

6 Povezanost

Naloga 6.1. Kateri izmed prostorov

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \vee y \in \mathbb{Q}\},$$

$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\},$$

$$Z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}\}$$

so povezani oz. povezani s potmi?

Naloga 6.2. Naj bo X topološki prostor, $A \subseteq X$ podmnožica in $P \subseteq X$ povezan podprostor. Dokažite: če P seka tako A kot A^c , potem seka tudi mejo podmnožice A .

Naloga 6.3. Dokažite: vsaki dve točki povezanega metričnega prostora imata točko, ki je enako oddaljena od obeh.

Naloga 6.4. Pokažite, da $[0, 1]$ in S^1 nista homeomorfna netrivialnemu produktu.

Naloga 6.5. Naj bo $X := \mathbb{N} \setminus \{1\}$ in za vsak $n \in X$ naj bo $B_n := \{k \in X \mid k \text{ deli } n\}$.

- (a) Pokažite, da je $\mathcal{B} := \{B_n \mid n \in X\}$ baza neke topologije τ na X .
- (b) Katerim ločljivostnim lastnostim zadošča prostor (X, τ) ?
- (c) Ali je prostor (X, τ) povezan?

Naloga 6.6. Neprazno množico X opremimo s topologijo končnih komplementov. Dokažite, da je prostor X povezan natanko tedaj, ko je neskončen ali pa ima en sam element.

Naloga 6.7. Naj bo X topološki prostor in naj bo $S \subseteq X$.

- (a) Dokažite: če je X metrizabilen, tedaj je podprostor S nepovezan natanko tedaj, ko obstajata disjunktni odprti množici U in V v X , da velja $U \cap S \neq \emptyset$, $V \cap S \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ in $S \subseteq U \cup V$.
- (b) Poiščite primer topološkega prostora X , za katerega klasifikacija nepovezanih podprostorov iz prejšnje točke ne velja.

Naloga 6.8. Za topološki prostor rečemo, da zadošča pogoju T_5 , kadar so vsi njegovi podprostorji T_4 . Dokazite, da so naslednje trditve ekvivalentne za vsak topološki prostor X .

- (a) Prostor X je T_5 .
- (b) Za vsaki podmnožici $A, B \subseteq X$, za kateri velja $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, obstajata odprti disjunktni podmnožici U in $V \subset X$, ki ostro ločita A in B .
- (c) Za prostor X velja klasifikacija nepovezanih podprostorov iz naloge 6.7.

Naloga 6.9. Naslednje prostore narišite in ugotovite, ali so povezani, povezani s potmi, lokalno povezani oz. lokalno povezani s potmi.

$$\begin{aligned}
 X &:= \left(\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{x}{n}\right) \mid x \in [0, 1] \right\} \\
 Y &:= \{(0, 0)\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\} \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cup \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \cup \left\{ -1 - \frac{1}{n} \right\} \times \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \cup \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n+1}\right] \times \left\{ -\frac{1}{n+1} \right\} \right) \\
 Z &:= Y \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \right)
 \end{aligned}$$

Naloga 6.10. Naj bo $a \in [0, \infty)$. Definirajmo prostor

$$X_a := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup (\{0\} \times [0, a]) \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

- (a) Dokazite, da je X_a povezan prostor.
- (b) Poiščite potreben in zadosten pogoj na število a , da je prostor X_a lokalno povezan.

Naloga 6.11. Naj bo $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje realnih števil. Definirajmo prostor

$$X_{\underline{a}} := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \times [0, 1] \right) \cup ([0, \infty) \times \{0\}).$$

- (a) Poiščite potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\underline{a}$, da je prostor $X_{\underline{a}}$ povezan.
- (b) Poiščite potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\underline{a}$, da je prostor $X_{\underline{a}}$ lokalno povezan.