

Funkcije

1. Naj bo $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Določi definicijsko območje funkcije f in izračunaj:

- (a) $f(1)$
- (b) $f(-2)$
- (c) $f(x+1) - f(x-1)$

Rešitev:

- (a) 2
- (b) $\frac{7}{2}$
- (c) $4x - \frac{2}{x^2-1}$

2. Poišči definicijska območja funkcij, podanih z naslednjimi predpisi:

- (a) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-9}$
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$
- (c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$
- (d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2+x+20}}$
- (e) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-x^2}{x-1}\right)$

Rešitev:

- (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
- (b) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1] \cup [7, \infty)$
- (c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- (d) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$
- (e) $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (1, 2)$

3. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \sqrt{9-x^2}$.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = [-3, 3]$, $\mathcal{Z}_f = [0, 3]$

4. Poišči zalogo vrednosti funkcij, podanih z naslednjimi predpisi:

- (a) $f(x) = -x^2 + 2x$

(b) $f(x) = \sqrt{4 - 3x + x^2}$

Rešitev:

(a) $\mathcal{Z}_f = (-\infty, 1]$

(b) $\mathcal{Z}_f = \left[\frac{\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$

5. Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & : x \leq 3 \\ 12 - x^2 & : x > 3 \end{cases}.$$

Izračunaj $f(-2)$, $f(5)$ in $f(3)$. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti ter nariši graf funkcije f .

Rešitev: $f(-2) = 7$, $f(3) = 2$, $f(5) = -13$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

6. Za funkciji $f(x) = 2x + 1$ in $g(x) = (x - 1)^2$ izračunajte $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ in $g \circ g$.

Rešitev:

$$(f \circ f)(x) = 4x + 3,$$

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 3,$$

$$(g \circ f)(x) = 4x^2,$$

$$(g \circ g)(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

7. Ugotovi, ali so naslednje funkcije injektivne, surjektivne ali bijektivne.

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

(c) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

Rešitev:

(a) Ni injektivna, ni surjektivna.

(b) Ni injektivna, je surjektivna.

(c) Je bijektivna.

8. Naj bo

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}.$$

Določi definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_f$ funkcije f . Dokaži, da je f injektivna na $\mathcal{D}_f$ in določi inverzno funkcijo.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}$

9. Za vsako of funkcij, ki so podane s spodnjimi predpisi, ugotovi, ali je soda oziroma liha.

(a) $f(x) = x^4 - 6$

(b) $f(x) = x^5 + 6x$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$

(d) $f(x) = x \cos x$

(e) $f(x) = xe^x$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

(g) $f(x) = \ln |x^2 + x|$

(h) $f(x) = \arctan(\sin x)$

Rešitev:

(a) Soda.

(b) Liha.

(c) Soda.

(d) Liha.

(e) Ni niti soda niti liha.

(f) Liha.

(g) Ni niti soda niti liha.

(h) Liha.