

Zaporedja

1. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2}{1+n}.$$

- (a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja a_n .
- (b) Obravnavaj omejenost zaporedja a_n .
- (c) Ali zaporedje konvergira?

Rešitev:

- (a) Zaporedje je strogo naraščajoče.
- (b) Zaporedje je navzdol omejeno z $\frac{1}{2}$.
- (c) Zaporedje ni konvergentno, ker ni navzgor omejeno.

2. Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{n}{1+n^2}.$$

- (a) Obravnavaj naraščanje in padanje zaporedja a_n .
- (b) Obravnavaj omejenost zaporedja a_n .
- (c) Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (d) Za katere $n \in \mathbb{N}$ se a_n razlikuje od $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ za manj kot $\frac{1}{100}$?

Rešitev:

- (a) Zaporedje je strogo padajoče.
- (b) Zaporedje je omejeno. Navzdol z 0, navzgor z $\frac{1}{2}$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (d) Od 100. člena dalje.

3. Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n-1}{n^2-2}$$

za $n \geq 2$. Pokaži, da je zaporedje padajoče, omejeno in konvergentno. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Rešitev: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ in $|a_n| < \frac{1}{100}$ pri $n \geq 300$.

4. Po definiciji preveri, da velja:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+n} = 1.$

V obeh primerih določi kateri členi zaporedja se razlikujejo od limite za največ $\frac{1}{10}$.

Rešitev:

(a) Od 8. člena dalje.

(b) Od 8. člena dalje.

5. Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n-3}{n+1}.$$

Pokaži s pomočjo definicije limite, da 1 ne more biti limita tega zaporedja, pač pa je to 2.

6. Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4+3n^2+n}{1-2n^4}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+7n+1}}{\sqrt{n^2+2n+n}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^n}{1-3^n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-3^{-n}+n^2+1}{2^{-n}+3^n+1}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+7n+1}-n}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2+1}$

Rešitev:

(a) -2

(b) $\frac{1}{2}$

(c) -1

(d) 0

(e) 1

(f) $\frac{1}{2}$

(g) $\frac{7}{2}$

- (h) $\frac{1}{3}$
 (i) 0

7. Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira.

- (a) $a_n = (-1)^n$
 (b) $b_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Rešitev:

- (a) Stekališči sta -1 (ki je limita členov a_{2k-1}) in 1 (ki je limita členov a_{2k}).
 (b) Stekališča so 0 (ki je limita členov b_{4k-2}), 1 (ki je limita členov b_{2k-1}) in 2 (ki je limita členov b_{4k}).

8. Dano je zaporedje s prvim členom $a_1 = 0$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{5}.$$

Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in omejeno. Limita je enaka $\frac{1}{3}$.

9. Dano je zaporedje s prvim členom $a_1 = 0$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} + 1).$$

Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in omejeno. Limita je enaka 1 .

10. Dano je zaporedje

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}}_n.$$

Določi a_1 in a_2 . Dokaži, da zaporedje a_n konvergira in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Zaporedje je naraščajoče in omejeno. Limita je enaka $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

11. Dano je zaporedje s prvim členom $a_1 = 2$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je padajoče in omejeno. Limita je enaka $\sqrt{2}$.

12. Zaporedje je podano z začetnim členom $a_1 = a > 0$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4}.$$

- (a) Ugotovi ali zaporedje konvergira za $a = 1$ in v primeru konvergence določi še limito $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (b) Grafično preveri konvergenco za poljuben $a > 0$.

Rešitev:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$
- (b) Zaporedje konvergira proti 2 za vse $a \in (0, 2)$.

13. Dano je zaporedje s prvima členoma $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}.$$

Pokaži, da je zaporedje monotono in omejeno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in omejeno. Limita je enaka 4.

14. Izračunaj naslednje limite.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+3}$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{3n-1}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n+1}\right)^{n+5}$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\ln(n^3 + 4) - 3 \ln n)$

Rešitev:

- (a) e^4
- (b) e^3
- (c) e^{-1}
- (d) e^3
- (e) 0

15. Določi vsa stekališča zaporedja

$$a_n = e^{\sin \frac{n\pi}{2}} - \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)^{(-1)^n n^2 + 2n}.$$

Rešitev: Stekališča so $1 - e^{-1}$ (ki je limita členov a_{2k}), 0 (ki je limita členov b_{4k+1}) in $e^{-1} - e$ (ki je limita členov b_{4k+3}).

16. Izračunaj naslednji limiti:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n}$

Rešitev:

(a) 1

(b) 1

17. Podani so prvi trije členi zaporedja $x^2 - 1$, $\sqrt{x - \sqrt{x+1}}$, $\frac{1}{2x+2}$.

(a) Izračunaj x , da bo zaporedje geometrijsko.

(b) Za x iz prejšnje točke zapiši splošni člen tega zaporedja.

Rešitev:

(a) $x = 3$

(b) $a_n = \frac{1}{8^{n-2}}$

18. Dokaži, da so naslednja zaporedja Cauchyjeva.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{2n+1}{3n}$

(c) $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$

19. Z uporabo Cauchyjevega kriterija dokaži, da zaporedje

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ni konvergentno.

Namig: Oglej si razliko $|a_{2n} - a_n|$.