

5 Hitrost ladij

5.1 Vaja

Dve ladji plujeta po vzporednikih: prva po 48N, druga pa po 15S. Plujeta tako, da sta ob vsakem času na istem poldnevniku. Hitrost prve ladje je 15 vozlov.

1. Morski voz je hitrost s katero se v eni uri premaknemo za eno morsko miljo. Izračunaj hitrost prve ladje (v kilometrih na uro), če veš, da je dolžina morske milje enaka dolžini loka na Zemljinem ekvatorju, ki pripada središčnemu kotu $1'$. Upoštevaj kot polmer Zemlje 6378 km.

2. Izračunaj hitrost druge ladje.

a) morski voz je 1.855 km/h; prva ladja ima hitrost 27,8 km/h; b) 21,84 vozlov ali 40,518 km/h. Vaja iz W.M. Smart, *Spherical Astronomy*, str.5, vaja 3.

1. Najprej zapišimo morsko miljo, za katero vemo, da je enaka dolžini loka na Zemljinem ekvatorju, ki pripada središčnemu kotu $1'$. Dolžina morske milje bo torej

$$1' \cdot R_Z = 2,907 \cdot 10^{-4} \cdot 6378 \text{ km} = 1,85 \text{ km}. \quad (22)$$

Hitrost prve ladje ($v_A = 15$ vozlov) lahko zapišemo v km/h kot

$$v_A = 15 \text{ vozlov} = 15 \cdot \frac{1 \text{ morska milja}}{h} = 15 \cdot 1,85 \text{ km/h} = 27,8 \text{ km/h}. \quad (23)$$

2. Zato da izračunamo hitrost druge ladje moramo premisliti kaj pomeni, da *sta ob vsakem času na istem poldnevniku*. Ladji se ob časih t_1 in t_2 premakneta iz začetnega na končni poldnevnik, kar pomeni da se gibljeta z isto kotno hitrostjo, torej

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \text{konst.}, \quad (24)$$

kjer je α razlika v zemljepisni dolžini med končnim in začetnim poldnevnikom.

Izračunati moramo še kolikšna je pot ladje po Zemljinem površju. Radij Zemlje na zemljepisni širini θ_A izrazimo z

$$R_A = R_Z \cdot \cos \theta_A, \quad (25)$$

medtem ko je na drugi zemljepisni širini enak

$$R_B = R_Z \cdot \cos \theta_B. \quad (26)$$

Če je ω konstanten, lahko zapišemo zvezo med hitrostmi in radiji R_A ter R_B in sicer

$$\omega = \frac{v_A}{R_Z \cdot \cos \theta_A} = \frac{v_B}{R_Z \cdot \cos \theta_B}. \quad (27)$$

Hitrost druge ladje je potemtakem

$$v_B = v_A \frac{\cos \theta_B}{\cos \theta_A} = 21,84 \text{ vozlov} = 40,5 \text{ km/h}. \quad (28)$$

6 Domača naloga

6.1 Vaja

Kraja A in B se nahajata na isti zemljepisni širini θ , njuna razlika v zemljepisnih dolžinah pa je $2l$. Pokaži, da doseže glavni lok skozi A in B najvišjo zemljepisno širino, ko je enak

$$\arctan\left(\tan\theta\frac{1}{\cos l}\right).$$

Vaja iz knjige W.M. Smart, *Spherical Astronomy*, str.5, vaja 4. Več vaj iz sferne trigonometrije najdete v tej knjigi.

Podatki:

$$\gamma = 2l$$

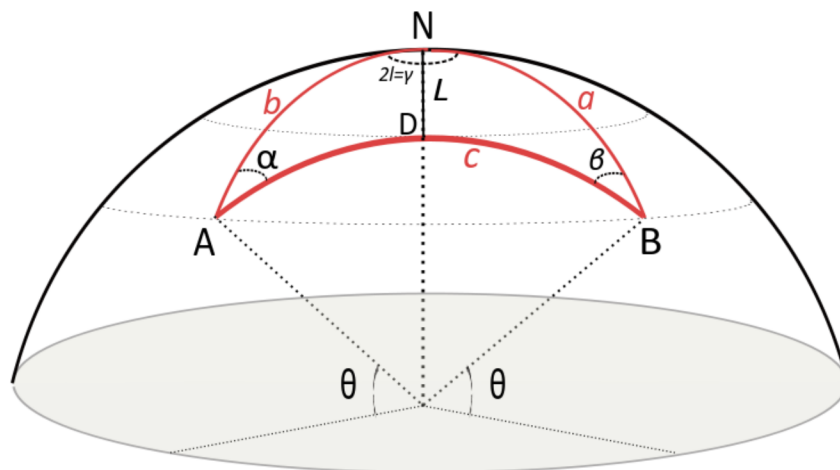
$$a = b = 90^\circ - \theta$$

$$\alpha = \beta$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

Kraj, kjer bo zemljepisna širina najvišja, se nahaja na najvišjem vzporedniku in sicer v točki, kjer se vzporednik dotika glavnega loka med A in B (c). V taisti točki (glej priloženo skico) bo med lokom L (ki je del poldnevnik) in glavnim lokom c pravi kot. (To lahko dokažeš na enostaven način!)



Najvišja geografska širina bo v našem primeru ravno na polovici glavnega loka c . To lahko enostavno preverimo in sicer tako da s črko D označimo točko, kjer se iskani vzporednik dotika glavnega loka c . Severni pol označimo s črko N. Črke A, D in N so

ogljšča pravokotnega trikotnika (prav tako B, D in N). Polovica kota v polu je enaka $\gamma/2 = l$, dolžina poldnevnik od N do D pa je enaka $L = \pi/2 - \theta'$.

Če s kotom β označimo kot pri točki B potem velja sinusni izrek na sferi za mali trikotnik (B,D,N)

$$\frac{\sin \beta}{\sin L} = \frac{\sin \gamma/2}{\sin c/2} \quad (29)$$

in za veliki trikotnik (A,B,N)

$$\frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} . \quad (30)$$

Iz ene enačbe izrazimo $\sin \beta$ in ga vstavimo v drugo enačbo, od koder dobimo

$$\frac{\sin b \sin \gamma}{\sin L \sin c} = \frac{\sin \gamma/2}{\sin c/2} . \quad (31)$$

Sedaj upoštevamo še, da velja $\gamma = 2l$ in uporabimo adicijske izreke za polovične kote

$$\sin 2l = 2 \sin l \cos l, \quad \sin c = 2 \sin c/2 \cos c/2 \quad (32)$$

od koder sledi

$$\sin L = \cos \theta' = \frac{\cos l}{\cos c/2} \cos \theta . \quad (33)$$

Iz kozinusnega izreka za mali trikotnik velja tudi

$$\cos c/2 = \cos L \cos b + \sin L \sin b \cos \gamma/2 . \quad (34)$$

Če združimo zadnji dve enačbi in preoblikujemo dobimo

$$\tan \theta' = \tan \theta \frac{1}{\cos l} . \quad (35)$$

8 Letalo v Johannesburg

To ne!

Z letalom letimo iz Johannesburga ($\varphi_A = -26^\circ 8'$, $\lambda_A = 27^\circ 54'$) vedno naravnost pod kotom 9.67° v smeri severa proti zahodu. Po 8171 km pristanemo. Kolikšni sta geografska širina in dolžina kraja, kjer smo pristali? Polmer Zemlje je $R_Z = 6400$ km. [Rešitev: $\varphi_B = 46^\circ 2' 37''$ N, $\lambda_B = 14^\circ 31' 38''$ E. Poglej na zemljevidu kje to je!]

Podatki:

$$\varphi_A = -28^\circ 8', \lambda_A = 27^\circ 54'$$

$$\alpha = 9.71^\circ$$

$$b = 90^\circ - \varphi$$

$$l = 2522 \text{ km}$$

Najprej pazimo, da pravilno narišemo skico: če ne poznamo geografije lahko vsaj iz koordinat sklepamo, da se Johannesburg nahaja na južni polobli. Vaja pravi, da letimo pod kotom α , ki ga merimo od severa proti zahodu.

Kotna razdalja c , ki jo bomo prepotovali, bo enaka

$$l = R c \rightarrow c = \frac{l}{R_Z} = 22^\circ 34' 55'' . \quad (47)$$

Nato izračunamo dolžino stranice a sferičnega trikotnika, ki je povezana z zemljepisno širino kraja B, v katerega potujemo. Pri tem upoštevamo, da je

$$a = 90^\circ - \varphi_B \quad (48)$$

in

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha . \quad (49)$$

Geografska širina φ_B kraja, v katerega letimo, je $46^\circ 2' 37''$.

Za računanje geografske dolžine λ_B moramo najprej izračunati kot γ , in sicer iz sinusnega izreka

$$\frac{\sin \gamma}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \quad (50)$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin a} , \quad (51)$$

Torej je $\gamma = 13^\circ 22' 22''$.

Iz enostavne zveze

$$\lambda_B = \lambda_A - \gamma \quad (52)$$

dobimo

$$\lambda_B = 14^\circ 31' 38'' . \quad (53)$$

10 Najsevernejša točka poleta

Letalo potuje iz letališča v Brniku ($\varphi = +46^\circ 13, 87', \lambda = +14^\circ 27, 29'$) v Ciudad de Mexico ($\varphi = +19^\circ 26' 21.84'', \lambda = -99^\circ 7' 56.59''$).

1. Kolikšna bo največja zemljepisna širina poti letala?
2. Kolikšen del celotne poti (v kilometrih) bo letalo opravilo, ko bo doseglo najsevernejšo točko poleta?
3. Pilot iz Brnika zgreši smer leta in ob vzletu obrne letalo 5° južneje od predvidenega. Koliko se bo spremenila geografska dolžina najsevernejše točke poleta?

Podatki:

Brnik – $\varphi_1 = +46^\circ 13, 87', \lambda_1 = +14^\circ 27, 29'$

Ciudad de Mexico – $\varphi_2 = +19^\circ 26' 21.84'', \lambda_2 = -99^\circ 7' 56.59''$

Trikotnik Brnik, Ciudad, severni pol:

- kot A ima vrh nad Brnikom, nasprotnoležeča stranica je a
- kot C ima vrh v Ciudad de Mexico, nasprotnoležeča stranica je c
- kot B ima vrh v severnem polu, nasprotnoležeča stranica je b

$$B = \Delta\lambda = |\lambda_1 - \lambda_2| = 113, 587219444444^\circ$$

$$c = 90^\circ - 46^\circ 13, 87' = 43, 768833333333$$

$$a = 90^\circ - 19^\circ 26' 21, 84'' = 70, 560600000000$$

1. V najvišji točki poti (na točki z najvišjo geografsko širino) bo poldnevnik potekal pravokotno na pot letala. Od severnega pola do te točke lok poimenujemo z x in skupaj s stranico c in delom stranice b (označimo ga z b_1) zopet tvori sferični trikotnik. Notranje kote poimenujemo B_1, A in C_1 , kjer je $C_1 = 90^\circ$.

S pomočjo sinusnega izreka zapišemo

$$\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C_1} = \frac{\sin c}{\sin 90^\circ} = \sin c \quad (54)$$

in izračunamo razdaljo loka x

$$x = \arcsin(\sin c \cdot \sin A) \quad (55)$$

Kota A še ne poznamo, predno ga izračunamo pa potrebujemo še vrednost stranice b . Pomagamo si s kozinusnim izrekom

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

in dobimo $b = 91^\circ 11' 7.28''$. S sinusnim izrekom pa dobimo:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

in vrednost $A = 59^\circ 48' 48.78''$.

Zadnjo vrednost vstavimo v formulo 55 in dobimo vrednost $x = 36.723^\circ$. Največja zemljepisna širina poti letala je torej $90^\circ - x = 53.277^\circ$.

2. Da izračunamo del celotne poti, ki jo opravi letalo iz Brnika do najsevernejše točke poleta, moramo izraziti stranico b_1 . Najdemo jo tako, da izrazimo kozinusni izrek za stranico c (ker je nasprotnoležeči kot $C_1 = 90^\circ$ in torej $\cos C_1 = 0$).

$$\cos c = \cos b_1 \cdot \cos x + \sin b_1 \cdot \sin x \cdot \cos C_1 = \cos b_1 \cdot \cos x \quad (56)$$

Torej je

$$\cos b_1 = \frac{\cos c}{\cos x} \quad (57)$$

in $b_1 = 25.717^\circ$. V kilometrih je to $b_1/180^\circ \cdot \pi \cdot R_{Zemlje} = b_{1,rad} \cdot 6400 = 0.448 \cdot 6400 = 2872.7$ km.

3. Glavne vrednosti smo že izračunali in izpeljali enačbe. Novi kot, pod katerim bo letelo letalo, bo sedaj $A' = A + 5^\circ = 64^\circ 48' 48.47''$. Spet bomo uporabili prejšnjo enačbo, torej

$$x = \arcsin(\sin c \cdot \sin A')$$

in dobili vrednost 38.754° . Geografska širina najsevernejše točke bo potemtakem enaka $90^\circ - x = 51.24557^\circ$.

16 Višina in azimut zvezde

Tretjega junija 1998 ob 23.uri po lokalnem času opazujemo zvezdo η Velikega Medveda, ki ima rektascenzijo $\alpha = 13^h 47^m 29^s$ in deklinacijo $\delta = 49^\circ 19' 32''$. Z računom oceni, kako visoko nad obzorjem in v kateri smeri je tedaj, če opazujemo iz Ljubljane.

Podatki:

$$\varphi = 46.04^\circ$$

$$\lambda = 14.527^\circ = 0.968^h$$

$$\alpha = 13^h 47^m 29^s = 13,79^h$$

$$\delta = 49^\circ 19' 32'' = 49,32^\circ$$

Iščemo višino h nad obzorjem in smer (azimut A) zvezde, ki jo gledamo iz Ljubljane.

Da bi lahko določili višino nad obzorjem s pomočjo višinskega izreka potrebujemo časovni kot zvezde v času opazovanja.

Zvezdni čas 3.6 ob $0^h UT$ bomo ocenili na sledeči način: ker vemo, da zvezdni čas narašča za 4^m na dan in ker poznamo njegovo vrednost ob poletnem solsticiju zapišemo lahko

$$S(t_1) |_{3.6} = S(t_1) |_{21.6} - \frac{4^m}{\text{dan}} 18 \text{dni} = 18^h - 1,2^h = 16,8^h. \quad (89)$$

Ker vemo, da velja zveza med časovnim kotom H , zvezdnim časom S in rektascenzijo α , ocenimo kolikšen je bil zvezdni čas 3.6 ob uri $t_1 = 23^h$:

$$S(t_1) |_{3.6} = S(0^h UT) |_{3.6} + \lambda + (t_1 - t_0) \gamma \quad (90)$$

$$= 16,8^h + 0.968^h + (23^h - 2^h) \frac{366.2422}{365.2422} \quad (91)$$

$$= 38,82^h = 14,82^h \quad (92)$$

Junija je v veljavi poletni čas, zato smo uporabili $t_0 = 2^h$.

Časovni kot za η Velikega medveda dne 3.6.1998 ob 23^h bo

$$\begin{aligned} H |_{3.6}(t_1) &= S(t_1) |_{3.6} - \alpha \\ &= 14,82^h - 13,79^h \\ &= 1,03^h = 15,53^\circ. \end{aligned}$$

Iz višinskega izreka

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H = 0,9818, \quad (93)$$

izračunamo višino zvezde, $h = 79,06^\circ$.

Iz azimutne enačbe izračunamo

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h} = 0,3918 \quad (94)$$

(rešitvi sta $A = 66,9^\circ$ oz. $113,1^\circ$), iz sinusne enačbe za kozinus pa

$$\sin A = -\sin H \frac{\cos \delta}{\cos h} = -0,9196 \quad (95)$$

(rešitvi sta $A = 293,14^\circ$ oz. $66,86^\circ$).

Ker velja

$$\tan(A/2) = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = 0,6606 \quad (96)$$

dobimo $A = 66,9^\circ$.

17 ...

Neka zvezda je na nebu 9^h40^m . Kje zaide, če jo opazujemo iz Ljubljane?

Podatki:

$$\varphi = 46.04^\circ$$

$$\lambda = 14.527^\circ$$

$$\Delta t = 9^h40^m$$

Če poznamo Δt lahko izračunamo časovni kot ob vzhodu/zahodu in sicer tako, da poznani interval razdelimo na dva dela (od vzhoda do kulminacije, ter od kulminacije do zahoda zvezde) in pomnožimo s faktorjem γ . Časovni kot ob vzhodu/zahodu je

$$H_{v,z} = \pm \frac{\Delta H}{2} = \pm \frac{\gamma \Delta t}{2}. \quad (97)$$

$$H_{v,z} = \pm 4,84^h = \pm 4^h50^m. \quad (98)$$

Ker poznamo časovni kot ob zahodu, lahko zapišemo zvezo med H_z , δ in φ kot

$$\cos H_z = -\tan \delta \tan \varphi \quad (99)$$

in izračunamo deklinacijo zvezde:

$$\tan \delta = -\frac{\cos H_z}{\tan \varphi} = -\frac{\cos 72.6^\circ}{\tan 46.04^\circ} = -0.2884 \quad (100)$$

$$\delta = -16.08^\circ. \quad (101)$$

Sinusni izrek za azimut, kjer zvezda zahaja (A_z), zapišemo kot

$$\sin A_z = \sin H_z \frac{\cos \delta}{\cos h_z} = \sin H_z \cos \delta = 0.9169, \quad (102)$$

saj je višina zvezde, ki zahaja $h_z = 0^\circ$.

Iz azimutne enačbe pa dobimo

$$\cos A_z = \frac{\sin \varphi \sin h_z - \sin \delta}{\cos \varphi \cos h_z} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} = -0,3990. \quad (103)$$

Ker je

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} = \tan (A/2) \quad (104)$$

dobimo $A = 113,5^\circ = 7^h34^m$.