

Funkcije

1. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = [-3, 3]$, $\mathcal{Z}_f = [0, 3]$

2. Za vsako od funkcij, ki so dane s spodnjimi predpisi, določi definicijsko območje.

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

(b) $f(x) = \sqrt{\ln \left(\frac{5x - x^2}{4} \right)}$

(c) $f(x) = \ln \arcsin \left(\frac{x+2}{5-x} \right)$

Rešitev:

(a) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

(b) $[1, 4]$

(c) $\left(-2, \frac{3}{2}\right]$

3. Za vsak par funkcij ugotovi, ali sta funkciji identični.

(a) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$

(b) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(c) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2 \ln x$

Rešitev:

(a) Ne.

(b) Ne.

(c) Ne.

4. Katere od naslednjih funkcij so identične:

$$f(x) = x, \quad g(x) = \ln e^x, \quad h(x) = e^{\ln x}?$$

Rešitev: Identični sta f in g . Funkcija h je definirana le na $(0, \infty)$.

5. Za funkciji $f(x) = 2x + 1$ in $g(x) = (x - 1)^2$ izračunajte $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ in $g \circ g$.

Rešitev:

$$(f \circ f)(x) = 4x + 3,$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 3,$$

$$(g \circ f)(x) = 4x^2,$$

$$(g \circ g)(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

6. Naj za funkcijo f velja

$$f(x - 2) = (x + 1)^3 - (x - 1)^2.$$

Izračunaj $f(2)$. Koliko je $f(f(-3))$? Določi formulo za f .

Rešitev: $f(2) = 116$, $f(f(-3)) = -10$, $f(x) = x^3 + 8x^2 + 25x + 26$.

7. Ugotovi, ali so naslednje funkcije injektivne, surjektivne ali bijektivne.

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

(c) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

Rešitev:

(a) Ni injektivna, ni surjektivna.

(b) Ni injektivna, je surjektivna.

(c) Je bijektivna.

8. Naj bo

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}.$$

Določi definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$ funkcije f . Dokaži, da je f injektivna na $\mathcal{D}_f$ in določi inverzno funkcijo.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}$

9. Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{3 + 2e^x}.$$

Pokaži, da je f injektivna funkcija in poišči inverzno funkcijo f^{-1} . Kaj je definicijsko območje funkcije f^{-1} ? Kaj je zaloga vrednosti funkcije f ? Ali je f surjektivna funkcija?

Rešitev: $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{2-3x}{2x+1}\right)$, $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{Z}_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Če na f gledamo kot preslikavo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, potem f ni surjektivna.

10. Definirajmo funkcijo

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Pokaži, da je funkcija $\operatorname{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektivna in določi njeno inverzno funkcijo.

Rešitev: Injektivnost preverimo po definiciji, $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, f je surjektivna, ker je $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

11. Za vsako od funkcij, ki so podane s spodnjimi predpisi, ugotovi, ali je soda oziroma liha.

(a) $f(x) = x^4 - 6$

(b) $f(x) = x^5 + 6x$

(c) $f(x) = x \cos x$

(d) $f(x) = \ln |x^2 + x|$

(e) $f(x) = \arctan(\sin x)$

(f) $f(x) = x \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$

Rešitev:

(a) Soda.

(b) Liha.

(c) Liha

(d) Ni niti soda niti liha.

(e) Liha.

(f) Soda.

12. Poišči bijekcije med naslednjimi množicami.

(a) $[0, 1]$ in $[a, b]$,

(b) $(0, 1)$ in $\mathbb{R}$,

(c) $(-5, \infty)$ in $\mathbb{R}$.

Rešitev:

(a) $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $f(x) = (b - a)x + a$

(b) $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $f: (-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 5)$