4 Lastnosti preslikav

Naloga 4.1. Naj bosta X in Y množici ter $f\colon X \to Y$ in $g\colon Y \to X$ taki preslikavi, da je $f \circ g \circ f$ bijekcija. Dokažite, da sta f in g bijekciji.

Naloga 4.2. Preslikavo $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiramo s predpisom

$$f(S) := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in S.\, n \leq m\}.$$

(a) Določite $f\big(\{20, 17\}\big)$ in $f(\emptyset)$.

(b) Dokažite, da za vse $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ velja $f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$.

(c) Poiščite primer množic $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, za kateri *ne velja* $f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$.

(d) Izračunajte zalogo vrednosti preslikave $f \circ f$.

Naloga 4.3. Dokažite, da so za preslikavo $f\colon X \to Y$ ekvivalentne naslednje trditve:

(a) Preslikava f je injektivna.

(b) Za vse podmnožice $A, B \subseteq X$ velja $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$.

(c) Za vsaki disjunktni podmnožici $A, B \subseteq X$ velja $f_*(A) \cap f_*(B) = \emptyset$.

(d) Za vsako podmnožico $A \subseteq X$ velja $f_*(A^{\complement}) \subseteq \big(f_*(A)\big)^{\complement}$.

(e) Za vse $A \subseteq X$ velja $f^*\big(f_*(A)\big) = A$.

(f) Preslikava $f_*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ je injektivna.

Naloga 4.4. Naj bosta A in B množici. Definirajmo preslikavo $I\colon B^A \to \mathcal{P}(A)^{\mathcal{P}(B)}$ s predpisom $I(f) := f^*$.

(a) Ali je I injektivna preslikava?

(b) Ali je I surjektivna preslikava?