

PRIPRAVA NA PRVI KOLOKVIJ

- (1) Dokažite, da za vsako sodo naravno število $n \geq 2$ velja $11 \mid 10^n - 1$.
- (2) Naj bo x iracionalno število, za katero velja, da je število x^3 racionalno. Pokažite, da je število x^2 iracionalno. Kaj pa x^7 ?
- (3) Poiščite vse realne rešitve neenačbe.
 - (a) $|x + 3| \geq x^2 + 7x$
 - (b) $\sqrt{x + 2} \geq |x + 3|$
- (4) Poiščite vse rešitve kompleksne neenačbe:
 - (a) $z + 3\bar{z} = 7 + 4i$
 - (b) $(z - i)^3 = 1 + 3i$
 - (c) $z^3 + 9z^2 + 27z = -19 + 8i$
- (5) Izračunaj limite zaporedij.

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{10} + 4n^2 + \ln n}}{5n^5}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})}{1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n})}$$

- (6) Naj bo $(a_n)_n$ konvergentno zaporedje z limito $a \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

- (7) Poiščite $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ in $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, kjer je

$$a_n = n^{n(-1)^n}.$$

- (8) Dokažitei, da je rekurzivno podano zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito.

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$

(b) $a_1 < 0, a_{n+1} = \frac{\alpha}{a_n} - 1$, kjer je $\alpha > 0$ neko realno število.

- (9) Določite a_n in b_n za vse $n \in \mathbb{Z}$, da bo f zvezna.

$$f(x) = \begin{cases} a_n + \sin \pi x; & x \in [2n, 2n + 1] \\ b_n + \cos \pi x; & x \in (2n - 1, 2n) \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

- (10) Izračunaj limite funkcij.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot x}$

(b) $\lim_{x \downarrow 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$