešitev 40.** Recimo, da  $a$  ni pol funkcije  $f$ . Tedaj je  $\varphi_1 \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfn na okolici  $a$ . Če je  $a$  pol funkcije  $f$ , velja  $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ , torej je funkcija  $\varphi_2 \circ f(z) = 1/f(z)$  omejena na neki punktirani okolici  $U^*$  točke  $a$ . Sledi, da ima  $\varphi_2 \circ f$  odpravljivo singularnost v  $a$ , tj. kompozitum se holomorfn razširi na  $U$ , torej je  $\varphi_2 \circ f$  holomorfn v točki  $a$ . Ker je bila  $a$  poljubna točka, je  $f$  holomorfn na  $\Omega$ .

**Naloga 41.** Dokaži obrat zgornje trditve: če je  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{CP}^1$  holomorfn na povezani domeni  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , je bodisi  $f \equiv \infty$  bodisi je  $f$  meromorfna funkcija na  $\Omega$ .

**Rešitev 41.** Recimo, da obstaja  $a \in \Omega$ ,  $|f(a)| < \infty$ . Opazimo, da je množica polov  $A$  funkcije  $f$  ravno množica ničel holomorfne funkcije  $\varphi_2 \circ f$ , torej je  $A$  diskretna množica po principu identičnosti. Tedaj pa iz definicij sledi, da je  $(\varphi_1 \circ f)|_{\Omega \setminus A} = f|_{\Omega \setminus A}$  holomorfn funkcija. Sledi, da je  $f$  meromorfna.

**Naloga 42.** Naj bo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  prava holomorfn preslikava. Pokaži, da je  $f$  polinom. Sklepaj, da grupa avtomorfizmov kompleksne ravnine  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  sestoji iz linearnih funkcij.

**Rešitev 42.** Taylorjeva vrsta funkcije  $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  konvergira na  $\mathbb{C}$ , zato lahko zapišemo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

in definiramo funkcijo  $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  s predpisom

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Naj bo  $a \in \mathbb{C}$ . Ker je  $f$  prava, je množica  $f^{-1}(a)$  kompaktna in diskretna po principu identičnosti, torej je  $f^{-1}(a)$  končna množica točk za vse  $a \in \mathbb{C}$ . Recimo, da je  $a_k = 0$  za neskončno mnogo  $k \in \mathbb{N}$ . Tedaj ima  $g$  bistveno singularnost v izhodišču, torej po prejšnji nalogi obstaja nek  $a_0 \in \mathbb{C}$ , tako da je  $\mathbb{C} \setminus \{a_0\} \subset g(U^*)$  za poljubno okolico izhodišča  $U$ , kar je v nasprotju z opažanjem, da ima  $f$  končna vlakna za poljuben  $a \in \mathbb{C}$ . Sledi, da je  $f$  polinom.

Če je  $f$  avtomorfizem, je prava preslikava, torej je polinom. Ker je injektiven, ima eno samo ničlo, torej je linearna funkcija. Očitno so vse nekonstantne linearne funkcije avtomorfizmi, torej velja

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

**Naloga 43.** Pokaži, da ne obstaja prava holomorfn preslikava  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ . **Namig:** predpostavi, da obstaja prava holomorfn preslikava  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , pokaži, da velja  $g(z) \rightarrow \infty$ , ko gre  $z \rightarrow \mathbb{R}$ . Nato uporabi Schwarzov princip zrcaljenja na ustrezni funkciji  $G$ , ki jo konstruiraj s pomočjo  $g$ .

**Rešitev 43.** Ker je  $g$  prava, velja  $g(z) \rightarrow \infty$ , ko gre  $z \rightarrow \mathbb{R} = b\mathbb{H}$ , ter je njena množica ničel  $g^{-1}(0)$  končna množica v  $\mathbb{H}$ . Sledi, da obstaja  $x \in \mathbb{R}$  ter disk  $D$  s središčem v  $x$ , tako da  $g$  nima ničel na  $D \cap \mathbb{H}$ . Naj bo sedaj funkcija  $G : D \cap \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  podana s predpisom  $G(z) = 1/g(z)$ . Ker  $g$  nima ničel na  $D$ , je  $G$  dobro definirana. Ker gre  $g(z) \rightarrow \infty$ , ko gre  $z \rightarrow \mathbb{R}$ , gre  $G(z) \rightarrow 0$ , ko gre  $z \rightarrow \mathbb{R}$ . Sledi, da se  $G$  zvezno razširi na  $D \cap (\mathbb{H} \cup \mathbb{R})$ . Ker ima  $G$  realne vrednosti vzdolž  $\mathbb{R}$ , se po Schwarzovem principu zrcaljenja holomorfno razširi na  $D$ . Ker je  $D \cap \mathbb{R}$  množica s stekališčem, je  $G \equiv 0$  po principu identičnosti, kar je v nasprotju z definicijo  $G = 1/g$ , saj ima  $g$  končne vrednosti na  $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ . Sledi, da  $g$  ni prava. Ker je  $\mathbb{H}$  biholomorfno ekvivalentna disku  $\mathbb{D}$ , nobena holomorfna preslikava  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ni prava.

**Naloga 44.** Avtomorfizmi kompleksne ravnine so preslikave  $z \mapsto az + b$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$ .

- Kateri avtomorfizmi  $\mathbb{C}$  nimajo negibnih točk?
- Naj bodo  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$  kompleksna števila, ki so  $\mathbb{Z}$ -linearne neodvisne. Z drugimi besedami, če velja  $a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3 = 0$  za neka cela števila  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , potem velja  $a = b = c = 0$ . Pokaži, da ima množica  $\mathbb{Z}$ -linearnih kombinacij števil  $\omega_i$  stekališče v  $\mathbb{C}$ . **Namig:** uporabi Dirichletov aproksimacijski izrek: za vsak nabor števil  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  ter poljuben  $n \in \mathbb{N}$  obstajajo racionalna števila  $p_1/q, \dots, p_k/q \in \mathbb{R}$ ,  $q \leq n^k$ , tako da velja  $|qx_j - p_j| < 1/n$  za vse  $k \in \{1, \dots, k\}$ .
- Pokaži, da je vsaka podgrupa  $G \leq \text{Aut}(\mathbb{C})$  grupe avtomorfizmov  $\mathbb{C}$ , ki deluje na  $\mathbb{C}$  diskretno (orbite so diskretne množice) in brez negibnih točk, oblike  $G = \{\text{Id}\}$ ,  $G = \langle z \mapsto z + \omega_1 \rangle$  ali  $G = \langle z \mapsto z + \omega_1, z \mapsto z + \omega_2 \rangle$  za neki kompleksni števili  $\omega_{1,2}$ . **Namig:** dokaži, da je orbita  $G \cdot 0$  točke 0 zaprta diskretna množica v  $\mathbb{C}$ !

**Rešitev 44.** a) Rešimo enačbo  $az + b = z$  in dobimo  $z = b/(1 - a)$ . Sledi, da avtomorfizem nima negibnih točk natanko tedaj, ko je  $a = 1$  in  $b \neq 0$ .

- Naj bo  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \oplus \mathbb{Z}\omega_3$ . Vektorji  $\omega_i$  so  $\mathbb{R}$ -linearne odvisni v  $\mathbb{C}$ , torej za neka  $a, b \in \mathbb{R}$  velja

$$\omega_3 = a\omega_1 + b\omega_2.$$

Po Dirichletovem izreku obstajata zaporedji  $a_n/q_n \rightarrow a$ ,  $b_n/q_n \rightarrow b$ , ki zadoščata

$$|q_n a - a_n| < \frac{1}{n}, \quad |q_n b - b_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Sledi

$$a_n \omega_1 + b_n \omega_2 - q_n \omega_3 = (a_n - q_n a) \omega_1 + (b_n - q_n b) \omega_2 < \frac{1}{n} (\omega_1 + \omega_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

torej je 0 stekališče množice  $\Gamma$ .

- Ker  $G$  deluje na  $\mathbb{C}$  brez negibnih točk, je vsak  $g \in G$  oblike  $z \mapsto z + b$  za nek  $b \in \mathbb{C}$  po točki a). Naj bo  $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathbb{C})$  podgrupa vseh takšnih avtomorfizmov in definiramo preslikavo  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(\gamma) = \gamma(0)$ . Očitno je  $\Phi$  homomorfizem grup. Naj bo  $G \subset \Gamma$  neka diskretna podgrupa. Tedaj je  $\Phi|_G$  bijektivna, torej je  $\Phi : G \rightarrow \Phi(G)$  izomorfizem grup. Sledi, da lahko  $G$  identificiramo z neko diskretno podgrupo v  $(\mathbb{C}, +)$ .

Pokažimo, da je  $G$  zaprta. Naj bo  $U$  okolica točke  $0 \in G$  v  $V$ , tako da velja  $U \cap G = \{0\}$ . Naj bo  $U' \subset U$  neka manjša okolica točke 0 v  $V$ , tako da velja  $x - y \in U$  za poljubna  $x, y \in U'$ . Takšna okolica obstaja, ker so grupne operacije zvezne. Naj bo sedaj  $x \in \overline{G}$  in naj bo  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $G$ , ki konvergira k  $x$ . Tedaj je za vse dovolj velike  $n$  element  $x$  vsebovan v množici  $x_n + U'$ , torej je  $x - x_n \in U'$  za vse dovolj velike  $n$ . Če je še  $m$  dovolj velik je torej  $x_n - x_m = (x - x_m) - (x - x_n) \in U' - U' \subset U$ . Ker je poleg tega  $x_n - x_m \in G$  in velja  $G \cap U = \{0\}$ , sledi  $x_n = x_m$  za vse dovolj velike  $m, n$ , torej je  $x = x_n \in G$ .

Ker je  $G$  diskretna zaprta množica v  $\mathbb{C}$ , nima stekališč, torej ima po prejšnji nalogi največ dva  $\mathbb{Z}$ -linearne neodvisne generatorja. Recimo, da je  $G = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  in velja  $\omega_2 = \lambda \omega_1$  za nek  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Po Dirichletovem izreku lahko  $\lambda$  aproksimiramo z zaporedjem racionalnih števil  $p_n/q_n$ , tako da velja  $|q_n \lambda - p_n| < 1/n$ , torej velja

$$p_n \omega_1 - q_n \omega_2 = p_n \omega_1 - q_n \lambda \omega_1 = (p_n - \lambda q_n) \omega_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ker je  $G$  zaprta diskretna množica v  $\mathbb{C}$ , sledi  $(p_n - \lambda q_n) \omega_1 = 0$  za vse dovolj velike  $n$ , torej je  $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$ . Sledi  $G = \langle (1/q) \omega_1 \rangle$ .

**Naloga 45.** Pokaži, da je vsaka holomorfná funkcija  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  konstantna.

**Rešitev 45.** Ker je  $\mathbb{CP}^1$  kompaktna, je  $f(\mathbb{CP}^1) \subset \mathbb{C}$  kompaktna množica v kompleksni ravnini. Tedaj pa je  $f \circ \varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  omejena holomorfná funkcija, torej je konstantna po Liouvilleovem izreku. Naj bo  $f|_{U_1} \equiv c$ . Ker je  $f$  zvezna, je tudi  $f(\infty) = c$ , torej je  $f \equiv c$ .

**Naloga 46.** Naj bo  $n \geq 1$  in  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ . Pokaži, da je polinom  $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$  meromorfná funkcija na  $\mathbb{CP}^1$ . **Opomba:** funkcija  $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  je meromorfná, če je holomorfná na komplementu neke diskretne množice, kjer ima pole.

**Rešitev 46.** Naj  $p(z)$  označuje zgornji polinom. Očitno je  $p|_{U_1} = p|_{\mathbb{C}}$  holomorfná funkcija. Na  $U_2$  pa imamo

$$(p \circ \varphi_2^{-1})(z) = p\left(\frac{1}{z}\right) = c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{1}{z^n},$$

torej ima  $p$  pol  $n$ -te stopnje v  $\varphi_2^{-1}(0) = \infty$ .

**Naloga 47.** Naj bo  $a \in \Omega$  singularnost holomorfné funkcije  $f : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$  in recimo, da obstajata odprta množica  $U \subset \mathbb{C}$  in odprta okolica  $V \subset \Omega$  točke  $a$ , tako da velja  $f(V) \subset \mathbb{C} \setminus U$ . Pokaži, da je tedaj  $a$  bodisi odpravljiva singularnost bodisi pol funkcije  $f$ .

**Rešitev 47.** Definirajmo funkcijo  $g(z) = 1/(f(z) - b)$ , kjer je  $b \in U$  poljubna točka. Tedaj je  $g$  omejena na okolici točke  $a$ , torej ima po Riemannovem izreku odpravljivo singularnost v  $a$  ter se holomorfnó razširi na  $V$ . Če je  $g(a) \neq 0$ , je  $a$  odpravljiva singularnost funkcije  $f$ . Če pa je  $g(a) = 0$ , potem velja  $g(z) = (z - a)^k h(z)$ , kjer je  $h$  holomorfná funkcija brez ničel, na neki okolici točke  $a$ , saj  $g$  ni identično enaka nič. Sledi

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)} = b + \frac{\tilde{h}(z)}{(z - a)^k},$$

torej je  $a$  pol funkcije  $f$ .

## 5 Izreki Koebeja, Landaua in Picarda

**Izrek 2** (Koebe). Naj bo  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  injektivna holomorfná funkcija. Tedaj je  $D(f(0), 1/4) \subset f(\mathbb{D})$ .

**Naloga 48.** Naj bo  $f(z) = (e^{5z} - 1)/5$ . Pokaži, da  $f$  izpusti vrednost  $-1/5$ . Zakaj to ni v nasprotju s Koebejevim izrekom?

**Rešitev 48.** Poskusimo rešiti enačbo  $f(z) = -1/5$ . Dobimo  $e^{5z} = 0$ , ta enačba pa očitno nima rešitve. To ni v nasprotju s Koebejevim izrekom, saj  $f$  ni injektivna na  $\mathbb{D}$ .

**Naloga 49.** Naj bo  $G$  enostavno povezano območje,  $a \in G$  ter  $f : G \rightarrow \mathbb{D}$  enolično določena biholomorfná preslikava, ki ustreza  $f(a) = 0$  in  $f'(a) > 0$ . Pokaži, da velja

$$\frac{1}{4 \operatorname{dist}(a, bG)} \leq f'(a) \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(a, bG)}.$$

**Rešitev 49.** Označimo

$$R = \operatorname{dist}(a, bG) = \sup\{r > 0 : \mathbb{D}(a, r) \subset G\}.$$

Dokažimo najprej neenakost na desni. Preslikava  $\tilde{f} : z \mapsto f(a + Rz)$  je holomorfná preslikava  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , torej velja po Schwarzovi lemi

$$R|f'(a)| = |\tilde{f}'(0)| \leq 1.$$

Ker je  $f'(a) > 0$ , neenakost sledi. Pokažimo še drugo neenakost. Ker je  $f$  biholomorfná, ima holomorfen inverz  $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow G$ , ki ustreza lastnosti

$$f^{-1}(0) = \frac{1}{f'(0)} > 0.$$

Naj bo  $h(z) = f'(0) \cdot f^{-1}(z) - a$ . Tedaj je  $h$  preslikava  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  razreda  $\mathcal{S}$ , torej po Koebejevim izreku velja  $\mathbb{D}(0, 1/4) \subset h(\mathbb{D})$ . Sledi  $\mathbb{D}(a, 1/4) \subset h(\mathbb{D}) + a$ ,  $\mathbb{D}(a, 1/(4f'(0))) \subset f^{-1}(\mathbb{D})$ , torej je  $1/(4f'(0)) \leq R$ .

**Naloga 50.** Naj bo  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija razreda  $\mathcal{S}$ , za katero so vsi koeficienti v Taylorjevem razvoju okoli  $z = 0$  realni, tj.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Fiksirajmo  $0 < r < 1$  in definirajmo funkcijo  $g$  na  $[-\pi, \pi]$  s predpisom

$$g(\theta) = \frac{1}{2i}(f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta})) \sin \theta.$$

a) Pokaži, da je  $g$  soda in da so edine njene ničle v točkah  $-\pi, 0, \pi$ .

b) Pokaži, da je  $\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = \pi r$ . Sklepaj, da velja  $g \geq 0$ .

c) Naj bo  $n \geq 2$ . Pokaži, da velja

$$0 \leq \frac{2}{\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)(1 \pm \cos(n\theta)) d\theta = 2 \pm \left(a_{n+1} - \frac{a_{n-1}}{r^2}\right) r^n.$$

d) S pomočjo c) sklepaj, da velja  $|a_{n+1} - a_{n-1}| \leq 2$  za vse  $n \geq 2$ .

e) Dokaži, da velja  $|a_n| \leq n$  za vse  $n \geq 1$ . To je ravno Bieberbachova domneva za funkcije, ki so realne na realni osi. Trditev je dokazal Dieudonné leta 1931.

**Rešitev 50.** a) Velja

$$g(-\theta) = (f(re^{-i\theta}) - f(re^{i\theta})) \sin(-\theta) = (f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta})) \sin \theta = g(\theta).$$

Očitno velja  $g(\theta) = 0$  natanko tedaj, ko je bodisi  $\sin \theta = 0$  bodisi  $f(re^{i\theta}) = f(re^{-i\theta})$ . Ker je  $f$  injektivna, je  $g(\theta) = 0$  natanko tedaj, ko je  $\sin(\theta) = 0$ .

b) Naj bo  $z = re^{i\theta}$ . Ker ima  $f$  realne Taylorjeve koeficiente, velja  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ , torej je

$$g(\theta) = \frac{1}{2i}(f(z) - f(\bar{z})) \sin \theta = \Im f(z) \sin \theta.$$

Razvijemo  $f$  v Taylorjevo vrsto v okolici izhodišča in dobimo

$$\Im f(z) = \Im (re^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + \dots) = r \sin \theta + a_2 r^2 \sin(2\theta) + \dots$$

Sledi

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_k r^k \sin(k\theta) \sin \theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} r \sin^2 \theta d\theta = \pi r.$$

Sledi, da obstaja  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , tako da je  $g(\theta) \geq 0$ . Ker je  $g$  soda, obstaja tak  $\theta$  na intervalu  $(0, \pi)$ . Recimo, da je  $g(\theta') < 0$  za nek  $\theta' \in (0, \pi)$ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo  $\theta' < \theta$ . Ker je  $g$  zvezna, ima ničlo na  $(\theta', \theta)$ . To je protislovje, saj so edine ničle funkcije  $g$  točke  $-\pi, 0$  in  $\pi$ . Sledi  $g \geq 0$ .

c) Na enak način kot zgoraj vidimo, da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_k r^k \sin(k\theta) \sin(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k I_{k,n}.$$

Iz adicijskih formul

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

izračunamo

$$I_{k,n} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(k\theta) \sin((n+1)\theta) - \sin(k\theta) \sin((n-1)\theta)) d\theta$$

Označimo

$$I_{k,n} = I_{k,n}^+ - I_{k,n}^-.$$

Očitno je  $I_{k,n}^+ = \pi/2$ , ko je  $k = n+1$  in 0 sicer, podobno pa tudi  $I_{k,n}^- = \pi/2$ , ko je  $k = n-1$  in 0 sicer. Sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k I_{k,n} = \frac{\pi}{2} (a_{n+1} r^{n+1} - a_{n-1} r^{n-1}),$$

torej je

$$\frac{2}{\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) (1 \pm \cos(n\theta)) d\theta = 2 \pm (a_{n+1} r^n - a_{n-1} r^{n-2}) = 2 \pm \left( a_{n+1} - \frac{a_{n-1}}{r^2} \right) r^n.$$

Ker sta funkciji  $1 \pm \cos(n\theta)$  sodi in nenegativni ter je  $g$  tudi sama soda in nenegativna, je integrand povsod večji od 0, torej je tudi integral nenegativen, kar dokazuje željeno.

d) Vemo, da za poljuben  $0 < r < 1$  velja

$$0 \leq 2 \pm \left( a_{n+1} - \frac{a_{n-1}}{r^2} \right) r^n.$$

Ko pošljemo  $r \rightarrow 1$  dobimo v limiti  $2 - (a_{n+1} - a_{n-1}) \geq 0$ , torej je  $a_{n+1} - a_{n-1} \leq 2$  za vse  $n \geq 2$ . Podobno dobimo  $2 + (a_{n+1} - a_{n-1}) \geq 2$ , kar skupaj s prejšnjim rezultatom da

$$|a_{n+1} - a_{n-1}| \leq 2.$$

e) Dokazujemo z indukcijo. Ker je  $f \in \mathcal{S}$ , velja  $|f'(0)| = 1 \leq 1$ . Recimo, da je  $|a_n| = |f^{(n)}(0)|/n! \leq n$  za vse  $n \leq m$ . Tedaj je

$$|a_{m+1}| \leq |a_{m-1}| + |a_{m+1} - a_{m-1}| \leq m-1 + 2 = m+1$$

po točki d), kar dokazuje induksijski korak.

**Naloga 51.** Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Pokaži, da za vse  $c \in \mathbb{C}^*$  obstaja neskončno mnogo  $z \in \mathbb{C}$ , tako da velja

$$e^{1/z} = c \quad \text{in} \quad 0 < |z| < \varepsilon.$$

**Rešitev 51.** Zapišimo  $c$  v polarnih koordinatah kot  $c = (r, \varphi)$  in naj bo  $z = x + iy$ . Veljati mora

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \exp\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \exp\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \exp\left(-i \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = (r, \varphi + 2ik\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sledi

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \log r =: \tilde{r} \quad \text{in} \quad \frac{-y}{x^2 + y^2} = \varphi + 2ik\pi =: \tilde{\varphi}.$$

Iz obeh enačb izrazimo  $x^2 + y^2$  in dobimo

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{\tilde{r}} = \frac{-y}{\tilde{\varphi}}, \quad \frac{x}{y} = -\frac{\tilde{r}}{\tilde{\varphi}},$$

torej je

$$x^2 + y^2 = y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = y^2 \left(1 + \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{\varphi}^2}\right) = -\frac{y}{\tilde{\varphi}}.$$

Množimo z  $\tilde{\varphi}^2$  in dobimo

$$y^2(\tilde{r}^2 + \tilde{\varphi}^2) + y\tilde{\varphi} = 0.$$

V primeru, ko je  $c \in \mathbb{R}$ , je  $y = 0$  rešitev zgornje enačbe, sicer pa lahko delimo z  $y \neq 0$  in dobimo

$$y = -\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{r}^2 + \tilde{\varphi}^2} \quad \text{ter} \quad x = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + \tilde{\varphi}^2}.$$

Spomnimo se, da je  $\tilde{\varphi} = \varphi + 2ik\pi$ , torej gresta oba zgornja izraza proti 0, ko pošljemo  $k \rightarrow \pm\infty$ . Z drugimi besedami, za poljubna fiksna  $r, \varphi$  obstaja rešitev enačbe  $e^{1/z} = c = (r, \varphi)$  poljubno blizu izhodišča.

**Naloga 52.** Naj bo  $f : \mathbb{D}(0, 2)^* \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná preslikava, ki ne zavzame vrednosti 0 in 1. Dokaži, da ima bodisi  $f$  bodisi  $1/f$  odpravljlivo singularnost v 0. **Namig:** oglej si družino  $f(z/2^n)$  in uporabi dejstvo, da je družina  $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$  normalna, kjer je  $\Omega = A(0; 1/2, 2)$ .

**Rešitev 52.** Naj bo  $f_n(z) = f(z/2^n)$  za  $z \in A = A(0; 1/2, 2)$ . Ker je  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(A, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ , je  $\mathcal{F}$  normalna družina, torej neko podzaporedje  $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$  konvergira enakomerno na kompaktnih v  $A = A(0; 1/2, 2)$  bodisi k  $\infty$  bodisi k holomorfní funkciji  $f \in \mathcal{O}(A(0; 1/2, 2))$ . V prvem primeru velja  $1/f_{n_k} \rightarrow 0$  enakomerno na  $A$ . Za dovolj velike  $k$  je torej  $|f| < \varepsilon$  na kolobarju  $A(0; 1/2^{n_k+1}, 1/2^{n_k-1})$ , v posebnem je  $1/|f| < \varepsilon$  na krožnici  $\{|z| = 1/2^{n_k}\}$ . Ker je  $f$  holomorfná na neki okolici kolobarja  $A(0; 1/2^{n_k+1}, 1/2^{n_k})$  in po predpostavki  $f$  nima ničel na  $\mathbb{D}(0, 2)^*$ , je na tem kolobarju holomorfná tudi  $1/f$ . Po principu maksimuma je torej  $1/|f| < \varepsilon$  na  $A(0; 1/2^{n_k+1}, 1/2^{n_k})$ . Sledi, da konvergira  $1/f(z) \rightarrow 0$ , ko gre  $z \rightarrow 0$ , torej je  $f$  omejena na okolici izhodišča in ima po Riemannovem izreku odpravljlivo singularnost v izhodišču. V drugem primeru pa je družina  $\mathcal{F}' = \{f_{n_k}\}$  enakomerno omejena na kompaktnih v  $A(0; 1/2, 2)$ , torej je enakomerno omejena na  $b\mathbb{D} = \{|z| = 1\} \subset A(0; 1/2, 2)$ . Naj bo  $M$  takšen, da velja  $|f_{n_k}|_{b\mathbb{D}} \leq M$ . Tedaj velja za poljuben  $k \in \mathbb{N}$ :

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{za vse } z \in b\mathbb{D}(0, 1/2^{n_k+1}) \cup bD(0, 1/2^{n_k}) = bA(0; 1/2^{n_k+1}, 1/2^{n_k}).$$

Po principu maksimuma je  $|f(z)| \leq M$  za vse  $z \in A(0; 1/2^{n_k+1}, 1/2^{n_k})$ . Ker je bil  $k$  poljuben, sledi  $\|f\| \leq M$  na  $\mathbb{D}(0, 2)^*$ , torej ima  $f$  po Riemannovem izreku odpravljlivo singularnost v 0.

**Naloga 53** (Veliki Picardov izrek). Pokaži, da holomorfná funkcija v poljubni okolici bistvene singularnost zavzame vse kompleksne vrednosti z izjemo največ ene, ki je neodvisna od okolice.

**Rešitev 53.** Naj bo  $f : U^* \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfná na neki punktirani okolici  $U$  točke  $a$ . Recimo, da obstajata  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ , tako da je  $f(U^*) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ . Z zamenjavo koordinat lahko predpostavimo  $U = \mathbb{D}(0, 2)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ . Po prejšnji nalogi ima tedaj bodisi  $f$  bodisi  $1/f$  odpravljlivo singularnost. Če velja prvi primer, je izrek dokazan, v drugem primeru pa se  $1/f$  holomorfnó razširi na  $\mathbb{D}(0, 2)$ . Iz prejšnje naloge je razvidno, da v tem primeru velja  $|f(z)| \rightarrow \infty$ , ko gre  $z \rightarrow 0$ , torej je  $f$  meromorfná funkcija.

**Izrek 3** (Landau). Naj bo  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfna funkcija, ki zadošča  $f'(0) = 1$  in  $(1 - |z|)|f'(z)| \rightarrow 0$ , ko gre  $|z| \rightarrow 1$ . Tedaj slika  $f(\mathbb{D})$  vsebuje disk  $D(b, 1/16)$  za nek  $b \in \mathbb{C}$ .

**Opomba 6.** Največje število  $\lambda \geq 1/16$ , za katero slika  $f(\mathbb{D})$ , kjer je  $f$  kot v izreku, vsebuje disk radija  $\lambda$ , se imenuje konstanta Landaua.

**Naloga 54.** Naj bo

$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

S pomočjo funkcije  $f$  pokaži, da je konstanta Landaua omejena s  $\pi/4$ .

**Rešitev 54.** Najprej preverimo, ali funkcija  $f$  ustreza predpostavkam izreka. Velja

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{1-z^2},$$

torej je  $f'(0) = 1$ . Velja

$$(1 - |z|)|f'(z)| = \frac{1 - |z|}{|1 - z^2|} \leq \frac{1 - |z|}{1 - |z|^2} = \frac{1}{1 + |z|} \rightarrow \frac{1}{2},$$

ko gre  $|z| \rightarrow 1$ , torej izreka ne moremo direktno uporabiti na funkciji  $f$ . Ideja:  $f$  predkomponiramo s skrčitvijo diska za faktor  $1/r$ ,  $r > 1$ , uporabimo izrek in nato pošljemo  $r \downarrow 1$ . Pišimo

$$f_r(z) = \frac{r}{2} \log \frac{1+z/r}{1-z/r}.$$

Ker je  $f_r$  holomorfna na disku  $D_r \supset \mathbb{D}$  in velja  $f'_r(0) = 1$ , ustreza predpostavkam izreka Landaua. Funkcija

$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$$

preslika enotski disk biholomorfno na polravnino  $\mathbb{H} = \{\Re z > 0\}$ , torej je slika funkcije

$$z \mapsto \frac{1+z/r}{1-z/r}$$

prava podmnožica v  $\mathbb{H}$ . Sledi, da je logaritem zgornje vrednosti vsebovan v pasu  $\{-\pi/2 < \Im w < \pi/2\}$ , torej je

$$f_r(\mathbb{D}) \subset \left\{ -\frac{\pi r}{4} < \Im w < \frac{\pi r}{4} \right\}.$$

Za poljuben  $r > 1$  torej obstaja funkcija  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , ki ustreza predpostavkam izreka Landaua, največji radij diska, ki ga vsebuje njena slika, pa ne presega  $\pi r/4$ . Rezultat sledi, ko pošljemo  $r \rightarrow 1$ .

**Naloga 55.** Naj bodo  $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cele funkcije, ki zadoščajo  $h(z) = e^{f(z)} + e^{g(z)}$ .

- S pomočjo malega Picardovega izreka dokaži, da ima enačba  $h(z) = 0$  bodisi neskončno mnogo rešitev bodisi rešitev nima.
- S pomočjo točke a) pokaži, da ima enačba  $e^z - p(z) = 0$ , kjer je  $p$  nekonstanten polinom, vsaj eno rešitev.
- S pomočjo velikega Picardovega izreka pokaži, da ima enačba  $e^z - p(z) = 0$ , kjer je  $p$  neničeln polinom, neskončno mnogo rešitev.

**Rešitev 55.** a) Ker je  $e^g$  holomorfna funkcija brez ničel, lahko enačbo  $h = 0$  delimo z  $e^g$  in dobimo enačbo

$$1 + e^{f(z)-g(z)} = 0, \quad e^{f(z)-g(z)} = -1.$$

Ločimo dve možnosti: če je  $f - g \equiv C$  konstantna funkcija, je bodisi  $C \in \{i\pi + 2ik\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  in je enačbi zadoščeno za vse  $z \in \mathbb{C}$ . Sicer pa enačba nima rešitev. Recimo, da je  $H(z) := f(z) - g(z)$  nekonstantna cela funkcija. Ker je  $e^z = -1$  za vse  $z \in \{i\pi + 2ik\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ter funkcija  $H$  po malem Picardovem izreku izpusti največ dve vrednosti, je  $H(z) = i\pi + 2ik\pi$  za neskončno mnogo  $k$ , torej ima enačba neskončno mnogo rešitev.

- b) Recimo, da enačba nima rešitev. Tedaj je  $H(z) = e^z - p(z)$  povsod neničelna holomorfná funkcija, torej dopušča logaritem, ki ga označimo z  $g$ , tj.

$$e^z - p(z) = e^{g(z)}.$$

Tedaj je  $p(z) = e^z - e^{g(z)}$  torej  $p$  bodisi nima ničel bodisi jih ima neskončno mnogo po točki a). Ker je  $p$  nekonstanten, velja druga možnost. To je protislovje, saj ima vsak polinom končno mnogo ničel.

- c) Enačba je ekvivalentna enačbi

$$F(z) := \frac{e^z}{p(z)} = 1.$$

Ker ima polinom  $p$  končno mnogo ničel, je  $F$  holomorfná na komplementu nekega dovolj velikega diska. Opazimo, da ima  $F$  "bistveno singularnost v  $\infty$ ", tj. funkcija

$$G(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{1/z}}{p(1/z)}$$

je definirana na neki punktirani okolici  $\Omega^*$  izhodišča in ima v izhodišču bistveno singularnost. Res, funkcija  $z \mapsto 1/p(1/z)$  je meromorfná in velja  $p(1/z) \rightarrow \infty$ , ko gre  $z \rightarrow 0$ , torej je v okolici izhodišča holomorfná,  $e^{1/z}$  pa ima v izhodišču bistveno singularnost, torej ima bistveno singularnost tudi  $G$ . Očitno je tudi  $G$  povsod neničelna blizu 0, torej po velikem Picardovem izreku v poljubni okolici izhodišča zavzame vse vrednosti v  $\mathbb{C}$  z izjemo ene, ki pa je ravno 0. V posebnem ima enačba  $G(z) = 1$  neskončno mnogo rešitev na neki okolici izhodišča, torej ima tudi enačba  $e^z - p(z) = 0$  neskončno mnogo rešitev.

## 6 Holomorfna aproksimacija

**Izrek 4** (Runge). Naj bo  $K \subset \mathbb{C}$  kompaktna množica brez lukenj in naj bo  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfna funkcija na odprti množici  $U$ , ki vsebuje  $K$ . Tedaj obstaja zaporedje holomorfnih polinomov  $p_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , ki konvergirajo enakomerno na  $K$  k funkciji  $f$ .

Naj bo  $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ . Njena holomorfno konveksna ogrinjača je množica

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = \left\{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|, \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(\Omega) \right\}$$

**Naloga 56.** Dokaži naslednje trditve:

- a)  $K \subset \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$  in  $\widehat{\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}} = \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ .
- b) Če je  $K_1 \subset K$ , je  $\hat{K}_1 \subset \hat{K}$ .
- c)  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$  je zaprta v  $\Omega$ . Če je  $K$  omejena, je tudi omejena.

**Rešitev 56.** a) Prvi del je očitno.

- b) Očitno za vse  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  velja

$$\sup_{x \in K_1} |f(x)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

saj je  $K_1 \subset K$ . V posebnem torej iz  $z \in \hat{K}_1$  sledi  $z \in \hat{K}$ , torej je  $\hat{K}_1 \subset \hat{K}$ .

- c) Naj bo  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje v  $\hat{K}$  z limito  $z \in \Omega$ . Ker so holomorfne funkcije zvezne, velja za vsako funkcijo  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ :

$$|f(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

torej je  $z \in \hat{K}$ . Sledi, da je  $\hat{K}$  zaprta. Če je  $K$  omejena, je vsebovana v nekem zaprtem disku  $D = \overline{D}(0, r) \subset \mathbb{C}$ . Za poljuben  $z \in \Omega \setminus D$  konstruiramo celo funkcijo  $f$ , za katero velja  $|f|_K < |f(z)|$ : meromorfno funkcijo

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

razvijemo v Taylorjevo vrsto v okolici izhodišča in dobimo

$$f(\zeta) = -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \dots \right).$$

Če je  $\zeta \in K$ , je v posebnem  $|\zeta| \leq r$ . Ker je  $|z| > r$ , je z oznako  $q = |\zeta|/|z| < 1$  očitno

$$|f_n(\zeta)| = \left| -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{\zeta^2}{z^2} + \dots + \frac{\zeta^n}{z^n} \right) \right| \leq \frac{1}{|z|} \frac{1}{1-q} \leq |f_n(z)| = \frac{1}{|z|} (1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n+1}{|z|},$$

torej  $z \notin \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ . Ker je bil  $z \in \Omega \setminus D$  poljuben, je  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \overline{D}$ , torej je omejena.

V posebnem vidimo tudi, da velja  $\hat{K} \subset \overline{D}(0, r)$  za vsak  $r$ , ki zadošča  $K \subset \overline{D}(0, r)$ .

**Opomba 7.** Lahko se zgodi, da je  $\Omega \setminus D$  prazna množica. Tedaj je seveda  $\Omega$  omejena, torej je  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega$  omejena po definiciji.

**Naloga 57.** Naj bo  $K \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$ . Pokaži, da velja

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)} \subset \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_2)}.$$

**Rešitev 57.** Naj bo  $z \in \hat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_1)}$ . Tedaj za poljubno holomorfno funkcijo  $f \in \mathcal{O}(\Omega_2)$  velja

$$|f(z)| \leq \sup_{x \in K} |f|_{\Omega_1}(x) = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

saj je  $f|_{\Omega_1}$  holomorfna na  $\Omega_1$ . Trditev sledi.

**Naloga 58.** Naj bo  $K = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Določi

- a)  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ ,
- b)  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)}$ .

**Rešitev 58.** a) Naj bo  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ . Tedaj za vse  $z \in D(0, 2)$  velja po principu maksimuma:

$$|f(z)| \leq \max_{x \in \partial D(0, 2)} |f(x)|.$$

Sledi, da je  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \supset \overline{D}(0, 2)$ . Recimo sedaj da je  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 2)$ . Množica  $K' = \overline{D}(0, 2) \cup \{z\}$  je kompaktna in brez lukenj. Naj bo  $U = U_1 \cup U_2$  odprta množica, ki vsebuje  $\overline{D}$ , tako da velja  $\overline{D} \subset U_1$ ,  $\{z\} \subset U_2$  in  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Funkcija

$$g(\zeta) := \begin{cases} 0; & \zeta \in U_1 \\ 1; & \zeta \in U_2 \end{cases}$$

je holomorfnna na  $U$ , torej po Rungejevem izreku obstaja zaporedje holomorfnih polinomov  $p_n$ , ki konvergirajo enakomerno na  $K'$  k funkciji  $g$ . Za dovolj velike  $n$  torej velja

$$|p_n(\zeta)| \leq \varepsilon < 1 - \varepsilon \leq |p_n(z)|$$

za vse  $\zeta \in \overline{D}$ , torej  $z \notin \hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ . Ker je bil  $z$  poljuben, je  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} = \overline{D}$ .

- b) Naj bo sedaj  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ . Bodisi se  $f$  holomorfnno razširi na  $\mathbb{C}$  bodisi ima singularnost v izhodišču. Recimo najprej, da se razširi na  $\mathbb{C}$ . Na enak način kot prej vidimo, da je  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)} \subset \overline{D}(0, 2)^*$ . Če je  $z \in \mathbb{D}$ , pa velja za funkcijo  $f(\zeta) = 1/\zeta$ , ki je holomorfnna na  $\mathbb{C}^*$ :

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{|\zeta|} = |f(\zeta)|$$

za vse  $\zeta \in K$ , torej  $z \notin \hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ . Ker je  $K \subset \hat{K}$ , sledi  $\hat{K}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} = K$ , torej je  $K$  holomorfnno konveksna domena v  $\mathbb{C}^*$ .

**Naloga 59.** Naj bosta  $\Omega$  in  $K$  kot v prejšnji nalogi ter naj bo  $p \in \Omega \setminus \hat{K}$ . Pokaži, da za poljubna  $M, \varepsilon > 0$  obstaja holomorfnna funkcija  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , ki zadošča  $|f|_K < \varepsilon$  in  $|f(p)| > M$ .

**Rešitev 59.** Po predpostavki obstaja funkcija  $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ , ki zadošča  $|g(p)| > |g|_K$ . Naj bo  $r \in \mathbb{R}$  tak, da velja  $|g|_K < r < |g(p)|$ . Za poljuben  $n \in \mathbb{N}$  definirajmo funkcijo

$$f_n(z) = \frac{g(z)^n}{r^n}.$$

Očitno gre  $f_n \rightarrow 0$  na  $K$  in  $|f_n(p)| \rightarrow \infty$ , torej  $f_n$  ustreza pogojem za vse dovolj velike  $n$ .

**Naloga 60.** Dokaži, da obstaja zaporedje polinomov  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tako da velja (po točkah)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(z) = \begin{cases} 1, & \Re z > 0 \\ 0, & \Re z = 0 \\ -1 & \Re z < 0 \end{cases}.$$

Namig: oglej si množice  $K_n = ([-n, -1/n] \times [-n, n]) \cup (\{0\} \times [-n, n]) \cup ([1/n, n] \times [-n, n])$ .

**Rešitev 60.** Za poljubno množico  $A \subset \mathbb{C}$  označimo

$$A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z, A) < \varepsilon\}.$$

Naj bo  $\varepsilon_n = 1/(4n)$ . Tedaj je množica  $K_{n, \varepsilon_n}$  odprta okolica množice  $K_n$  in velja

$$K_{n, \varepsilon_n} = U_n^1 \cup U_n^2 \cup U_n^3, \quad U_n^i \cap U_n^j = \emptyset,$$

kjer so množice  $U_n^i$  odprte okolice komponent množice  $K_n$ . Funkcija  $f_n : K_{n,\varepsilon_n} \rightarrow \mathbb{C}$ , podana s predpisom

$$f_n(z) = \begin{cases} 1, & z \in U_n^1 \\ 0, & z \in U_n^2, \\ -1 & z \in U_n^3 \end{cases}$$

je torej holomorfnna funkcija na okolici  $K_{n,\varepsilon_n}$  množice  $K_n$ . Ker  $K_n$  nima lukenj, lahko funkcijo  $f_n$  po Rungejevem izreku aproksimiramo s holomorfnim polinomom  $p_n$ , tako da velja  $\sup_{z \in K_n} |f_n(z) - p_n(z)| < \varepsilon_n$ . Rezultat sledi.

**Naloga 61.** Dokaži, da za poljubno odprto množico  $\Omega \subset \mathbb{C}$  obstaja normalno izčrpanje  $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$  množice  $\Omega$ , tako da velja  $\hat{K}_j = K_j$  za vse  $j$ . Namig: velja  $\text{dist}(K, b\Omega) = \text{dist}(\hat{K}, b\Omega)$ .

**Rešitev 61.** Naj bo  $(K'_j)_{j \in \mathbb{N}}$  neko normalno izčrpanje množice  $\Omega$ . Lahko definiramo na primer

$$K'_j = \overline{\mathbb{D}}(0, j) \cap D_j, \quad D_j := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, b\Omega) \geq 1/j\}.$$

Očitno tako definirano zaporedje množic  $K'_j$  ustreza definiciji normalnega izčrpanja. Ker je  $K'_j$  kompaktna, je omejena, torej je  $\hat{K}'_j$  tudi omejena po eni od prejšnjih nalog. Ker je zaprta, je tudi kompaktna. Normalno izčrpanje s holomorfnimi konveksnimi množicami sedaj konstruiramo induktivno. Naj bo  $K_1 = \hat{K}'_1$ . Ker je  $(K'_j)$  normalno izčrpanje, obstaja tak  $j_2$ , da je  $K_1 = \hat{K}'_1 \subset \text{Int } K'_{j_2}$ . Postavimo  $K_2 := \hat{K}'_{j_2}$ . Recimo, da smo že konstruirali  $K_1, \dots, K_n$ . Z enakim argumentom kot pri  $K_2$  vidimo, da je  $K_n \subset \text{Int } K'_{j_{n+1}}$ , torej je  $K_n \subset \text{Int } \hat{K}'_{j_{n+1}}$  in postavimo  $K_{n+1} := \hat{K}'_{j_{n+1}}$ .

**Naloga 62.** Naj bo  $K_j$  normalno izčrpanje domene  $D$  z  $\mathcal{O}(D)$ -konveksnimi množicami. Pokaži, da za poljubno zaporedje  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , ki zadošča  $p_n \in K_{n+1} \setminus K_n$ , obstaja holomorfnna funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , ki zadošča

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(p_n)| = \infty.$$

**Rešitev 62.** Funkcijo  $f$  bomo konstruirali kot vrsto  $f = \sum_n f_n$ , kjer so  $f_n \in \mathcal{O}(D)$  funkcije, ki zadoščajo

$$|f_n|_{K_n} < \frac{1}{2^n} \quad \text{in} \quad |f_n(p_n)| > n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |f_j(p_n)|.$$

Prvi pogoj nam jamči, da vrsta  $\sum_n f_n$  konvergira absolutno in enakomerno na kompaktnih v  $D$ , torej je limita  $f$  holomorfnna funkcija na  $D$ . Drugi pogoj nam da z uporabo trikotniške neenakosti:

$$\begin{aligned} |f(p_n)| &\geq |f_n(p_n)| - \sum_{j \neq n} |f_j(p_n)| \\ &> n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |f_j(p_n)| - \sum_{j=1}^{n-1} |f_j(p_n)| - \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(p_n)| \\ &> n + 1 - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &> n, \end{aligned}$$

saj iz prvega pogoja sledi  $|f_j(p_n)| < 1/2^j$  za vse  $j > n$ . Funkcije  $f_n$  konstruiramo takole: ker je za poljuben  $n$  množica  $K_n$  holomorfnno konveksna v  $D$ , po eni od prejšnjih nalog za poljubna  $0 < \varepsilon_n < M_n$  in poljubno točko  $z_n \in D \setminus K_n$  obstaja holomorfnna funkcija  $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ , ki zadošča  $|g_n| < \varepsilon$  na  $K_n$  in  $|g_n(z_n)| > M_n$ . Izberemo  $z_n = p_n$ ,  $\varepsilon_n = 1/2^n$  in (induktivno)  $M_n = n + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |f_j(p_n)|$ , kar končuje dokaz.

## 7 Mittag-Lefflerjev razvoj

**Izrek 5** (Mittag-Leffler). Naj bo  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diskretna množica v območju  $\Omega \subset \mathbb{C}$  in naj bo za vsak  $n$  podan polinom

$$g_n(z) = c_{n,1}z + \cdots + c_{n,k_n}z^{k_n}$$

brez konstantnega člena. Tedaj obstaja meromorfna funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , za katero velja, da je funkcija

$$f(z) - g_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right)$$

holomorfna na neki okolici točke  $a_n$ , ter  $f$  nima drugih polov (razen v točkah  $a_n$ ).

**Kako poiščemo  $f$ :** Recimo, da iščemo meromorfno funkcijo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Izberimo normalno izčrpanje  $\mathbb{C}$  s holomorfno konveksnimi množicami, recimo  $K_n = \overline{\mathbb{D}}(0, n)$ . Ker je množica polov diskretna, so vsi glavni deli  $g_n(1/(z - a_n))$  razen končno mnogo njih holomorfni na okolici diska  $K_m$  (za nek fiksen  $m$ ), torej lahko na  $K_m$  zapišemo  $f$  kot vsoto

$$f(z) = \text{meromorfní del} + \sum_{n=n_0}^{\infty} (g_n(1/(z - a_n)) - P_n(z)),$$

kjer je  $P_n$  Taylorjev polinom v razvoju funkcije  $g_n(1/(z - a_n))$  v vrsto okoli izhodišča dovolj visoke stopnje, tako da zgornja vrsta konvergira na  $K_m$ . Če to velja za poljuben  $m$ , rep vrste za  $f$  konvergira enakomerno na kompaktnih v  $\mathbb{C}$ .

**Opomba 8.** 1. V praksi izčrpanje izberemo v odvisnosti od množice polov. Če imamo npr. pole v  $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{C}$ , je smiselno vzeti  $K_n = \mathbb{D}(0, n/2)$ , saj je tedaj glavni del  $g_n$  holomorfen na okolici  $K_n$ .

2. Dovolj je videti, da konvergira rep vrste  $\sum (g_n - P_n)$  enakomerno na kompaktnih, tj. za dani kompaktni lahko  $f$  zapišemo kot

$$f(z) = \text{vsota končno mnogo glavnih delov} + \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - P_n),$$

kar je uporabno, če imamo npr. oceno za razliko  $\|g_n - P_n\|$  na množicah  $K_m$ ,  $m \leq n$ .

**Naloga 63.** Konstruiraj meromorfne funkcije na  $\mathbb{C}$  s predpisanimi glavnimi deli:

- a)  $g_n(z) = n/(z - n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tj. iskana funkcija ima enostavne pole v točkah  $n \in \mathbb{N}$  in ostanke  $\text{Res}(f, n) = n$ .
- b)  $g_n(z) = 1/(z - n)$

**Rešitev 63.** a) Glavni del iskane funkcije  $f$  v točki  $z = n$  je torej

$$-g_n(z) = \frac{n}{n - z} = \frac{1}{1 - z/n}.$$

Izberimo normalno izčrpanje ravnine  $\mathbb{C}$  z diski  $K_n = \overline{\mathbb{D}}(0, n/2)$ . Tedaj je za vse  $n$  glavni del  $g_n$  holomorfna funkcija na okolici  $K_n$  in velja

$$g_n(z) = -\frac{1}{1 - z/n} = -\left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots\right).$$

Če od zgornje funkcije odštejemo njen linearni Taylorjev polinom  $P_n$  dobimo

$$g_n - P_n = -\frac{z^2}{n^2} \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots\right) = \frac{z^2}{n^2} \frac{n}{z - n}.$$

Naj bo  $n_0 \in \mathbb{N}$  poljuben. Za  $n \geq n_0$  velja za vse  $|z| \leq n_0/2$ :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} g_n(z) - P_n(z) \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n_0^2}{4n^2} \left| \frac{n}{z - n} \right| \leq \frac{n_0^2}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

torej vrsta konvergira enakomerno na  $K_{n_0}$ . Ker je bil  $n_0$  poljuben, vrsta konvergira enakomerno na kompaktilih v  $\mathbb{C}$ . Sledi, da je s predpisom

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - P_n(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n(z-n)}$$

podana meromorfna funkcija z ustreznimi glavnimi deli.

*Drug način:* Poiščemo polinome  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tako da bo za nek  $\varepsilon > 0$  veljalo

$$\|P_n - g_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{za vse } |z| \leq \frac{n}{2}.$$

Tedaj za poljuben  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|z| \leq k/2$  velja

$$f(z) = \text{meromorfni del} + \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{n}{n-z} - P_n(z) \right),$$

torej je

$$\|f - \text{meromorfni del}\|_{\{|z| \leq k/2\}} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{n}{n-z} - P_n(z) \right| < \frac{1}{2^k}.$$

torej je  $f$  meromorfna funkcija. V posebnem je vsak kompaktni  $K \subset \mathbb{C}$  vsebovan v nekem disku  $\mathbb{D}(0, k/2)$ , kjer velja zgornja neenakost. Polinome lahko poiščemo bodisi z uporabo Rungejevega izreka, saj je za vsak  $n \in \mathbb{N}$  funkcija  $z \mapsto n/(n-z)$  holomorfna na okolici diska  $\mathbb{D}(0, n/2)$ , bodisi direktno, tako da za vsak  $n$  izberemo ustrezen Taylorjev polinom funkcije  $g_n$  pri razvoju okoli izhodišča. Za fiksni  $n$  velja na  $\{|z| \leq n/2\}$ :

$$-g_n(z) = \frac{1}{1-z/n} = 1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots = p_{n,k}(z) + \frac{z^{k+1}}{n^{k+1}} \left( 1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots \right).$$

Desni člen lahko omejimo z

$$\frac{1}{2^{k+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) = \frac{1}{2^k}.$$

Lahko izberemo kar  $k = n$ , torej je

$$P_n(z) = p_{n,n}(z) = 1 + \frac{z}{n} + \cdots + \frac{z^n}{n^n}$$

in velja

$$-g_n(z) + P_n(z) = \frac{z^{n+1}}{n^{n+1}} \left( 1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots \right) = \frac{z^{n+1}}{n^{n+1}} \frac{n}{n-z}.$$

Iskana funkcija je torej podana z vrsto

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{n} \right)^{n+1} \frac{n}{z-n}.$$

Iz konstrukcije sledi, da vrsta konvergira enakomerno na kompaktilih v  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ .

b) Naj bo z oznakami iz prejšnje točke:

$$h_n(z) = \frac{g_n(z)}{n} = \frac{1}{n-z}.$$

Taylorjev razvoj funkcije  $h_n$  okoli izhodišča je

$$h_n(z) = \frac{p_{n,k}(z)}{n} + \frac{z^{k+1}}{n^{k+1}} \frac{1}{n-z}$$

Naj bo  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Tedaj za vse  $n \geq n_0$  in  $|z| \leq n_0/2$  velja

$$\left| \frac{z^{k+1}}{n^{k+1}} \frac{1}{n-z} \right| = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{n_0^{k+1}}{n^{k+1}} \frac{2}{2n-n_0}.$$

Naj bo  $k = 0$ . Zgornji izraz ima tedaj vrednost

$$\frac{1}{2} \frac{n_0}{n} \frac{2}{2n-n_0} = \frac{n_0}{n(2n-n_0)} \leq \frac{n_0}{n^2}$$

Izberimo kar  $k = 0$ , torej  $P_n(z) = 1/n + z/n^2$ . Tedaj je

$$h_n(z) - P_n(z) = \frac{z}{n} \frac{1}{n-z}$$

Definirajmo

$$f(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)}.$$

Iz zgornjih ocen sledi, da vrsta  $\sum_{n=n_0}^{\infty} 1/(n(z-n))$  konvergira enakomerno na  $\{|z| \leq n_0/2\}$  za poljuben  $n_0$ , torej za  $|z| \leq n_0/2$  velja

$$f(z) = z \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{n(z-n)} + z \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(z-n)} = M(z) + R(z).$$

Ker je  $M$  meromorfna in  $R(z)$  konvergira enakomerno, je  $f$  dobro definirana meromorfna funkcija na  $\mathbb{C}$  s predpisanimi glavnimi deli v  $n \in \mathbb{N}$ .

## 8 Weierstrassova $\wp$ -funkcija

**Naloga 64.** Pokaži, da je vsaka dvojno periodična holomorfná funkcija  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  konstantna. Pokaži še, da je vsaka nekonstantna dvojno periodična holomorfná funkcija  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  surjektivna.

**Rešitev 64.** Naj bo  $f$  dvojno periodična cela funkcija. Sledi, da je  $f(\mathbb{C}) = f(K)$ , kjer je

$$K = [0, 1] \times [0, 1] = \{a + ib \in \mathbb{C} : 0 \leq a, b \leq 1\}.$$

Ker je  $K$  kompaktna, je  $f(\mathbb{C})$  omejena, torej je konstantna po Liouvilleovem izreku.

Naj bo sedaj  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  nekonstantna dvojno periodična holomorfná funkcija. Iz prejšnjega dela naloge sledi, da obstaja  $z \in \mathbb{C}$ , tako da velja  $f(z) = \infty$ , sicer bi veljalo  $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  in smo v situaciji iz prejšnjega dela, ki pove, da je  $f$  konstantna. Recimo sedaj, da obstaja nek  $\zeta \in \mathbb{C}$ , tako da je  $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{CP}^1 \setminus \{\zeta\}$ . Naj bo  $g : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$  avtomorfizem projektivne premice, podan s predpisom  $g(z) = 1/(z - \zeta)$ . Tedaj je  $g \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  dvojno periodična holomorfná funkcija, ki izpusti  $\infty$ , torej je  $g \circ f$  konstantna po prejšnjem delu naloge, torej je tudi  $f$  konstantna, kar je v nasprotju s predpostavko. Sledi, da je  $f$  surjektivna.

**Naloga 65.** Naj bo

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

dvojno periodična meromorfná funkcija s poli v  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ . Dokaži, da je  $f - \wp$  konstantna. S pomočjo Taylorjevega razvoja funkcije  $\wp$  okoli izhodišča pokaži, da je  $f \equiv \wp$ .

**Rešitev 65.** Ker je  $f$  dvojno periodična, je tudi  $g = f - \wp$  dvojno periodična funkcija. Ker je tudi  $\wp$  blizu izhodišča oblike  $\wp(z) = 1/z^2 + h(z)$ , kjer je  $h$  holomorfná funkcija na okolici izhodišča, je  $g$  holomorfná blizu izhodišča. Ker  $g$  nima polov, razen mogoče v množici  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , je holomorfná na okolici kvadrata  $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2] \subset \mathbb{C}$ . Ker je dvojno periodična, je cela, torej je konstantna po eni od prejšnjih nalog. Za Weierstrassovo  $\wp$ -funkcijo velja na okolici izhodišča:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{1}{z^2} + h(z),$$

kjer je  $h$  holomorfná vsota zgornje vrste. Očitno je  $h(0) = 0$ , saj so vsi členi v vrsti ničelni pri  $z = 0$ . Ker je tudi  $\tilde{h}(z) = f(z) - 1/z^2$  holomorfná na okolici izhodišča in je  $\tilde{h}(0) = 0$ , kar sledi iz Taylorjevega razvoja funkcije  $f$ , je

$$f(z) - \wp(z) = h(z) - \tilde{h}(z) \equiv C = 0,$$

saj je  $h(0) - \tilde{h}(0) = 0$ . Sledi  $f \equiv \wp$ .

## 9 Weierstrassov izrek

**Izrek 6** (Weierstrass). *Naj bo  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  diskretna množica v območju  $\Omega \subset \mathbb{C}$  in naj bo  $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  funkcija. Obstaja holomorfná funkcija  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , ki ima za vse  $n \in \mathbb{N}$  v točki  $a_n$  ničlo stopnje  $k(n)$  in nima drugih ničel.*

**Kako poiskati funkcijo  $f$ :** Recimo, da iščemo celo funkcijo  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  s predpisanimi ničlami in njihovimi stopnjami. Množico  $\{a_n\} \setminus \{0\}$  razvrstimo v zaporedje  $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , pri čemer za vsak fiksni  $n$  velja  $a_n = z_m$  za  $k(n)$ -mного  $m$ , tj. člen  $a_n$  se v zaporedju pojavi natanko tolikokrat, kolikor je želena stopnja ničle v tej točki. Nato izberemo zaporedje  $(l_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , tako da velja

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^{l_m+1}}{|z_m|^{l_m+1}} < \infty \quad \text{za vse } z \in \mathbb{C}.$$

Iskano funkcijo zapišemo kot neskončen produkt

$$f(z) = z^k \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_m}\right) E_{l_m} \left(\frac{z}{z_m}\right),$$

kjer je za dano naravno število  $n$ :

$$E_n(z) = \exp \left( z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} \right),$$

in je  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  stopnja ničle, ki jo ima iskana funkcija v izhodišču.

**Naloga 66.** Zapiši funkcijo  $\sin \pi z$  kot neskončen produkt.

**Rešitev 66.** Velja  $\sin \pi z = 0$  natanko tedaj, ko je  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Iz analize 1 vemo, da za poljuben  $k$  velja

$$\lim_{z \rightarrow k} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1,$$

torej so vse ničle  $z_k = k$  funkcije  $\sin \pi z$  enostavne. Iščemo torej funkcijo  $g$  oblike

$$g(z) = z \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{k}\right) E_{m_k} \left(\frac{z}{k}\right) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) E_{m_k} \left(1 + \frac{z}{k}\right) E_{-k, m_k} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \tilde{E}_{k, m_k},$$

kjer je  $E_{m_k}$  kot zgoraj. Natančneje, produkt bo konvergirati, če za vse  $z \in \mathbb{C}$  konvergira vrsta

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|z|^{m_k+1}}{|k|^{m_k+1}}.$$

Opazimo, da velja

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|z|^2}{|k|^2} < \infty,$$

torej lahko izberemo  $m_k = 1$  za vse  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Drug način:* S predavanj vemo, da neskončen produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$$

konvergira, če konvergira vrsta  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ . Združimo faktorja pri  $-k$  in  $k$ . Za poljuben  $M > 0$  in  $|z| \leq M$  velja  $|z^2/k^2| \leq M^2/k^2$ , torej produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

konvergira enakomerno na kompaktilih v  $\mathbb{C}$ . S predpisom

$$g(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

je torej podana cela funkcija, ki ima enake ničle kot  $\sin \pi z$ . Sledi, da je njun kvocient cela funkcija brez ničel, tj.

$$\sin \pi z = e^{h(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = g(z) e^h(z) = G(z),$$

kjer je  $h$  neka cela funkcija. Naj bo  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Na dovolj majhni enostavno povezani okolici točke  $z_0$  je  $G$  holomorfná funkcija brez ničel, torej dopušča logaritem in velja

$$\log G(z) = h(z) + \log z + \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Zgornja vrsta konvergira enakomerno na nekem (manjšem) disku, torej jo lahko členoma odvajamo in dobimo

$$G'(z) = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z/k^2}{1 - z^2/k^2} = h'(z) + \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right).$$

Če v člene zgornje vsote vrinemo  $+1/k - 1/k$  in vse skupaj pomnožimo s  $\pi$ , dobimo ravno Mittag-Lefflerjev razvoj funkcije  $\pi \cot \pi z$ :

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-k} - \frac{1}{k}\right) = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \frac{d}{dz} \log G(z).$$

Sledi, da je  $h' \equiv 0$  na neki okolici točke  $z_0$ , torej je  $h' \equiv 0$  na  $\mathbb{C}$  po principu identičnosti. Sledi, da je  $h$  konstantna funkcija. Ker je

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1,$$

velja

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{h(z)}}{\pi}, \quad e^{h(z)} \equiv \pi,$$

torej je

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

**Naloga 67.** S pomočjo prejšnje naloge zapiši naslednje funkcije kot neskončen produkt:

- a)  $\sinh \pi z$ ,
- b)  $\cos \pi z$ ,
- c)  $e^z - 1$ .

**Rešitev 67.** a) Velja  $\sinh \pi z = -i \sin(i\pi z)$ , torej je

$$\sinh \pi z = -i(i\pi z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(iz)^2}{k^2}\right) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right).$$

b) Velja  $\cos \pi z = \sin \pi(z + 1/2)$ , torej je

$$\cos \pi z = \pi \left(z + \frac{1}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z + 1/2)^2}{k^2}\right).$$

Zgornji produkt zapišemo kot

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{(z + 1/2)^2}{k^2} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z + 1/2}{k} \right) \left( 1 + \frac{z + 1/2}{k} \right)$$

Levi faktor v zgornjem produktu je enak

$$1 - \frac{z + 1/2}{k} = 1 - \frac{z}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} (2k - 2z - 1) = \frac{2k - 1}{2k} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right),$$

desni pa

$$1 + \frac{z + 1/2}{k} = 1 + \frac{z}{k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} (2k + 2z + 1) = \frac{2k + 1}{2k} \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right).$$

Sledi

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{(z + 1/2)^2}{k^2} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 1)(2k + 1)}{4k^2} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right).$$

Vstavimo v zgornjo enakost za  $\cos \pi z$  in dobimo

$$\begin{aligned} \cos \pi z &= \pi \left( z + \frac{1}{2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 1)(2k + 1)}{4k^2} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right) = \\ &= \pi \left( \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} \right) \left( z + \frac{1}{2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right). \end{aligned}$$

Zapišemo

$$\begin{aligned} \left( z + \frac{1}{2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right) &= \\ &= \left( z + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{z}{1 - 1/2} \right) \prod_{k=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{k - 1/2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2z)(1 - 2z) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{k + 1/2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{k + 1/2} \right) \left( 1 + \frac{z}{k + 1/2} \right) = \frac{1}{2} \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(k + 1/2)^2} \right), \end{aligned}$$

torej je

$$\cos \pi z = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 1}{4k^2} \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(k + 1/2)^2} \right) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{4k^2} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(k + 1/2)^2} \right).$$

Izračunajmo še konstantni člen. Ker je

$$\sin \pi z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2} \right),$$

je konstantni člen v izrazu za  $\cos \pi z$  ravno

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{4k^2} \right) = \frac{\sin \pi(1/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

torej je

$$\cos \pi z = \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(k + 1/2)^2} \right).$$

c) Opazimo, da velja

$$e^z - 1 = e^{z/2}(e^{z/2} - e^{-z/2}) = 2e^{z/2} \sinh(z/2).$$

Iz točke a) vemo, da velja

$$\sinh \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2}\right),$$

torej je

$$e^z - 1 = 2e^{z/2} \sinh(z/2) = 2e^{z/2} \sinh \pi(z/2\pi) = e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 k^2}\right).$$