

TOPOLOŠKE LASTNOSTI

Pomembni matematični izreki imajo topološko utemeljitev:

Zaporedje ne more imeti več kot ene limite.



(Hausdorffova lastnost)

Bolzano-Weierstrass: vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ vsebuje konvergentno podzaporedje.

kzira iz dejstva, da je zaprtje omejene množice kompaktno (v $\mathbb{R}^n$, ne v splošnem)

Bolzanov izrek o umetni vrednosti:

posledica dejstva, da je interval (topološko) povezan

Cantorjev izrek: presek padajočega zaporedja zaprtih krogel je neprazen

skledi iz dejstva, da so krogle kompaktno

Metrični prostor, ki je poln in brez izoliranih točk, je nujno nešteven.

obratno: števni metrični prostor brez izoliranih točk ne more biti poln

Točka $x \in X$ je **izolirana**, če ima okolico, ki ne vsebuje $X - \{x\}$.
 $(\Leftrightarrow) \{x\}$ je odprt podprostor X

(Baireov izrek)

Obraunavali bomo tri sklope topoloških lastnosti:

Ločljivost, povezanost in kompaktnost

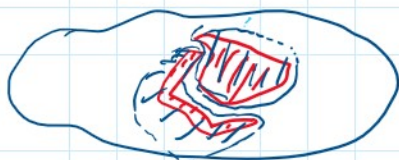
Ločljivost (separacijske lastnosti)

Ločljivost (separacijske lastnosti)

Kako dobro topologija loči podmnožice danega prostora.



ločljivi $A, B \subseteq X$ disjunktini:
 $\Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T} \quad A \subseteq U, B \cap U = \emptyset$
 $B \subseteq V, A \cap V = \emptyset$



ostro ločljivi $A, B \subseteq X$ disj.
 $\exists U, V \in \mathcal{T} \quad A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$

- **trivialna in diskretna topologija**

↳ ne loči ničesar
↳ ostro loči vsi neprazni podmnožice.

- **topologija končnih komplementov**

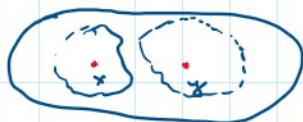
$X = \{x, y\}$ je odprta okolica y , ki ne vsebuje x
 $x \quad y \quad X = \{y\}$ $\Rightarrow \quad x, \quad \text{---} \quad y$

Ta topologija loči točke, vendar jih ne loči ostro
(če ima X neskončno elementov)

- **točka in zaprtje**

$x \in \bar{A} - A$ po definiciji topologije ne loči x od A
(ni vedno bilo gledati, kako topologija loči zaprte podmnožice)

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **Hausdorffov**, če topologija $\mathcal{T}$ ostro loči točke, tj. $\forall x, y \in X, x \neq y \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$



- vsi metrični prostori so Hausdorffovi

$$x \neq y, r := d(x, y) > 0 \quad K(x, \frac{r}{2}) \cap K(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$$

- topologija končnih komplementov na neskončni množici ni Hausdorffova.

Indikator

Ekvivalentne so izjave:

(1) X je Hausdorffov

(2) $x \neq y \Rightarrow$ obstaja $U^{\text{odp}} \subseteq X$ $x \in U, y \notin \bar{U}$

(krajše: $\bigcap_{x \in U^{\text{odp}}} \bar{U} = \{x\}$)

(3) Diagonala $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X\}$ je zaprt podprostor $X \times X$.

Dokaz

(1) $\Leftrightarrow$ (2)
($\Rightarrow$)



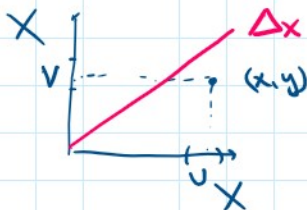
$$U \cap V = \emptyset \leadsto y \notin \bar{U}$$

($\Leftarrow$)



$$V := \bar{U}^c \text{ odp., oblika } y \\ U \cap V = \emptyset$$

(1) $\Leftrightarrow$ (3)



$$\begin{matrix} x \neq y \\ \uparrow \quad \uparrow \\ U \quad V \end{matrix}$$

sta disj $\Leftrightarrow U \times V$ ne seka diagonale

$$\Leftrightarrow (x, y) \notin \Delta_X, \quad U \ni x, V \ni y \quad U \cap V = \emptyset \\ \Rightarrow U \times V \text{ oblika: } (x, y), \\ \text{ki ne seka } \Delta_X$$

$$\Leftrightarrow x \neq y, (x, y) \notin \Delta_X \leadsto \text{obstaja} \\ \text{skatlasta oblika } U \times V \ni (x, y), \text{ ne seka } \\ \Delta_X, U, V, \dots$$



Pomembne lastnosti Hausdorffovih prostorov:

Prek Y Hausdorffov

(1) vsaka končna množica je zaprta ($\Leftrightarrow$ točke so zaprte) $\checkmark$ (iz (2))

(2) zaporedje v Y ima največ eno limito $\checkmark$

(3) $f, g: X \rightarrow Y$ zvezni $\Rightarrow \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ je zaprt v X

(4) Če se preslikavi $f, g: X \rightarrow Y$ ujemata na neki gosti podmnožici

(4) Če se preslikavi $f, g: X \rightarrow Y$ ujemata na neki gosti podmnožici X , potem je $f = g$.

(5) Graf preslikave $f: X \rightarrow Y$ je zaprt v $X \times Y$.

Dokaz

$$(3) \quad X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \quad \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f,g)^{-1}(\Delta_Y)$$

$$(4) \quad \bar{f} \quad (3)$$

(5) D.N.

□

Defin X 1-števen, Y Hausdorffov

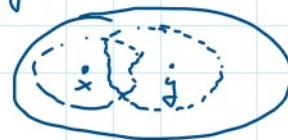
$f: X \rightarrow Y$ je zvezna $\Leftrightarrow f(\lim x_i) = \lim f(x_i)$ za vsako konvergentno zaporedje v X .

D.N.

Speciálno smo že proučevali prostore, kjer topologija loči točke, vendar so odprte množice velike in se vedno sekajo.

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **Fréchetov**, če $\mathcal{T}$ loči točke, tj.

$$\forall x, y \in X, x \neq y \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \notin U, y \in V, x \notin V$$



- vsak Hausdorffov prostor je tudi Fréchetov
- prostor s trivialno topologijo ni Fréchetov

Trditev X je Fréchetov $\Leftrightarrow$ enojčki so zaprti.

(Drugače povedano: $\mathcal{T}$ je Fréchetov $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ vsebuje top. konvul. komp.)

Dokaz

$$(\Rightarrow) \quad x, y \in X - \{x\} \rightsquigarrow \exists V \ni y, x \notin V \quad (\text{tj. } y \text{ je notranja,}$$

Dokaz

$$(\Rightarrow) \quad x, y \in X - \{x\} \rightsquigarrow \exists V \ni y, x \notin V \quad (\text{tj. } y \text{ je izolirana})$$

$$(\Leftarrow) \quad x \neq y \quad X - \{x\}, X - \{y\} \text{ loata } x \text{ od } y.$$

□

(Altern. formulacija: $\forall (x, y), x \neq y \exists U(x), V(y) \text{ ne vsebuje } y$)

Trditev

Hausdorffova in Fréchetova lastnost sta odvisni od multiplikativnosti.

Dokaz

X, Y Hausdorffova

$A \subseteq X$



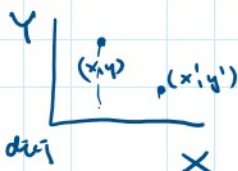
$A \cap U, A \cap V$ ostro loata x od y

$\hookrightarrow$ (lastnost $\times$ je multiplikativna, če velja:
 X, Y imata $L \Rightarrow X \times Y$ ima L)

$$(x, y) \neq (x', y')$$

$$x \in U, x' \in U' \quad U, U' \text{ disj.}$$

$$y \in V, y' \in V' \quad V, V' \text{ disj.}$$



$$(x, y) \in U \times V$$

$$(x', y') \in U' \times V'$$

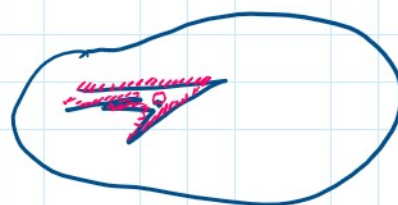
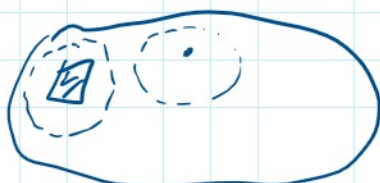
Lahko, da je $x = x'$ ali $y = y'$.
 Zato, če je loata v eni lastnosti,

Fréchet podobno, - - -

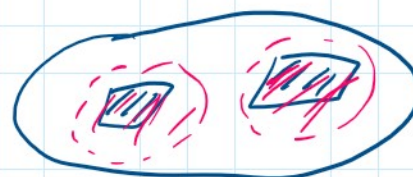
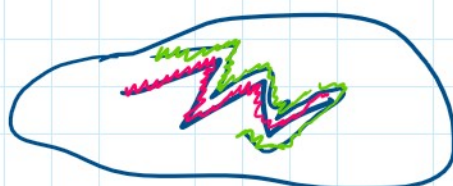
□

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **regularen**, če je Hausdorffov in $\mathcal{T}$ ostro loči točke od zaprtih množic.

$$x \notin A^{\text{zap}} \Rightarrow \exists U \ni x, V \supseteq A, U \cap V = \emptyset$$



Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **normalen**, če je Hausdorffov in $\mathcal{T}$ ostro loči (disjunktne) zaprte množice



normalnost $\Rightarrow$ regularnost $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow$ Fréchet

- Implikacij se ne da obrniti: recimo, da je $\mathcal{T}$ normalna, če $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$ je tudi $\mathcal{T}'$ Hausdorffova, ni pa nujno regularna, ker imamo tudi nove zaprte množice, ki se jih ne da ostro ločiti od točk

$\mathcal{T}$ evklidska topologija na $\mathbb{R}$,

$\mathcal{T}'$ najmanjša topologija, ki vsebuje $\mathcal{T}$ in $\{\mathbb{Q}\}$
(baza so $\{(a,b), (a,b) \cap \mathbb{Q}\}$)

$\mathcal{T}'$ je Hausdorffova, vendar ne moremo ostro ločiti 0 od $\mathbb{Q}$, ker je $\mathbb{R}$ edina odprta množica, ki vsebuje $\mathbb{Q}$.

$$\left(\begin{array}{l} f: X \rightarrow \mathbb{R} \\ C(X) \end{array} \quad \begin{array}{l} f(x) \neq f(x') \\ \bigcap \quad \bigcap \\ U \cap V = \emptyset \end{array} \quad \begin{array}{l} f^{-1}(U), f^{-1}(V) \\ \text{disj} \end{array} \right)$$

Trditveni

X metričen $\Rightarrow X$ normalen

Dokaz

Hausdorff ni ostro loči disj. zap. množice
 A, B zap. disj



$$U := \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$V := \{x \in X \mid d(x, A) > d(x, B)\}$$

$A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset$, odprta U, V ✓

□

Trditveni

- (1) $A \subseteq X$, X regularen $\Rightarrow A$ regularen
(tj. regularnost je dedna)
- (2) $A^{\text{zaprt}} \subseteq X$, X normalen $\Rightarrow A$ normalen
(normalnost se deduje)

(2) $A^{\text{zaprt}} \subseteq X$, X normalen $\Rightarrow A$ normalen

(normalnost se deduje na zaprte podprostore)

Dokaz

Hausdorffova lastnost ✓



$$a \in A, B^{\text{zaprt}} \subseteq A, a \notin B$$

$$B' \cap A, B'^{\text{zaprt}} \subseteq X$$

$$a \in U, B' \subseteq V \quad U, V \text{ odp. disj. v } X$$

$$A \cap U \text{ obloca } a \quad A \cap V \text{ obloca } B \text{ disj.}$$



$$B = A \cap B' \quad B'^{\text{zaprt}} \subseteq X \quad \text{v splošnem ni}$$

$$C = A \cap C' \quad C'^{\text{zaprt}} \subseteq X \quad \text{pripravljeni, da } B', C' \text{ disj.}$$

$$\overline{C} \text{ je } A^{\text{zaprt}} \text{ ni } B, C \text{ zaprta v } X$$

$$\text{ni isto ločilo v } X \dots$$

□

Primeri regularnih prostorov, ki niso normalni in primeri, ki kažejo, da normalnost ni dedna oz. multiplikativna so komplicirani, kar nakazuje naslednji izrek.

IZREK (Tihonov)

Prostor, ki je regularen in 2-števen, je normalen.

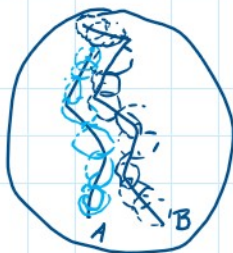
Dokaz

A, B disjunktne, zaprti v $X^{\text{regularen}}$ s števeno bazo $\mathcal{B}$.

Za vsak $a \in A$ obstajata U_a, U'_a : $a \in U_a, B \subseteq U'_a, U_a \cap U'_a = \emptyset$
(torej $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$)

$\Rightarrow$ dobimo pokritje $U_1, U_2, \dots$ za A , $\overline{U_i} \cap B = \emptyset$ za vse i .

Podobno dobimo pokritje $V_1, V_2, \dots$ za B , $\overline{V_i} \cap A = \emptyset$ za vse i .



$$U'_1 := U_1 - \overline{V_1}$$

$$V'_1 := V_1 - \overline{U_1}$$

$$U'_2 := U_2 - \overline{V_1} - \overline{V_2}$$

$$V'_2 := V_2 - \overline{U_1} - \overline{U_2}$$

.....

.....

$$A \subseteq U := U'_1 \cup U'_2 \cup \dots$$

$$B \subseteq V := V'_1 \cup V'_2 \cup \dots$$

U, V odprti
 $U \cap V = \emptyset$, ker smo vsako točko preseka
 oditeli na nekem končnem koraku



Različne stopnje ločljivosti je mogoče sistematizirati

$\leadsto$ zaporedje vedno ostrejših zahtev - t.i. aksome ločljivosti

T_0 : $x \neq y$, vsaj ena ima okolico, ki ne vsebuje druge

T_1 : $x \neq y$, obe imata okolico, ki ne vsebuje druge točke (Fréchet)

T_2 : $x \neq y$, obstajata disjunktni okolici $U \ni x$ in $V \ni y$. (Hausdorff)

T_3 : A zaprti, $x \notin A$, obstaja disjunktni okolici $U \ni x$, $V \supseteq A$
 $T_3 + T_0 = \text{regularnost}$

T_4 : A, B zaprti, disjunktni, obstajata disjunktni okolici $U \supseteq A$, $V \supseteq B$
 $T_1 + T_4 = \text{normalnost}$

To je minimalna zahteva, da topologija loči točke

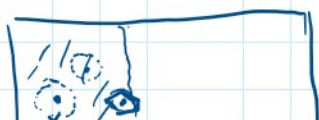
T_1 = Fréchetova lastnost, T_2 = Hausdorffova lastnost

regularnost = $T_1 + T_3$, normalnost = $T_1 + T_4$

Terminologija ni povsem enotna (npr. ponekod so definicije za T_3 in regularnost in za T_4 in normalnost ravno zamenske), ne posrečena (pomembna lastnost med T_3 in T_4 ima oznako $T_{3\frac{1}{2}}$)...

Lokalna karakterizacija T_3 in T_4

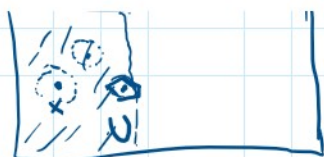
T_3



T_3^*

$$x \in U^{\text{odp}} \Rightarrow \exists V^{\text{odp}} \dots \forall \epsilon < \overline{\epsilon} \leq 1$$

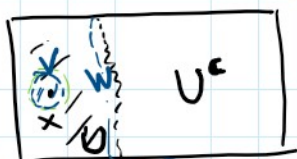
13



$$x \in U \Rightarrow \exists V \text{ such that } x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$



$$T_3 \Leftrightarrow T_3^*$$



$$x, U^c \text{ zap regul.} \rightarrow x \in V, U^c \subseteq W$$

$V, W \text{ dirj}$

$$\bar{V} \subseteq U$$

$$(\Leftarrow)$$



$$x \in A^c$$

$$x \in V^{odp} \subseteq \bar{V} \subseteq A^c, W := \bar{V}^c$$

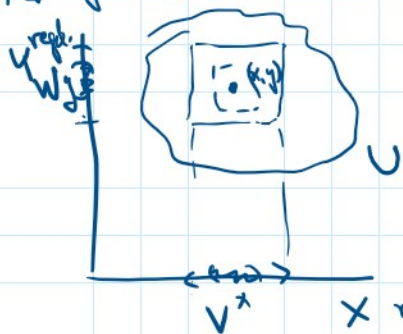
$$A \subseteq W^{odp}$$



Produkt regularnih prostorov je regularen.

uporabimo lokalno karakterizacijo regularnost = $T_1 + T_3$

T_1 je multipl. ✓ T_3 je multipl.



$$(x, y) \in V \times W \subseteq U$$

$$x \in V' \subseteq \bar{V}' \subseteq V$$

$$y \in W' \subseteq \bar{W}' \subseteq W$$

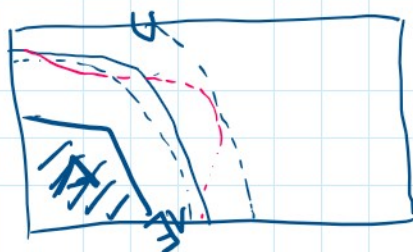
$$(x, y) \in V' \times W' \subseteq \overline{V' \times W'} \subseteq U$$

T_4

$$\Leftrightarrow T_4^*$$

$$A^{zap} \subseteq U^{odp}$$

$$\Rightarrow \exists V^{odp} : A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$



D.N.