

REALNE FUNKCIJE, ZVEZNOST REALNIH FUNKCIJ

- (1) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ iracionalno število in naj bo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = an - \lfloor an \rfloor$. Dokaži, da je f injektivna. Pokaži še, da je zaloga vrednost f vsebovana v $[0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
- (2) Določi $k \in \mathbb{R}$, za bo f zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ k, & x = -1 \end{cases}$$

- (3) Poišči vse $x \in \mathbb{R}$, v katerih je f zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi x}{2}), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \cos^2(\frac{\pi x}{2}) - 1, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- (4) Naj bosta f in g zvezni funkciji in naj velja $f(q) = g(q)$ za vse $q \in \mathbb{Q}$. Dokaži, da je $f(x) = g(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.
- (5) Pokaži, da obstaja natanko ena nekonstantna zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je:
 - (a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
 - (b) $f(xy) = f(x)f(y)$
 za vse $x \in \mathbb{R}$.
- (6) Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezna. Dokaži, da ima fiksno točko.
- (7) Dokaži, da obstajata dve diametralno nasprotni točki na ekvatorju, na katerih je temperatura enaka. Privzamemo, da je ekvator pravilna krožnica in da je temperatura zvezna funkcija kota med središčem kroga ter dvema točkama na njem.
- (8) Naj bosta f, g funkciji in $a \in \mathbb{R}$ tak, da velja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha > 0$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \alpha^\beta$.
- (9) Izračunaj limito, če obstaja.
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x})$
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{|x|}$
 - (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
 - (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1}$
 - (e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}$