

Matematika v praksi, PrM, izpit

2. februar 2016

1. naloga (25 točk)

Živa se zanima za nakup avtomobila po ceni 2000 eur. Ker njeni prihranki znašajo le 500 eur, se obrne na banko za najem študentskega kredita, s katerim bi poplačala razliko. Ponudijo ji kredit z nespremenljivo letno obrestno mero 4,7% in mesečnim obrestovanjem.

a) Kolikšen bo mesečni obrok (anuiteta), če želi Živa kredit odplačati po 1 letu? Koliko denarja v tem primeru v resnici plača za avtomobil, če upoštevate še razne stroške pri sklenitvi kredita v velikosti 25,5 eur?

b) Živa si lahko privošči le mesečni obrok v višini 100 eur. Kako dolgo bi morala odplačevati kredit?

2. naloga (25 točk)

Igralci A, B in C si želijo pravično razdeliti predmete P1, P2, P3 in P4. Odločijo se za Steinhaus-Knasterjev postopek zapečatenih ponudb. Igralci dajo naslednje ponudbe.

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
A	500	800	300	800
B	350	1000	200	700
C	440	800	400	850

a) Za vsak predmet določite, kdo ga prejme!

b) Kolikšno denarno nadomestilo mora posamezen igralec doplačati ali prejeti? Ostane kaj denarja za delitev?

c) S tabelo ponazori, kako ocenjuje posamezen igralec prejeto vrednost pri tem postopku za vse tri! Ali pride do zavisti? Odgovor utemelji!

3. naloga (25 točk)

Sostanovalci Ana, Brane, Cene in Danica se odločajo o nakupu psa. Dogovorijo se, da bodo odločitev sprejeli z glasovanjem, pri čemer bo volilna moč vsakega od njih sorazmerna njegovi voljnosti pri oskrbi psa (številu sprehodov na teden). Podatki so: Ana: 5, Brane: 3, Cene: 9, Danica: 4.

a) Kolikšen je navadni delež (v odstotkih) vsakega od sostanovalcev pri glasovanju?

b) Prag sprejetja odločitve je 30%. Zapišite koalicijsko tabelo in izračunajte relativne Banzhafove indekse vsakega od sostanovalcev.

c) Nato se Danica in Brane odločita, da bosta skupaj sprehajala psa (združita svoji volilni moči). Izračunajte nove relativne Banzhafove indekse!

4. naloga (25 točk)

V dvoboju dveh šahovskih ekip s po petimi igralci se pomerita ekipa iz Latinov z igralci a, b, c, č, d in ekipa Grčnikov s šahisti α , β , γ , δ , ϵ . Vsak igra proti vsakemu natanko enkrat. Dvoboj poteka pet dni od srede do nedelje, igre pa sodi pet sodnikov 1, 2, 3, 4, 5. Sestavi tak urnik tekmovanj, da bo vsak dan na sporedu pet dvobojev, da bo vsak igralec igral vsak dan natanko enkrat, da bo vsak sodnik vsak dan sodil natanko eno igro in da bo vsak sodnik sodil vsem igralcem natanko enkrat. (Na primeren način morate izpolniti prikazano tabelo.) pri tem uporabite modularno aritmetiko!

	1	2	3	4	5
sreda	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
četrtek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
petek	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
sobota	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)
nedelja	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)	(?,?)

① a) Kredit $a_0 = 1500 \text{ €}$

$r_{\text{letni}} = 1,047$ (4,7% letno)

$m = 12$ (kapitalizacijska doba 1 mesec)
12 mesecev

$$r_{\text{mes}} = \sqrt[m]{r_{\text{letni}}} = \sqrt[12]{1,047} = 1,003834745$$

annuiteta

$$b = a_0 \frac{r_{\text{mes}}^m (r_{\text{mes}} - 1)}{r_{\text{mes}}^m - 1} = \frac{1,00383^{12} (1,00383 - 1)}{1,00383^{12} - 1} \cdot 1500$$

$b = 128,14 \text{ €}$

500 + 12 × b + 25,5 = 2063,18 € — stroški kredita
— plača za avtomobil

b) če je annuiteta $b = 100 \text{ €}$, koliko mesecev bismorala vrniti kredit 1500 €:

$$b = a_0 \frac{r_{\text{mes}}^m (r_{\text{mes}} - 1)}{r_{\text{mes}}^m - 1}$$

$$b r_{\text{mes}}^m - b = a_0 (r_{\text{mes}} - 1) r_{\text{mes}}^m$$

$$\underbrace{[b - a_0 (r_{\text{mes}} - 1)]}_C r_{\text{mes}}^m = b$$

$$r_{\text{mes}}^m = \frac{b}{C}$$

$$m \ln(r_{\text{mes}}) = \ln\left(\frac{b}{C}\right)$$

$$m = \frac{\ln(b/c)}{\ln(r_{mes})}$$

(2)

$$C = 100 - 1500 (1,00383... - 1) = 94,24788 \text{ €}$$

$$m = \frac{\ln(100/94,2478...)}{\ln(1,00383...)} = 15,22$$

vrațati bi morala 16 mesece

2. naloga

(3)

	P1	P2	P3	P4	Vrednost
A	500	800	300	800	2400
B	350	1000	200	700	2250
C	440	800	400	850	2490

2a) P1 dobi A, P2 dobi B, P3 dobi C
P4 dobi C

2b)

	prop. deleži	dobi's predmeti	plača	dobi
A	800	500	/	300
B	750	1000	250	/
C	830	1250	420	/
		Σ	670	300

razdelijo si $(670 - 300) / 3 = 123,33 \text{ €}$

2c)

	A	o dediču B	C
A	800	$800 - 250 = 550$	$300 + 800 - 420 = 680$
B	$350 + 300 = 650$	750	$200 + 700 - 420 = 480$
C	$440 + 300 = 740$	$800 - 250 = 550$	830

ni zavisti!

3. naloga

(4)

a) volilni sistem: $[7; 9, 5, 4, 3]$

30% od 21 = 6,3, zaokrožimo na 7

koalicijška tabela

5	3	5	4				
A	B	C	D	koalicija	teža	zmago	krit.
0	0	0	0	0	0	N	/
0	0	0	1	4	4	N	/
0	0	1	0	5	5	D	C
0	0	1	1	5+4	13	D	C
0	1	0	0	3	3	N	/
0	1	0	1	3+4	7	D	B, D
0	1	1	0	3+5	12	D	C
0	1	1	1	3+5+4	16	D	/
1	0	0	0	5	5	N	/
1	0	0	1	5+4	9	D	A, D
1	0	1	0	5+5	14	D	C
1	0	1	1	5+5+4	18	D	/
1	1	0	0	5+3	8	D	AB
1	1	0	1	5+3+4	12	D	/
1	1	1	0	5+3+5	17	D	/
1	1	1	1	5+3+5+4	21	D	/

A: 2x, B: 2x, C: 4x, D: 2x

$$\sum N_{ki} = 2+2+4+2 = 10$$

$$Br(i) = \frac{N_k(i)}{N_k(A) + N_k(B) + N_k(C) + N_k(D)} = \frac{N_k(i)}{10} \quad (5)$$

$$Br(A) = Br(B) = Br(D) = \frac{2}{10} = 0,2$$

$$Br(C) = \frac{4}{10} = 0,4$$

b) sistem $[7; 9, 7, 5]$

5 7 9						
A	B+D	C	kvaliteta	teža	umaga	vrst
0	0	1	9	9	D	C
0	1	0	7	7	D	B+D
0	1	1	7+9	16	D	/
1	0	0	5	5	N	/
1	0	1	5+9	14	D	C
1	1	0	5+7	12	D	B+D
1	1	1	5+7+9	21	D	/

$$A: 0x, \quad B+D: 2x, \quad C: 2x; \quad \sum N_{ki} = 0+2+2 = 4$$

$$Br(A) = 0$$

$$Br(B+D) = Br(C) = \frac{2}{4} = 0,5$$

naloga 4: glej izpit: sept. 2011, 3. naloga
ali grlat kvadr - kraljice. xlsx

1. naloga (25 točk)

V denarni igri, temelječi na piramidni shemi, mora vsak igralec, ki pristopi k igri, plačati 100 Eur osebi, ki ga je povabila v igro (nadrejenemu). Nadrejeni sme od vsakega pridobljenega igralca zadržati 10 Eur, preostanek mora izročiti svojemu nadrejenemu, ki prav tako zadrži 10 Eur, preostanek pa izroči svojemu nadrejenemu, itd. Piramida se širi tako, da vsak igralec pridobi točno tri nove igralce, sam pa s tem postane nadrejeni tem trem novim igralcem.

a) Koliko nadrejenih dobi plačilo od enega samega igralca? Najvišji nadrejeni igralec, ki je še prejel plačilo, predstavlja vrh lokalne piramide. Nadrejeni igralcu, ki trenutno predstavlja vrh lokalne piramide, pa izpadejo iz igre.

b) Koliko igralcev v piramidi plačuje najvišje nadrejenemu?

c) Koliko denarja pridobi najvišje nadrejeni ob predpostavki polno razvite piramide? *Če je (C1) najvišje nadrejeni na vrhu globalne piramide, (C2) najvišje nadrejeni na vrhu lokalne piramide,*

2. naloga (25 točk)

Na volitvah je 34 volilcev podelilo kandidatom A, B, C in D glasove, kot je podano v tabeli. Določite zmagovalca volitev po sistemu primerjave 1:1 (Condorchet-ov kriterij)!

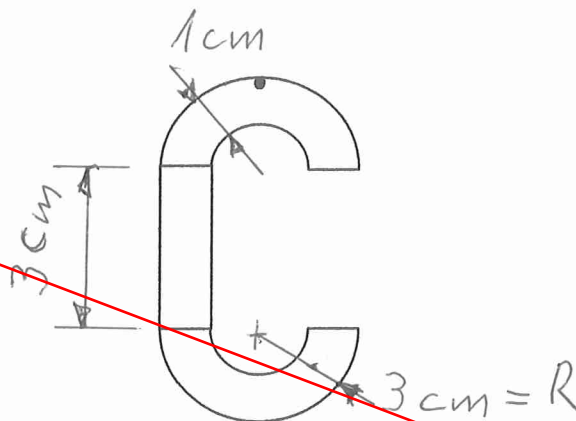
Št. glas.	12	11	6	3	2
1. izbira	A	C	D	B	B
2. izbira	B	D	B	C	A
3. izbira	C	B	A	D	C
4. izbira	D	A	C	A	D

3. naloga (25 točk)

Nariši sheme kombinatoričnih kombinacij (8_3) , (7_3) , (6_3) ! Preveri, ali vse tri kombinacije ustrezajo kriterijem kombinatoričnih konfiguracij! Koliko parov točk in v katerih kombinacijah se nikoli ne sreča, oz., se sreča več kot enkrat?

4. naloga (25 točk)

Pod kakšnim kotom glede na vertikalno visi pločevinasti obesek v obliki črke C? Obesišče je v črno označeni piki. Nasvet: poiščite težišče lika in izračunajte kot med vertikalno in zveznico težišča in obesišča.



1) a) 10 nadrejenih

b) 34. igralcev v 10-nivojski piramidi

n = nivo	denar	34. igralcev
1	→ 10	1
2	→ 10	3
3	→ 10	9
4	→ 10	27
5	→ 10	81
6	→ 10	243
7	→ 10	729
8	→ 10	2187
9	→ 10	6561
10	→ 10	19683
11	→ 100	59049

$$S = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1}$$

$$S = 88572$$

najvišjemu nadrejenemu plačuje 3-1 igralcev : 88572

c2) na vrhu lokalne piramide
dobi: $10 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10})$

$$\text{dobi: } 10 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} = 885720 \text{ €}$$

c1) na vrhu globalne piramide (začetnik igre)

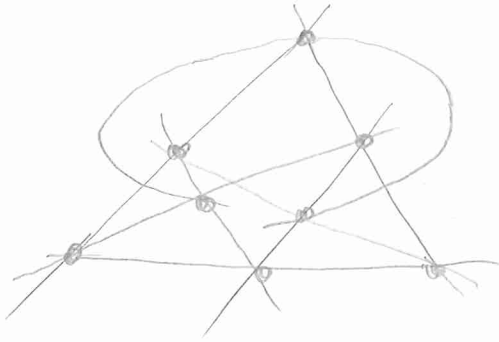
3 · 100 €	
9 · 90	
27 · 80	19683 · 20 €
81 · 70	59049 · 10 €
	<u>1328430 €</u>

2)

	A	B	C	D	A	B	C	D	Σ
A	-	12	20	14	-	0	1	0	1
B	22	-	23	17	1	-	1	0.5	2.5
C	14	11	-	28	0	0	-	1	1
D	20	17	6	-	1	0.5	0	-	1.5

3)

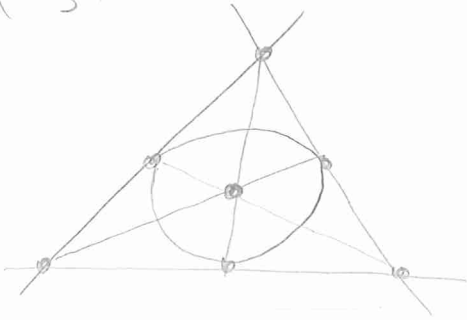
3) (8_3) --- Möbius - Kantorjeva konfig.



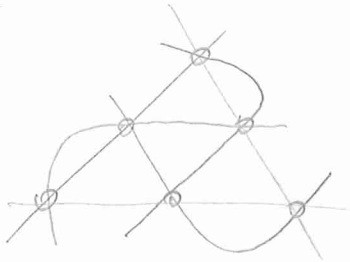
Pogoji za komb. konf.:

- 1) vsaka točka je vsebovana natanko v 3 blokih
- 2) vsaki blok vsebuje natanko 3 točke
- 3) vsaki par točk je vsebovan v največ enem bloku

(7_3) -- Fanoova konf.



(6_3) ni komb. konf., ker pogoj 3 ni izpolnjen!



Število srečanj v (N_r, b_k)

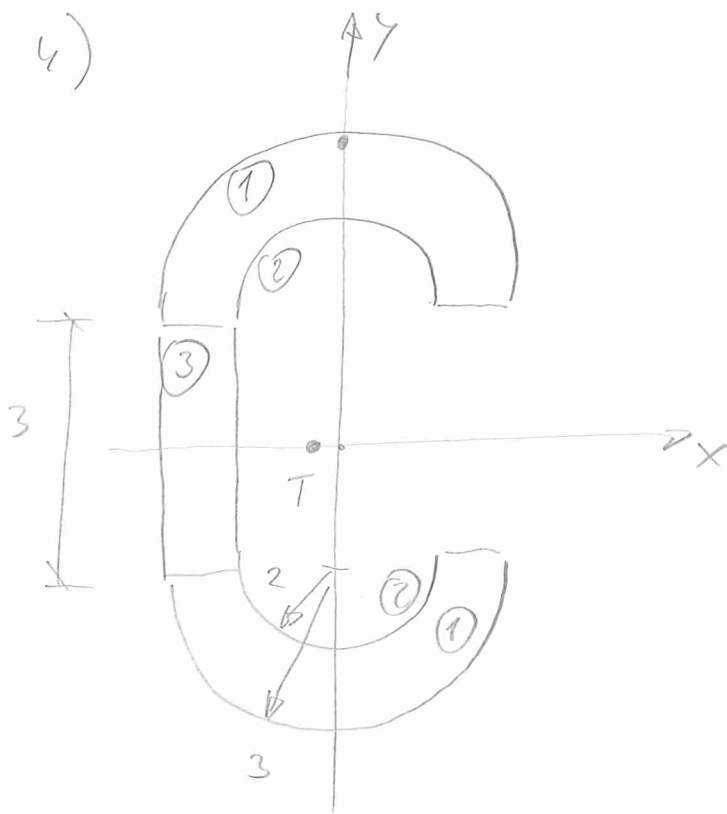
$$\frac{v(v-1)}{2} - b \frac{k(k-1)}{2} =$$

$$(8_3) : \frac{8 \cdot 7}{2} - 8 \frac{3 \cdot 2}{2} = 28 - 24 = 4 \quad \text{-- se ne srečajo}$$

$$(7_3) : \frac{7 \cdot 6}{2} - 7 \frac{3 \cdot 2}{2} = 21 - 21 = 0 \quad \text{-- vsi se srečajo}$$

$$(6_3) : \frac{6 \cdot 5}{2} - 6 \frac{3 \cdot 2}{2} = 15 - 18 = -3 \quad \text{se srečajo večkrat}$$

4)



i	$A_i [cm^2]$	$x_i [cm]$	$A_i x_i$
1	3π	0	0
2	-4π	0	0
3	3	-2,5	-7,5
Σ	18,708		-7,5

$$x_T = \frac{-7,5}{18,707} = 0,4009 \text{ cm}$$



$$\varphi = \arctg \frac{0,4009}{4,5}$$

$$\underline{\underline{\varphi = 5,091^\circ}}$$

Matematika v praksi, PrM, izpit

25. avgust 2016

1. naloga (25 točk)

Oseba se zanima za nakup avtomobila po ceni 12000 eur. Ker njeni prihranki znašajo le 2500 eur, se obrne na banko za najem kredita, s katerim bi poplačala razliko. Ponudijo ji kredit z nespremenljivo letno obrestno mero 3,2% in mesečnim obrestovanjem.

a) Kolikšen bo mesečni obrok (anuiteta), če želi oseba kredit odplačati po 1 letu? Koliko denarja v tem primeru v resnici plača za avtomobil, če upoštevate še razne stroške pri sklenitvi kredita v velikosti 47 eur?

b) Oseba si lahko privošči le mesečni obrok v višini 200 eur. Kako dolgo bi morala odplačevati kredit?

2. naloga (25 točk)

Igralci A, B in C si želijo pravično razdeliti predmete P1, P2, P3 in P4. Odločijo se za Steinhaus-Knasterjev postopek zapečatenih ponudb. Igralci dajo naslednje ponudbe.

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
A	700	700	400	700
B	550	1100	300	750
C	500	400	500	850

a) Za vsak predmet določite, kdo ga prejme!

b) Kolikšno denarno nadomestilo mora posamezen igralec doplačati ali prejeti? Ostane kaj denarja za delitev?

c) S tabelo ponazori, kako ocenjuje posamezen igralec prejeto vrednost pri tem postopku za vse tri! Ali pride do zavisti? Odgovor utemelji!

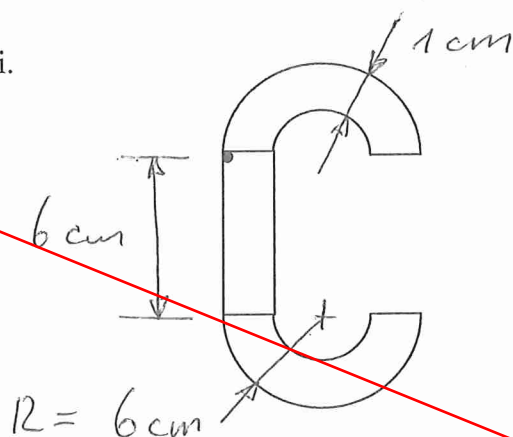
3. naloga (25 točk)

Na volitvah je 42 volilcev podelilo kandidatom A, B, C in D glasove, kot je podano v tabeli. Določite zmagovalca volitev po sistemu primerjave 1:1 (Condorchet-ov kriterij)!

Št. glas.	16	12	8	4	2
1. izbira	A	C	D	B	B
2. izbira	B	D	B	C	A
3. izbira	C	B	A	D	C
4. izbira	D	A	C	A	D

4. naloga (25 točk)

Pod kakšnim kotem glede na vertikalo visi pločevinasti obesek v obliki črke C? Obesišče je v črno označeni piki. Nasvet: poiščite težišče lika in izračunajte kot med vertikalo in zveznico težišča in obesišča.



$$1) \text{ Kredit: } 12\,000 - 2500 = 9500 \text{ Eur} = a_0$$

$$r_{\text{letni}} = 1,032 \quad (3,2\% \text{ letno})$$

$$m = 12 \quad (\text{kapitalizacijska doba 1 mesec})$$

$$r_{\text{mes}} = \sqrt[m]{r_{\text{letni}}} = \sqrt[12]{1,032} = 1,002628$$

$$a) \text{ annuiteta: } b = a_0 \frac{r_{\text{mes}}^m (r_{\text{mes}} - 1)}{r_{\text{mes}}^m - 1} = \underline{\underline{805,26 \text{ Eur}}}$$

za avto plača:

$$2500 + 12 \times b + 47 = \underline{\underline{12210 \text{ Eur}}}$$

b) če je mesečni obrok 200 Eur:

iz enačbe annitete: $b = a_0 \frac{r_{\text{mes}}^m (r_{\text{mes}} - 1)}{r_{\text{mes}}^m - 1}$

$$b r_{\text{mes}}^m - b = a_0 (r_{\text{mes}} - 1) \cdot r_{\text{mes}}^m$$

$$\underbrace{[b - a_0 (r_{\text{mes}} - 1)]}_{C} r_{\text{mes}}^m = b$$

$$r_{\text{mes}}^m = b/C ; \quad m \ln(r_{\text{mes}}) = \ln(b/C)$$

$$m = \frac{\ln(b/C)}{\ln(r_{\text{mes}})}$$

$$C = 200 - 9500 (1,002628 - 1) = 175,03 \text{ Eur}$$

$$m = \frac{\ln(200/175,03)}{\ln(1,002628)} = 50,8$$

Vračati bi moral 51 mesec (4 leta, 3 mesce)

2)

	P1	P2	P3	P4	Vrednost
A	700	700	400	700	2500
B	550	1100	300	750	2700
C	500	400	500	850	2250

a) P1 dobi A, P2 dobi B, P3 in P4 pa C

b)

	prop. del	dobi s precln.	plača	dobi
A	833,3	700	/	133,3
B	900	1100	200	/
C	750	1350	600	/
		Σ	800	133,3

razdelijo si $\text{€} (800 - 133,3) / 3 = \underline{222,2 \text{ Eur}}$

c)

	so igralcu		
	A	B	C
A	833,3	$700 - 200 = 500$	$1100 - 600 = 500$
B	$550 + 133 = 683,3$	900	$1050 - 600 = 450$
C	$500 + 133 = 633,3$	$400 - 200 = 200$	750

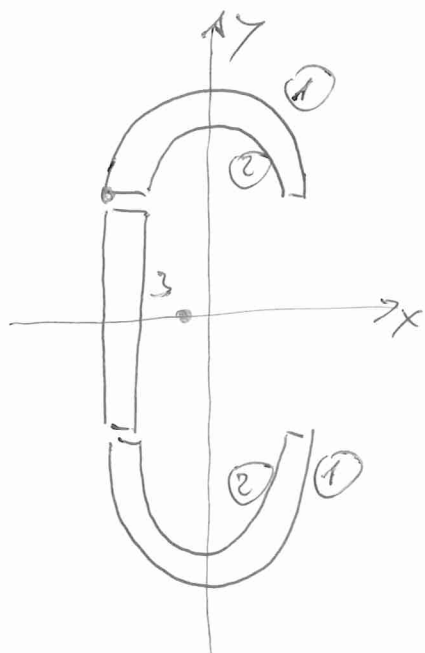
ni za visti

3)

	A	B	C	D	A	B	C	D	Σ
A	—	16	26	18	—	0	1	0	1
B	26	—	30	22	1	—	1	1	3
C	16	12	—	34	0	0	—	1	1
D	24	20	8	—	1	0	0	—	1

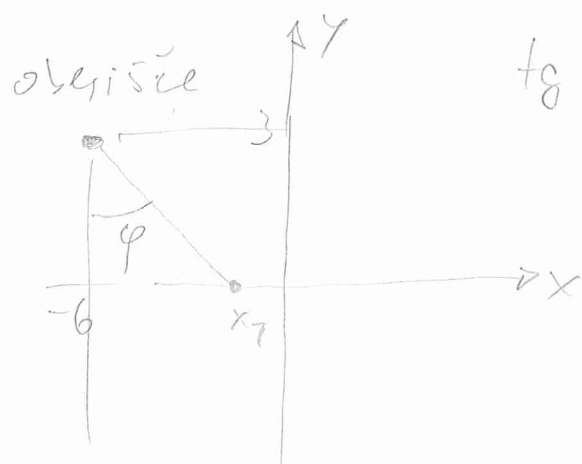
2 magovalec je **B**

4)



i	$A_i [\text{cm}^2]$	$x_i [\text{cm}]$	$A_i x_i$
1	36π	0	0
2	-25π	0	0
3	6	-5,5	-33
Σ	40,55		-33

$$x_T = \frac{-33}{40,55} = -0,8136 \text{ cm}$$



$$\tan \varphi = \frac{-6 - x_T}{3}; \quad \varphi = \underline{59,953^\circ}$$