

5 Relacije

Naloga 5.1. Dani sta relaciji R in S na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\}$$

in

$$S = \{(2, 4), (2, 6), (4, 4), (6, 6)\}.$$

- (a) Narišite relaciji R in S .
- (b) Določite relacije R^T , $R \circ S$ in $S \circ R$.
- (c) Katere od naslednjih lastnosti ima relacija R : refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?
- (d) Določite tranzitivni in refleksivno-tranzitivni ovojnic relacij R in S .

Naloga 5.2.

- (a) Naj $a D b$ pomeni „ a je delitelj b “, kjer sta a in b naravni števili, večji ali enaki 2. Izračunajte kompozituma $D \circ D^T$ in $D^T \circ D$.
- (b) Naj $a M b$ pomeni „ a je mati od b “, kjer sta a in b človeka. Izračunajte kompozituma $M^T \circ M$ in $M \circ M^T$.
- (c) Naj $a R b$ pomeni $|a - b| = 1$, definirana za $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunajte $R \circ R$ in $R \circ R \circ R$.

Naloga 5.3. Na množici vseh ravnin v $\mathbb{R}^3$ vpeljemo relacijo $\perp$:

$$r_1 \perp r_2 \iff \text{ravnini } r_1 \text{ in } r_2 \text{ sta pravokotni.}$$

Katere od naslednjih lastnosti ima relacija $\perp$: refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?

Naloga 5.4. Naj bosta ab in cd dvomestni števili s števki a, b, c in d . Pravimo, da sta ab in cd v relaciji Q , ko velja $a \geq c$ ali $b > d$. Na primer, $32 Q 15$ velja in prav tako $28 Q 93$. Ne velja pa $13 Q 23$.

- (a) Katera izmed števil 72, 75, 82 in 85 so v relaciji Q ?
- (b) Katere od naslednjih lastnosti ima relacija Q : refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost?

Naloga 5.5. Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ in $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$. Narišite relacijo R in izračunajte R^3 , R^{2021} , R^+ in R^* .

Naloga 5.6. Polji šahovnice sta v relaciji R_F , če lahko figura F pride s prvega polja na drugo v eni potezi. Za vse šahovske figure F ugotovite, katere lastnosti (refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, sovisnost, strogo sovisnost) imajo relacije R_F .

Naloga 5.7. Na neskončni šahovnici $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiramo naslednjo relacijo:

$$(x, y) R (z, w) \iff \text{šahovski konjiček lahko skoči z } (x, y) \text{ na } (z, w).$$

- (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ opišite relacijo R^n . (Kdaj sta polji v relaciji R^n ?)
- (b) Za katere $n \in \mathbb{N}$ je R^n refleksivna?
- (c) Ali je R tranzitivna? Za katere $n \in \mathbb{N}$ je R^n tranzitivna?
- (d) Poiščite tranzitivno ovojnico relacije R .

Naloga 5.8.

- (a) Dokažite za vse relacije R na množici A : če je $R^\top \subseteq R$, potem je $R = R^\top$.
- (b) Poiščite relacijo R , za katero velja $R^\top = R$.
- (c) Poiščite relacijo R , za katero velja $R^\top = R^c$.

Naloga 5.9. Naj bodo A, B, C množice. Ali obstaja taka relacija I na množici B , da velja $I \circ R = R$ za vse relacije $R \subseteq A \times B$ in $S \circ I = S$ za vse relacije $S \subseteq B \times C$?

Naloga 5.10. Naj bo $R \subseteq A \times A$ relacija na množici A . Pokažite:

- (a) R je refleksivna natanko tedaj, ko velja $\Delta_A \subseteq R$,
- (b) R je tranzitivna natanko tedaj, ko velja $R^2 \subseteq R$,
- (c) R je simetrična natanko tedaj, ko velja $R^\top \subseteq R$,

- (d) R je simetrična natanko tedaj, ko velja $R^T = R$,
- (e) R je antisimetrična natanko tedaj, ko velja $R \cap R^T \subseteq \Delta_A$,
- (f) R je irefleksivna natanko tedaj, ko velja $R \cap \Delta_A = \emptyset$,
- (g) R je asimetrična natanko tedaj, ko velja $R \cap R^T = \emptyset$,
- (h) R je sovisna natanko tedaj, ko velja $\Delta_A \cup R \cup R^T = A \times A$.
- (i) R je strogo sovisna natanko tedaj, ko velja $R \cup R^T = A \times A$.

Naloga 5.11. Naj bo R tranzitivna relacija na množici A . Dokazite: če je R antisimetrična, je tudi R^2 antisimetrična. Ali velja implikacija v obratno smer?

Naloga 5.12. Naj bodo R, S in V relacije na množici A . Pokažite, da velja

- (a) $R \subseteq S \iff R^T \subseteq S^T \iff S^c \subseteq R^c$,
- (b) $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$,
- (c) $(R \cup S)^T = R^T \cup S^T$,
- (d) $R \circ (S \cup V) = (R \circ S) \cup (R \circ V)$,
- (e) $R \circ (S \cap V) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ V)$.

Poiščite še protiprimer za $R \circ (S \cap V) = (R \circ S) \cap (R \circ V)$.

Naloga 5.13. Naj bosta R in S simetrični relaciji na A . Pokažite, da je relacija $R \circ S$ simetrična natanko tedaj, ko je $R \circ S = S \circ R$. Namig: Uporabite nalogo 5.10 (d) in nalogo 5.12 (b).

Naloga 5.14. Relacija $R \subseteq A \times B$ je **funkcijska**, če velja

$$\forall x \in A. \exists! y \in B. (x, y) \in R.$$

Vsaka funkcija $f: A \rightarrow B$ določa funkcijsko relacijo $\Gamma_f \subseteq A \times B$,

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\},$$

ki ji pravimo **graf** funkcije f . Obratno vsaka funkcijska relacija $R \subseteq A \times B$ določa funkcijo $f_R: A \rightarrow B$, definirano s predpisom

$$f_R(x) := \text{tisti } y \in B, \text{ za katerega velja } (x, y) \in R.$$

Za naslednje relacije ugotovite, ali so funkcijske. Če so, katero funkcijo določajo?

- (a) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}.$
- (b) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^3\}.$
- (c) $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid x = y^2\}$, pri čemer je $\mathbb{R}_+$ množica pozitivnih realnih števil.
- (d) $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid xy = 1\}$, pri čemer je $\mathbb{R}_+$ množica pozitivnih realnih števil.
- (e) $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n = 0 \vee n = 1) \wedge \exists k \in \mathbb{N}. m = 2k + n\}.$
- (f) Za dani $a \in A$ definiramo relacijo $R_a := \{(x, y) \in A \times B \mid x = a\}.$
- (g) Za dani $b \in B$ definiramo relacijo $R_b := \{(x, y) \in A \times B \mid y = b\}.$

Naloga 5.15.

- (a) Dokažite: če sta R in S funkcijski relaciji, je tudi $S \circ R$ funkcijska relacija.
- (b) Ali se lahko zgodi, da je $S \circ R$ funkcijska relacija, če R in S nista funkcijski relaciji?

Naloga 5.16. Na množici *neničelnih* naravnih števil definiramo relacijo R s predpisom

$$m R n \iff m \cdot n \text{ je kvadrat naravnega števila.}$$

- (a) Pokažite, da je R ekvivalenčna relacija.
- (b) Kaj je $[30]_R$? Kaj je $[12]_R$?
- (c) Poiščite izbor predstavnikov za R .

Naloga 5.17. Čevljar gospod Šuštar že leta izdeluje čevlje ob Šušarskem mostu v Ljubljani. Zaradi izjemno kvalitetne obrti ima že dolg spisek rednih strank. Trenutno oblikuje nov model čevlja, ki bi ga želel ponuditi prav vsem rednim strankam.

Naj bo S množica vseh strank in $\mathcal{C}$ množica številke čevljev. Dana naj bo tudi funkcija $f: S \rightarrow \mathcal{C}$, ki osebi priredi številko stopala. Na množici S definiramo relacijo R takole:

$$x R y \iff f(x) = f(y).$$

- (a) Razložite pomen relacije in ugotovite, kaj so njeni ekvivalenčni razredi.
- (b) Naj bo $\mathcal{I}$ množica vseh imen in naj bo $g: S/R \rightarrow \mathcal{I}$ preslikava, definirana s predpisom $g([x]) := \text{„ime stranke } x\text{“}$. Ali je preslikava dobro definirana?
- (c) Naj bo $c: S/R \rightarrow \{\text{majho, srednje, veliko}\}$ preslikava, ki opisno opredeli velikost stopala, torej je dana s predpisom

$$c([x]) := \begin{cases} \text{majhno} & \text{če } f(x) \leq 37, \\ \text{srednje} & \text{če } 37 < f(x) \leq 45, \\ \text{veliko} & \text{če } 45 < f(x). \end{cases}$$

Ali je preslikava dobro definirana?

Naloga 5.18. Naj bo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ preslikava, definirana s predpisom $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$, in $\sim_f$ ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^2$, ki jo porodi f . Podajte geometrijski opis ekvivalenčnih razredov relacije $\sim_f$. Premislite, da velja $\mathbb{R}^2/\sim_f \cong [0, \infty)$.

Naloga 5.19. Definirajmo relacijo $\sim$ na $\mathbb{R}$ s predpisom

$$x \sim y \iff \exists k \in \mathbb{Z}. x - y = 2\pi k.$$

- (a) Poiščite dve preslikavi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ki inducirata $\sim$.
- (b) Ali je preslikava $\oplus: \mathbb{R}/\sim \times \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ s predpisom $[x]_\sim \oplus [y]_\sim := [x + 2y]_\sim$ dobro definirana?

Naloga 5.20. Naj bo $f: A \rightarrow B$ preslikava in $\sim_f$ ekvivalenčna relacija, porojena s f , se pravi: $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$.

- (a) Dokazite: če je f surjektivna, potem velja $A/\sim_f \cong B$.
- (b) Ali smemo sklepati: če je $A/\sim_f \cong B$, potem je f surjektivna?
- (c) Naj bo $\bar{f}: A/\sim_f \rightarrow B$ preslikava, definirana s predpisom $\bar{f}: [x]_{\sim_f} \mapsto f(x)$. Ali smemo sklepati: če je $\bar{f}$ izomorfizem, je f surjektivna?

Naloga 5.21. Na $\mathbb{N}$ definiramo naslednjo relacijo:

$$a R b \iff 7 \mid 5a + 2b.$$

- (a) Pokazite, da je R ekvivalenčna relacija.
- (b) Določite ekvivalenčne razrede relacije R .

Naloga 5.22. Naj bo $2\mathbb{Z}$ množica sodih celih števil, tj.

$$2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ je sodo število}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}.$$

Na množici $\mathbb{Z}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$x \sim y \iff x - y \in 2\mathbb{Z}.$$

Označimo z $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ kvocientno množico¹ $\mathbb{Z}/\sim$ in z $\mathbb{Z}_2$ množico $\{0, 1\}$. Dokažite, da velja $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2$. Pojasnite algebrajski pomen izomorfizma, ki ste ga podali.

Naloga 5.23. Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

- (a) Preverite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.
- (b) Naj bo $Z = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ kvocientna množica. Andrej je želel na Z definirati operaciji seštevanja in množenja s predpisoma

$$\begin{aligned} [a, b] \oplus [c, d] &:= [a + c, b + d], \\ [a, b] \otimes [c, d] &:= [a c, b d], \end{aligned}$$

kjer smo zapisali ekvivalenčni razred $[(a, b)]_\sim$ krajše kot $[a, b]$. Ali sta $\oplus$ in $\otimes$ dobro definirani preslikavi $Z \times Z \rightarrow Z$? Če ne, kako bi ju popravili, da bi dobili na Z strukturo kolobarja? Kateri kolobar smo dobili?

Naloga 5.24. Obravnavajmo množico $P := \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, delno urejeno z relacijo deljivosti $\mid$.

- (a) Narišite Hassejev diagram delne ureditve $(P, \mid)$.
- (b) Poiščite čim večjo verigo, čim večjo antiverigo in kakšno podmnožico, ki ni niti veriga niti antiveriga.
- (c) Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi podmnožice $\{1, 2, 3, 4\}$?
- (d) Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi P ? Kako se odgovor spremeni, če ureditvi P odvezemo 1, in kako, če dodamo 0?

Naloga 5.25. Množico vseh nepraznih zaprtih podintervalov intervala $[0, 1]$, torej $\mathbb{I} := \{[a, b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$, delno uredimo z relacijo vsebovanosti $\subseteq$. Ali obstajajo minimalni, maksimalni, prvi ali zadnji elementi množice $\mathbb{I}$?

¹Pri algebri boste spoznali, da je ta oznaka standardna, kadar je relacija definirana z dejstvom, da je razlika elementov v dani množici.

Naloga 5.26. Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ definiramo

$$z \preccurlyeq w \iff z \text{ in } w \text{ ležita na istem zaprtem poltraku iz izhodišča in } |z| \leq |w|.$$

Dokažite, da je $\preccurlyeq$ relacija delne urejenosti.

Naloga 5.27. Poiščite delno urejeno množico, ki ima natanko en minimalni element, vendar nima prvega elementa.

Naloga 5.28. Poiščite podmnožico $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ki nima niti najmanjšega niti največjega elementa glede na relacijo $\subseteq$.

Naloga 5.29. Za vsako od naslednjih množic S ugotovite, ali je navzgor in navzdol omejena, ali ima največji in najmanjši element ter supremum in infimum.

- (a) Odprti interval $S = (a, b)$ kot podmnožica $(\mathbb{R}, \leq)$.
- (b) Zaprti interval $S = [a, b]$ kot podmnožica $(\mathbb{R}, \leq)$.
- (c) Družina $S = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kot podmnožica $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.
- (d) $S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in A\}$ kot podmnožica $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Naloga 5.30. Na $\mathbb{R}^2$ definiramo:

$$(x, y) \sqsubseteq (z, w) \iff y \leq w \text{ in } x - y \leq z - w.$$

- (a) Pokažite, da je $\sqsubseteq$ delna urejenost.
- (b) Ali je $\sqsubseteq$ linearna urejenost?
- (c) Poiščite neskončno množico $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ki ima prvi element.
- (d) Dokažite, da je $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ mreža.
- (e) Ali je $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ z zožitvijo relacije $\sqsubseteq$ mreža?

Naloga 5.31. Za vsako od podanih preslikav ugotovite, ali je monotona, pri čemer številske množice uredimo z običajno relacijo $\leq$ in potenčne z običajno relacijo $\subseteq$.

- (a) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2$
- (b) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$
- (c) $\mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \mapsto \text{število deliteljev } n \text{ v } \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- (d) $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \mapsto \{x\}$
- (e) $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), x \mapsto (-\infty, x)$

Naloga 5.32. Naj bo A množica in $S \subseteq A$. Za vsako od podanih preslikav ugotovite, ali je monotona, pri čemer potenčne množice uredimo z običajno relacijo $\subseteq$.

- (a) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto X^c$
- (b) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto X \cup S$
- (c) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto X \cap S$
- (d) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto X \setminus S$
- (e) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto S \setminus X$
- (f) $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), X \mapsto \mathcal{P}(X)$

Naloga 5.33. Katere od spodnjih preslikav $\mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ so monotone glede na relacijo $\subseteq$ za vse množice A , preslikave $f: A \rightarrow A$ in podmnožice $S, T \subseteq A$?

- (a) $X \mapsto f_*(X \setminus f^*(S \setminus T))$
- (b) $X \mapsto f^*(X \setminus f_*(S \setminus T))$
- (c) $X \mapsto f_*(S \setminus f_*(X \setminus T))$
- (d) $X \mapsto f^*(S \setminus f^*(X \setminus T))$
- (e) $X \mapsto f^*(S \setminus f^*(T \setminus X))$
- (f) $X \mapsto f^*(S \setminus f_*(T \setminus X))$

Naloga 5.34. Utemeljite sledeče trditve.

- (a) Kompozitum dveh monotonih preslikav je monotona preslikava.
- (b) Kompozitum dveh nemonotonih preslikav ni nujno nemonotona preslikava.
- (c) Ali je kompozitum monotone in nemonotone preslikave (v takem ali drugačem vrstnem redu) nujno (ne)monotona preslikava?

Naloga 5.35. Za delno urejeni množici $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ lahko na kartezičnem produktu $P \times Q$ definiramo delno urejenost $\leq$ s predpisom

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \iff p_1 \leq_P p_2 \wedge q_1 \leq_Q q_2.$$

- (a) Preverite, da je $\leq$ res delna urejenost.
- (b) Če sta $\leq_P$ in $\leq_Q$ linearni urejenosti, ali je to tudi $\leq$?
- (c) Kako lahko na kartezičnem produktu dveh linearno urejenih množic definiramo linearno urejenost?

Naloga 5.36. Naj bo $(P, \leq)$ delna ureditev in A poljubna množica. Na eksponentni množici P^A definiramo ureditev

$$f \preceq g \iff \forall x \in A. f(x) \leq g(x).$$

Denimo, da je $\leq$ linearna ureditev. V kakšnem primeru je tudi $\preceq$ linearna ureditev? (Obravnavajte primere, ko imata P in A nič, en in več kot en element.)

Naloga 5.37. Naj bosta $(P, \leq_P)$ in $(Q, \leq_Q)$ delni ureditvi ter $f: P \rightarrow Q$ monotona preslikava.

- (a) Dokažite, da f slika omejene množice v omejene množice.
- (b) Denimo, da ima množica $S \subseteq P$ supremum v P in množica $f_*(S)$ supremum v Q . Dokažite, da velja $\bigvee_{x \in S} f(x) \leq f(\bigvee_{x \in S} x)$. Ali velja tudi enakost, tj. ali monotone preslikave v splošnem ohranjajo supremume?

Naloga 5.38. Označimo $z \leq$ običajno urejenost na $\mathbb{R}^2$ (tj. po komponentah) in $z \leq_{\text{lex}}$ leksikografsko urejenost. Naj bo dan $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ in naj bo (x, y) tak element, da velja $(0, 0) \leq (nx, ny) \leq (u, v)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pokažite, da je $(x, y) = (0, 0)$. Ali to velja tudi v primeru, ko $\leq$ zamenjamo z $\leq_{\text{lex}}$? Če velja, dokažite, sicer pa poiščite protiprimer.

Naloga 5.39. Naj bo $(A_n, \leq_n)_{n \in \mathbb{N}}$ družina delno urejenih množic. Za $f, g \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ definiramo relacijo $\leq$:

$$f \leq g \iff (f \neq g \Rightarrow f(x_0) \leq g(x_0)),$$

pri čemer je x_0 označen $\min \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq g(x)\}$. Pokažite:

- (a) $\leq$ je delna urejenost,
- (b) če so $\leq_n$ linearne urejenosti, je tudi $\leq$ linearna urejenost.

Naloga 5.40. Naj bo $(A, \preceq)$ šibka ureditev. Relacijo $\sim$ na A definiramo takole:

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

- (a) Pokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.
- (b) Na množici ekvivalenčnih razredov $A/\sim$ definiramo relacijo $\leq$ takole:

$$[x] \leq [y] \iff x \preceq y.$$

Pokažite, da je $\leq$ dobro definirana in je delna urejenost.

Naloga 5.41. Naj bo $f: A \rightarrow B$ preslikava in $\leq$ relacija na B . Na A definiramo relacijo $\preceq$:

$$x \preceq y \iff f(x) \leq f(y).$$

Dokažite sledeče.

- (a) Če je $\leq$ šibka urejenost na B , je $\preceq$ šibka urejenost na A .
- (b) Če je $\leq$ delna urejenost na B , ni nujno, da je $\preceq$ delna urejenost na A .
- (c) Poiščite potreben in zadosten pogoj na preslikavo f , da iz delne urejenosti $\leq$ sledi delna urejenost $\preceq$.
- (d) Pokažite: za vsako šibko ureditev $(A, \preceq)$ obstaja delna ureditev $(B, \leq)$ in preslikava $f: A \rightarrow B$, da je $\preceq$ porojena iz $\leq$ na zgoraj podani način.

Naloga 5.42. Naj bo dana družina funkcij $(f_i: A \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$. Na A definiramo relacijo R s predpisom

$$x R y \iff \forall i \in I. f_i(x) \leq f_i(y).$$

Ali je R nujno delna urejenost? Kaj je potreben in zadosten pogoj za to, da bo R antisimetrična?