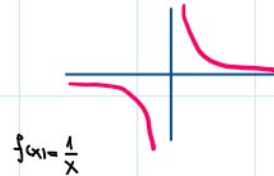
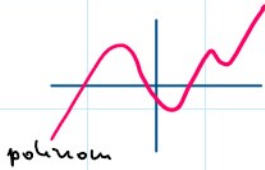


POVEZANOST

Pri geometričnih objektih takej opazimo, če so sestavljeni iz enega ali iz večih 'kosov'.

Npr.

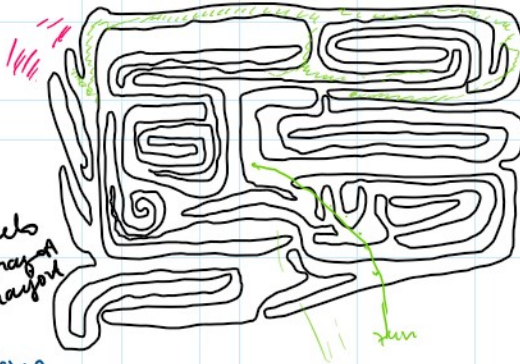
• graf



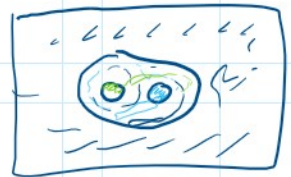
• $\mathbb{R}^2 - K$ K enostavna (brez samoprečišč), sklenjena
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(a) = f(b)$, $f((a,b))$ je injektivna, aliter $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$



Jordanov trik
 $\mathbb{R}^2 - K$ ima več kot
 dva dela, notranjost
 in zunanost

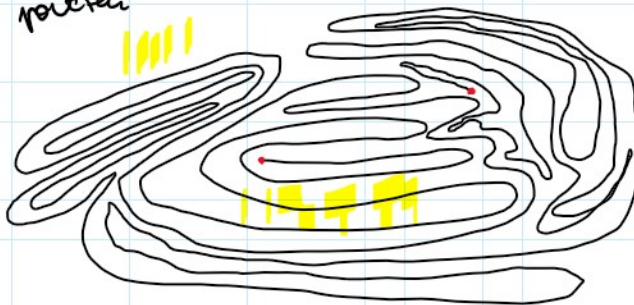


Wada ločes

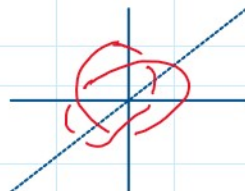


• $\mathbb{R}^2 - D$ D enostavna, nesključena

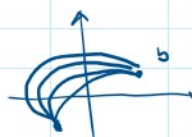
$\mathbb{R}^2 - D$ je povezan



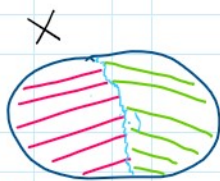
• $\mathbb{R}^3 - K$ K enostavna, sklenjena
 je povezana



• $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$



$a, b \in \mathbb{Q}^2$



razlika?



Kam sodi meji?

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **nepovezan**, če ga lahko razcepimo kot disjunktno unijo dveh nepraznih, odprtih množic: $X = U \cup V$, $U, V \in \mathcal{T} - \{\emptyset\}$.

$(X, \mathcal{T})$ je **povezan**, če ni nepovezan. (t.j. X ima le trivialni razcep $X = X \cup \emptyset$)

Trditve Ekvivalentne so izjave:

- (1) X je nepovezan
- (2) X lahko predstavimo kot disjunktno unijo dveh nepraznih, ~~odprtih~~ množic.
- (3) $\forall X$ obstaja prava, neprazna podmnožica, ki je odprta in zaprta
- (4) Obstaja zvezna surjekcija $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ (z diskretno topologijo)

Dokaz

(1) $\Leftrightarrow$ (2) če lahko netrivialni razcep $X = U \cup V$



U, V odprti $\Leftrightarrow U, V$ zaprti

(3)

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $(\Rightarrow)$: $X = U \cup V$ $f: X \rightarrow \{0, 1\}$
 $U \mapsto 0$
 $V \mapsto 1$

$(\Leftarrow)$: $f: X \rightarrow \{0, 1\}$, $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$
 odp odp

neprazni, kar je f surjekcija.



Povezane množice običajno dobimo z neko konstrukcijo

Osnovni gradnik je:

IZREK $A \subseteq \mathbb{R}$ je povezana $\Leftrightarrow A$ je interval

Dokaz **interval**: $\forall a < b \in \mathbb{R}, a, c \in A \Rightarrow b \in A$

$(\Rightarrow)$ A ni interval $\Rightarrow \exists a < b \in \mathbb{R}, a, c \in A, b \notin A$
 $\Rightarrow A \cap (-\infty, b) \neq \emptyset, A \cap (b, +\infty) \neq \emptyset$ razcep A na dve neprazni
 odprti podmnožici

$(\Leftarrow)$ A interval, ki ni povezan $\Rightarrow A = U \cup V$, U, V odprti, neprazni
 $\exists a \in U, c \in V$, lahko priznamo $a < c$
 $b := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid [a, x] \subseteq U\}$;
 • $a \leq b \leq c$, zato $b \in A$
 • $b \in \text{Cl}_A U$, torej $b \in U$, ker je U (tudi) zaprt v A
 • to ne gre, ker je U odprt, kar pomeni;
 da obstaja $\varepsilon: (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq U$, kar je v
 protislovju z definicijo b .

□

IZREK

- (1) $f: X \rightarrow Y$ zvezna, X povezan $\Rightarrow f(X)$ povezan.
 (tj. zvezna slika povezanega prostora je povezana) posebej se ohraja pri homeomorfizmi (je topološka lastnost)
- (2) $\{A_\lambda\}$ povezane podmnožice X , $\bigcap_\lambda A_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_\lambda A_\lambda$ povezan 
- (3) produkt povezanih prostorov je povezan
- (4) če za $\forall a, b \in A$ obstaja **pot** $\gamma: I \rightarrow A$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b \Rightarrow A$ povezan
- (5) $A \overset{X}{\subseteq} \overline{A}$ povezan, $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow B$ povezan
 (posebej, operacija zaprtja ohranja povezanost)

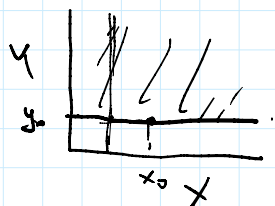
Dokaz

(1) $f: X \xrightarrow{\text{zvezna}} Y$, pri čemer $f(X)$ nepovezan $\Rightarrow g^{\text{zvezna}}: f(Y) \rightarrow \{0, 1\}$
 $\Rightarrow g \circ f: X \rightarrow \{0, 1\}$ zvezna
 $\rightarrow$ protislovje, ker je X povezan

(2) $f: \bigcup_\lambda A_\lambda \xrightarrow{\text{zvezna}} \{0, 1\}$ $a \in \bigcap_\lambda A_\lambda$ demonstracija
 $f(a) = 0$

$$\Rightarrow \forall \lambda \quad f(A_\lambda) = f(a) = 0 \Rightarrow f(\cup A_\lambda) = 0$$

(3) X, Y povezani $\Rightarrow \underline{X \times Y}$ povezan



$$f \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto 0$$

$$X \setminus \{x_0\} \longmapsto 1$$

$\Rightarrow \exists x \in X \quad x \times \{y\} \longmapsto 1 \leadsto f$ ni surjekcija

(4) poljubn. točka v X lahko povežemo s točko

$f: X \rightarrow \{0, 1\}$ ni surjekcija

$$a \longmapsto 0$$

$$b \longmapsto 1$$

$$(I, 0, 1) \xrightarrow{f|_{I \setminus \{0, 1\}}} (X, a, b) \xrightarrow{f} \{0, 1\}$$

prosljeplje s povezanostjo intervala

(5) A pov, $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$

ni. $f: B \rightarrow \{0, 1\}$, denimo $f(A) = 0$, razen tega

na točke v $\bar{A} \setminus A$ je ena sama

$\Rightarrow f(B) = 0$, f ni surjekcija

◻

Primeri

• konveksne množice v $\mathbb{R}^n$ so povezane

• sfere S^n so povezane



(po (2))

• komplement končne množice v $\mathbb{R}^n$ je povezan

• komplement $\mathbb{Q}^n$ v $\mathbb{R}^n$ je povezan



(po (4))

• Izrek (o vmesni vrednosti) X povezan, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna

$\Rightarrow f(X)$ je interval (po (1) je povezan, to izhaja iz intervala)

(posebej, če f zavzame pozitivne in negativne vrednosti, potem ima f vsaj eno ničlo)

• $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$

pres.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfizem

$$0 \longmapsto f(0)$$

$f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ homeomorfizem

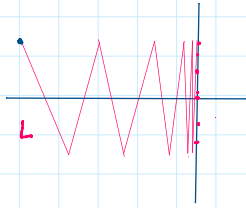
ki povezuje

povezan

protislovje

Točka (5) zgornjega izreka ima nepričakovano posledico:

(pogosto vzamemo
gled $f(x) = \sin \frac{1}{x}$)



'žaga' L je povezana, ker je homeomorfin intervalu

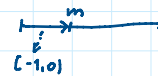
Presenetljivo je, da ostane povezana tudi če ji dodamo katerikoli točka daljice $\{0\} \times [-1, 1]$ (ali kar celo daljico)



$\forall \bar{L} = \bar{L} \cup \{0\} \times [-1, 1]$ ni poti med $(-1, 1)$ in $(0, 0)$

Definimo namreč, $f: (I, d_f) \rightarrow (\bar{L}, d_{\bar{L}})$, $f = (f_1, f_2)$

$f_1^{-1}(0)$ je zaprtje n I , zato ima $m = \min(p^{-1}(0))$



$\Rightarrow f([-1, m]) \subseteq L \Rightarrow$ na vsaki, če tako

majhni okolici m zavzame f_2 vse vrednosti

med -1 in 1 , kar je v nasprotju z zveznostjo

$\bar{L}$ je **varijski lok** (po W. Sierpinskiemu); prostor, ki je povezan, vendar ni povezan s potmi

X je **povezan s potmi**, če zadošča pogoj iz točke (4) prejšnjega izreka, tj. če $\forall a, b \in X$ obstaja $\gamma: (I, 0, 1) \rightarrow (X, a, b)$.

|| povezanost s potmi implicira povezanost, varijski lok in podobni primeri  pa kažejo, da obratno ne velja

Imamo torej dve intuiriji povezanosti:

 -> neobstoja razcepa
 -> poti med poljubnima točkama
 Videli bomo, da v nekaterih pomembnih primerih pogosta sovpada.

Komponente

$x \in X$, $C(x) :=$ unija vseh povezanih podmnožic X , ki vsebujejo x

$C(x)$ je povezana po točki (2) izreka,

je maksimalna povezana množica X , ki vsebuje x

Komponente X so maksimalne povezane podmnožice X

Komponente X so maksimalne povezane podmnožice X

- diskretni prostor: komponente so točke
(vsaka množica, ki ima več kot eno točko lahko razcep)
 - $\mathbb{Q}$ komponente so točke (edine povezane $\subseteq \mathbb{R}$ so intervali)
- X je povsem nepovezan, če so njegove komponente enojne.

•  X je povezan, $X \setminus \{a\}$ pa ne;

Izrek

- (1) Komponente tvorijo particijo prostora (razdelitev na disjunktne podprostore)
 $x, y \in X \Rightarrow C(x) = C(y)$ ali $C(x) \cap C(y) = \emptyset$
- (2) Komponente X so zaprti podprosti X
- (3) $f: X \rightarrow Y$, slika vsake komponente X je v celoti vsebovana v neki komponenti Y

Dokaz

(1) - - -

(2) C kompaktna $\bar{C}^{\text{top}} \supseteq C$, zaradi maksimalnosti $C = \bar{C}$

(3) $f(\underbrace{C(x)}_{\text{konvexna, zvezna } f(x)}) \subseteq C(f(x))$



Če ima X končno mnogo komponent, potem so te tudi odprke (zato, ker je vsaka komponenta komplement nujne ostalih komponent, končna unija zaprtih množic pa je zapeta).

V splošnem pa komponente niso odprke. (npr. $\mathbb{Q}$)



Če ima x poljubno majhno povezavo okoli x , potem je x notranja točka $C(x)$

Za odprtost komponent in in vsak $x \in X$ imajo notranost

ovince, potem x
 x ugotoviti točka $C(x)$

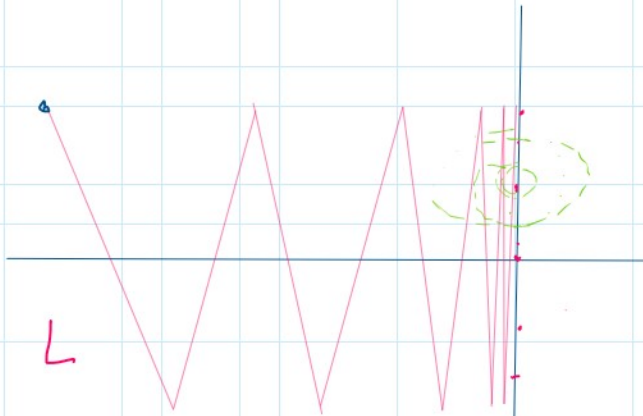
Za odprtost komponent mora vsak $x \in X$ imeti okolico
 $x \in U \subseteq C(x)$; Zato bi, če ima vsak x lokalno bazo iz povezanosti.
 Prostor $(X, \mathcal{T})$ je **lokalno povezan**, če ima bazo iz povezanosti množice.

• $\mathbb{R}^n$ je idealno povezan (krogle so povezane in zato povezane)

$U^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ je tudi:

Lok. povezanost se deduje na odprte podprostore

- diskreten prostor je lokalno povezan, ni pa povezan
- Variantski lok je povezan, ni pa lokalno povezan



Teorema

X je lokalno povezan $\Leftrightarrow$ komponente vsake odprte podmnožice X so odprte

Dokaz $(\Rightarrow) \checkmark$



$(\Leftarrow)$ Za bazo topologije vzamemo komponente odprtih množic.

$\square$

Večina zgodbe o komponentah za povezanost lahko ponovimo tudi za povezanost s potmi.

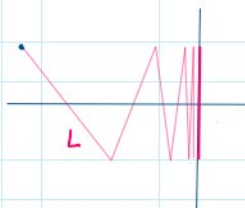
$x \in X$: $C'(x) :=$ unija vseh podmnožic X , ki so povezane s potmi in vsebujejo x .
(velja, unija s potmi povezanih podmnožic, ki imajo neprekinjen presek je povezana s potmi.)

• $C'(x)$ so maksimalne s potmi povezane podmnožice X
 $\rightarrow$ potne komponente X

• potne komponente tvorijo particijo X

• $f: X \rightarrow Y$, $f(\text{potna komponenta } X) \subseteq \text{potna komponenta } Y$

• potne komponente niso nujno zaprte



$(X, \mathcal{T})$ je lokalno povezan s potmi, če ima bazo iz odprtih množic, ki so povezane s potmi.

LEMA

V prostoru, ki je lok. povezan s potmi so komponente isto kot potne komponente.

Dokaz

$$x \in X \quad C'(x) \subseteq C(x) \quad C(x) = C'(x)$$

lok. pov. s potmi: $y \in C'(x) \exists U^{\text{pot s potmi}} \ni y \Rightarrow U \subseteq C'(y) = C'(x)$
 $\Rightarrow C'(x)$ odprta v X , in tudi v $C(x)$

Obehem je $C'(x) =$ komplementu unije vseh ostalih potnih komponent $C(x)$; vse so odprte, unija je odprta $\Rightarrow C'(x)$ zapeta v $C(x)$

$$C'(x) \text{ odprta in zapeta v } C(x) \Rightarrow C'(x) = C(x)$$

$\square$



□ $C'(x)$ odprta in zaprta v $C(x)$ ^{povezana} $\Rightarrow C'(x) = C(x)$ v $C(x)$

Posledica X povezan in lokalno povezan s potmi.
 $\Rightarrow X$ povezan s potmi.

Posledica

Odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je povezana natanko
takrat, ko je povezana s potmi.

□