

Vaje 25.11.2021: Sistemi nelinearnih enačb

1. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\2x^2 + y^2 - 4z &= 0, \\3x^2 - 4y + z^2 &= 0.\end{aligned}$$

Rešitev: glej poglavje 4.4, naloga 4 v Splošna zbirka vaj.

2. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $x^{(0)} = [1, 1]^T$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2, \\x^2 - 2xy + y &= 2.\end{aligned}$$

Rešitev: glej poglavje 4.4, naloga 1b) v Splošna zbirka vaj.

3. *Geometrijska interpretacija Newtonove metode v dveh dimenzijah.*

- (a) Na primeru iz prejšnje naloge se prepričajte, da lahko približek $x^{(1)}$ dobimo na sledeč *geometrijski* način:

- poiščemo tangentni ravnini na ploskvi

$$z = x^2 + y^2 - 2 \quad \text{in} \quad z = x^2 - 2xy + y - 2$$

v točkah

$$(x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2 - 2) \quad \text{in} \quad (x_0, y_0, x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0 - 2),$$

- poiščemo presečišče tangentnih ravnin z ravnino $z = 0$ (dobimo dve premici v ravni $z = 0$),
- presečišče dobljenih dveh premic je iskani $x^{(1)}$.

- (b) Pokažite, da zgornji postopek velja v splošnem. Torej, naj bo podan sistem enačb

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= 0, \\f_2(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

katerega rešitev iščemo z Newtonovo metodo. Naj bo znan približek $x^{(r)} = (x_r, y_r)$. Pokažite, da je iskanje približka $x^{(r+1)}$ na način:

- poiščemo tangentni ravnini na ploskvi $z = f_1(x, y)$ in $z = f_2(x, y)$ v točkah $(x_r, y_r, f_1(x_r, y_r))$ in $(x_r, y_r, f_2(x_r, y_r))$,
- poiščemo presečišče tangentnih ravnin z ravnino $z = 0$ (dobimo dve premici v ravini $z = 0$),
- presečišče dobljenih dveh premic je iskani $x^{(r+1)}$,

ekvivalentno reševanju sistema

$$JF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)}).$$