

Afina in projektivna geometrija

Izometrije evklidskih prostorov

Začeli bomo s študijem izometrij evklidske ravnine. To so bijekcije $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ki zadoščajo pogoju

$$d(T_1, T_2) = d(\tau(T_1), \tau(T_2))$$

za vsak par točk $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$. Glede na geometrični pomen je vsaka izometrija ene izmed oblik:

- translacija za nek vektor,
- rotacija okoli neke točke,
- zrcaljenje čez neko premico,
- zrcalni zdrs čez neko premico.

V nadaljevanju bomo spoznali, s kakšnimi predpisi lahko opišemo izometrije evklidske ravnine. Uporabili bomo izrek, ki pravi, da lahko vsako izometrijo $\mathbb{R}^2$ enolično zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $Q \in O(2)$ ortogonalna matrika velikosti 2×2 in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ nek poljuben vektor.

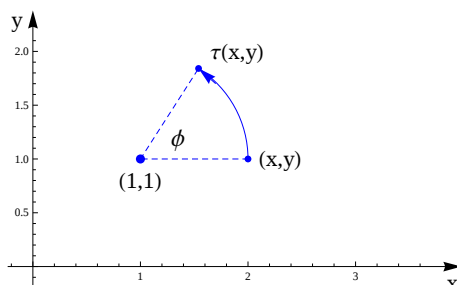
(1) Zapiši predpisa za naslednji izometriji evklidske ravnine:

- rotacija za kot $\phi = 90^\circ$ okoli točke $(1, 1)$,
- zrcaljenje čez premico $x + y = 1$.

Rešitev: (a) Najprej se spomnimo, kako se rotira vektorje v ravnini okoli koordinatnega izhodišča. Rotacijo za kot $\phi \in (0, 2\pi)$ v pozitivni smeri lahko predstavimo z rotacijsko matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Rotacijske matrike so ortogonalne in imajo determinanto enako 1. Obratno pa vsaka 2×2 ortogonalna matrika, ki ima determinanto enako 1, ustreza neki rotaciji R_ϕ , ali pa je identična matrika.



Pri rotaciji okoli poljubne točke si lahko pomagamo s to matriko na naslednji način. Če želimo zavrteti točko (x, y) okoli točke $(1, 1)$, moramo najprej zarotirati vektor $(x-1, y-1)$ (to je vektor od središča vrtenja do točke) s pomočjo matrike R_ϕ , nato pa temu prišteti

še vektor $(1, 1)$. Isti postopek deluje pri rotaciji okoli poljubne točke. Od tod dobimo predpis

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cdot x - \sin \phi \cdot y + 1 - \cos \phi + \sin \phi \\ \sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y + 1 - \cos \phi - \sin \phi \end{bmatrix}.$$

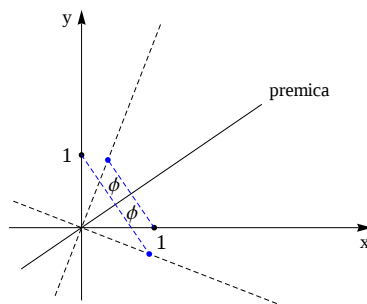
Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos \phi + \sin \phi \\ 1 - \cos \phi - \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Če vstavimo $\phi = 90^\circ$, dobimo, da je

$$\tau(x, y) = (-y + 2, x).$$

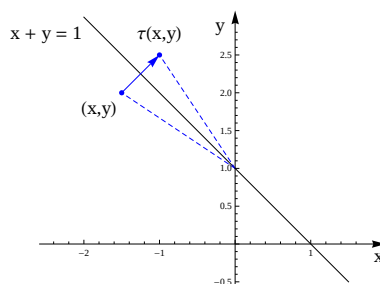
(b) Tudi tokrat bomo najprej pogledali, kako lahko predstavimo zrcaljenje čez premico, ki gre skozi izhodišče in ima smer $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$ za nek $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.



S slike je razvidno, da se točka $(1, 0)$ preslika v točko $(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$, točka $(0, 1)$ pa v točko $(\sin 2\phi, -\cos 2\phi)$. Matrika za zrcaljenje čez premico s smerjo $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$ je torej

$$Z_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

Premica $x + y = 1$ ne poteka skozi izhodišče, z abscisno osjo pa oklepa kot $\phi = -\frac{\pi}{4}$.



Da bi izračunali predpis, najprej izberimo neko točko na premici, npr. točko $(0, 1)$. Zrcalno sliko točke (x, y) čez premico $x + y = 1$ potem dobimo tako, da najprej z matriko $Z_{-\pi/4}$ prezrcalimo vektor $(x, y - 1)$ nato pa prištejemo še vektor $(0, 1)$.

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + 1 \\ -x + 1 \end{bmatrix}.$$

Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko poljubno zrcaljenje zapišemo kot kompozicijo translacije in pa zrcaljenja čez neko premico skozi izhodišče. $\square$

(2) Geometrično opiši naslednje izometrije evklidske ravnine:

(a) $\tau(x, y) = (-y + 1, x - 1),$

(b) $\tau(x, y) = (y - 2, x + 2),$

(c) $\tau(x, y) = (x + 2, -y).$

Rešitev: (a) Najprej zapišimo preslikavo τ kot kompozicijo linearne preslikave in translacije

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

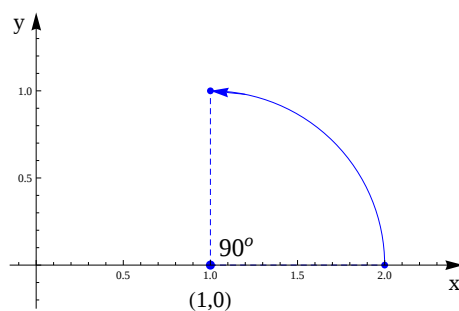
Ker je linearni del preslikave τ rotacija

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

je preslikava τ rotacija za kot $\phi = 90^\circ$ okoli neke točke v ravnini. Ta točka je ravno fiksna točka preslikave τ , zato zanjo velja $\tau(x, y) = (x, y)$, oziroma:

$$\begin{aligned} -y + 1 &= x, \\ x - 1 &= y. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je točka $(1, 0)$, kar pomeni, da preslikava τ predstavlja rotacijo za kot $\phi = 90^\circ$ okoli točke $(1, 0)$.



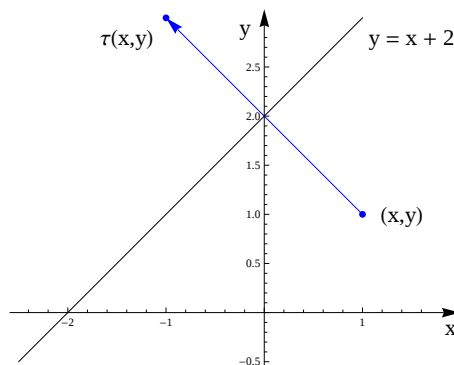
(b) Najprej preslikavo τ zapišimo v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Linearni del preslikave τ je zrcaljenje

$$Z_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

čez simetralo lihih kvadrantov. Vektor translacije $\vec{a} = (-2, 2)$ je pravokoten na to simetralo, zato imamo opravka z zrcaljenjem čez neko premico, ki je vzporedna simetrali lihih kvadrantov. Ta premica je ravno množica točk, ki jih preslikava τ fiksira, vedno pa na njej leži točka $\frac{1}{2}\vec{a}$. V našem primeru gre torej za zrcaljenje čez premico $y = x + 2$.



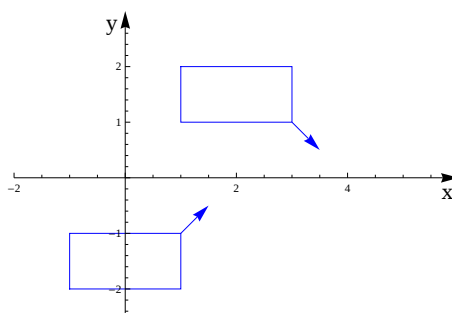
(c) Sedaj lahko zapišemo preslikavo τ v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del preslikave τ je tokrat zrcaljenje

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čez abscisno os, preslikava τ pa je kompozicija tega zrcaljenja in pa translacije vzdolž abscisne osi. Kadar kaže translacijski vektor v smeri premice, čez katero zrcalimo, imamo opravka s tako imenovanim zrcalnim zdrsom.



Za konec si pogledjmo še klasifikacijo izometrij evklidske ravnine.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. V tem primeru je $Q = I$.

2. Rotacije:

Rotacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = R_\phi \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\phi \in (0, 2\pi)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Takšna preslikava ustreza rotaciji za kot ϕ okoli točke S v ravnini, ki je določena z enačbo $\tau(S) = S$.

3. Zrcaljenja:

Zrcaljenja so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$, vektor $\vec{a}$ pa je pravokoten na smer $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$. Takšna preslikava ustreza zrcaljenju čez premico s smerjo $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$, ki gre skozi točko $\frac{\vec{a}}{2}$.

4. Zrcalni zdrsi:

Zrcalni zdrsi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x} + \vec{a},$$

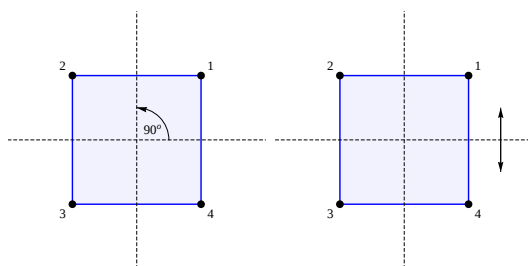
kjer je $\phi \in (-\pi/2, \pi/2]$, vektor $\vec{a}$ pa ni pravokoten na smer $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$. Takšna preslikava ustreza kompoziciji zrcaljenja čez neko premico p s smerjo $\vec{s} = (\cos \phi, \sin \phi)$ ter translacije vzdolž te premice. Dana premica je določena s pogojem $\tau(p) = p$. $\square$

(3) Poišči vse izometrije evklidske ravnine, ki ohranjajo dane množice:

- (a) kvadrat $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$,
- (b) hiperbolo $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,
- (c) kvadratno mrežo $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev: Grupa simetrij podmnožice $A \subset \mathbb{R}^2$ je grupa vseh izometrij $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, za katere je $\tau(A) = A$. V naslednjih primerih bomo izračunali grupe simetrij lika, krivulje in diskretne podmnožice $\mathbb{R}^2$.

(a) Obstaja osem izometrij kvadrata. Identiteta, tri rotacije in štiri zrcaljenja. Vsaka izometrija kvadrata slika oglišča v oglišča, kar pomeni, da jo lahko opišemo s permutacijo oglišč. Izkaže se, da lahko vsako izmed teh izometrij izrazimo z eno rotacijo in z enim zrcaljenjem.



Izberemo lahko na primer:

- $a = (1\ 2\ 3\ 4) \dots$ rotacija za 90° v pozitivni smeri,
- $b = (1\ 4)(2\ 3) \dots$ zrcaljenje preko vodoravnice.

Preostale netrivialne izometrije so potem:

- $a^2 = (1\ 3)(2\ 4) \dots$ rotacija za 180° ,
- $a^3 = (1\ 4\ 3\ 2) \dots$ rotacija za 270° ,
- $ab = (1\ 3)(2)(4) \dots$ zrcaljenje preko simetrane sodih kvadrantov,

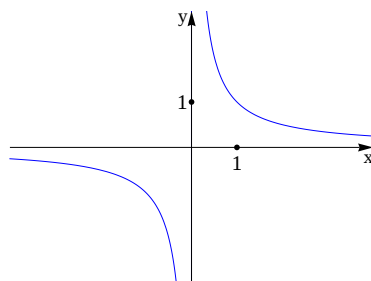
- $a^2b = (1\ 2)(3\ 4) \dots$ zrcaljenje preko navpičnice,
- $a^3b = (2\ 4)(1)(3) \dots$ zrcaljenje preko simetrale lihih kvadrantov.

Grupi izometrij kvadrata rečemo diedrska grupa reda 8 in jo označimo z D_8 . Dejstvo, da lahko vsako izometrijo izrazimo z a in b , pomeni, da je grupa D_8 generirana z elementoma a in b , ki pa še zadoščata nekim pogojem. Reda elementov a in b nam dasta pogoja $a^4 = 1$ in $b^2 = 1$. Poleg teh dveh pa velja še zveza $bab = a^3$. Kompaktno lahko te pogoje strnemo v naslednjem zapisu

$$D_8 = \{a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, bab = a^3\}.$$

Opomba: V splošnem ima grupa izometrij pravilnega n -kotnika $2n$ elementov. Poleg identične preslikave ima še $n - 1$ rotacij in pa n zrcaljenj. Označimo jo z D_{2n} in ji rečemo diedrska grupa reda $2n$. V primeru $n = 3$ je grupa D_6 izomorfna grupi S_3 .

(b) Sedaj iščemo vse preslikave oblike $\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a}$, ki preslikajo hiperbolo nazaj nase.

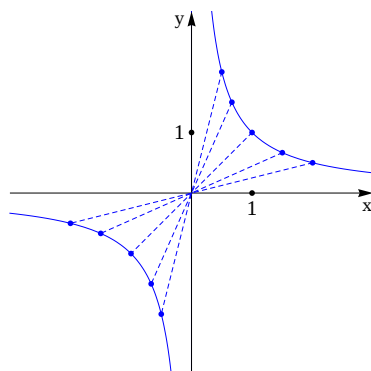


Če hočemo, da izometrija τ preslika hiperbolo nazaj nase, mora τ tudi obe asimptoti preslikati nazaj nase (lahko ju zamenja). Od tod sledi, da τ ohranja izhodišče, kar pomeni, da je $\vec{a} = 0$. Torej nam ostanejo možnosti:

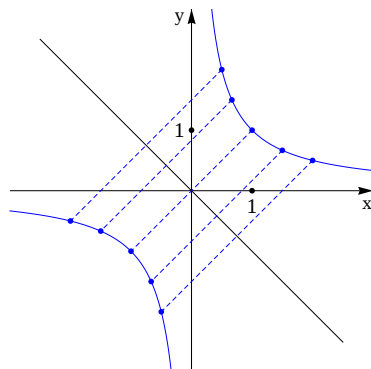
$$\begin{aligned}\tau(\vec{x}) &= R_\phi \vec{x}, \\ \tau(\vec{x}) &= Z_\phi \vec{x},\end{aligned}$$

za nek ϕ . Izmed rotacij pride v poštev rotacija R_π za kot 180° , izmed zrcaljenj pa zrcaljenji $Z_{-\frac{\pi}{4}}$ in $Z_{\frac{\pi}{4}}$ čez simetrali sodih oziroma lihih kvadrantov. Hiperbolo seveda ohranja tudi identična preslikava. Imamo torej štiri preslikave, ki ohranjajo hiperbolo:

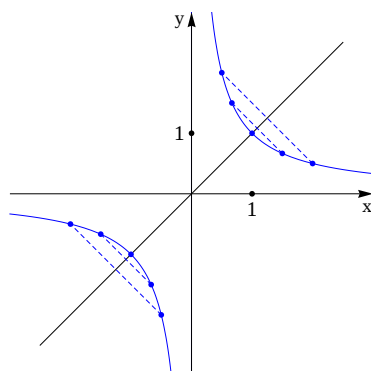
1. Identična preslikava $\tau(x, y) = (x, y)$,
2. Rotacija za kot π okoli koordinatnega izhodišča $\tau(x, y) = (-x, -y)$,



3. Zrcaljenje preko simetrane sodih kvadrantov $\tau(x, y) = (-y, -x)$,

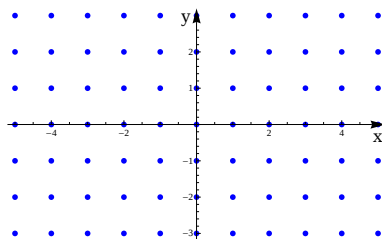


4. Zrcaljenje preko simetrane lihih kvadrantov $\tau(x, y) = (y, x)$.



Grupna simetrija hiperbole je torej izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(c) Sedaj si pogledajmo kvadratno mrežo $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.



Vsaka simetrija te mreže je oblike

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

za primerno izbrana števila a, b, c, d, e in f , ki morajo zadoščati pogoju, da τ preslika K nazaj nase. Iz pogoja, da je

$$\tau(0, 0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

spet element mreže K sledi, da sta e in f celi števili. Podobno sledi iz pogojev $\tau(1, 0) \in K$ in $\tau(0, 1) \in K$, da so tudi a, b, c in d cela števila. Če hočemo, da je matrika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ortogonalna in da ima celoštevilске koeficiente imamo na voljo samo osem možnosti. Poleg identitete so to še štiri zrcaljenja

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tri rotacije

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_{\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Simetrije mreže K , ki so oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x},$$

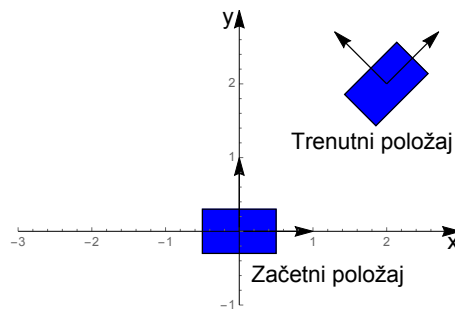
kjer je Q ena izmed omenjenih osmih matrik, tvorijo podgrupo vseh simetrij mreže K . Ustrezajo ravno tistim simetrijam mreže, ki ohranjajo izhodišče in tvorijo grupo, ki je izomorfna diedrski grupi D_8 . Vsako simetrijo mreže pa lahko zapišemo kot kompozicijo translacije za nek vektor s celoštevilskima komponentama in pa simetrije, ki ohranja izhodišče. $\square$

- (4) V evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ so dane točke $A(3, 1)$, $B(0, 0)$ in $C(0, 1)$. Robot vidi te tri točke na položajih $A'(0, -2)$, $B'(-1, 1)$ in $C'(0, 1)$. Določi položaj in orientacijo robota.

Rešitev: Recimo, da imamo robota, ki se lahko premika po evklidski ravnini. Njegova lega je določena, če poznamo koordinate njegovega središča in njegovo orientacijo. To pomeni, da lahko vse možne lege robota parametriziramo z Liejevo grupo

$$\text{SE}(2) = \{\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \tau \text{ je izometrija oblike } \tau(\vec{x}) = R_{\phi}\vec{x} + \vec{a}\} \approx \text{SO}(2) \times \mathbb{R}^2,$$

ki sestoji iz vseh izometrij $\mathbb{R}^2$, ki ohranjajo orientacijo. Z vektorjem $\vec{a}$ opišemo položaj središča robota, s kotom ϕ pa njegovo orientacijo. Lego robota torej opišemo z izometrijo, ki preslika začetni položaj robota v trenutni položaj.



Za poljubno točko T označimo z vektorjem $\vec{x}$ koordinate točke T v fiksnem koordinatnem sistemu, z vektorjem $\vec{x}'$ pa koordinate točke T v koordinatnem sistemu, ki je pripet na robota. Če je τ izometrija, ki opisuje trenutno lego robota, velja med koordinatama zveza $\vec{x} = \tau(\vec{x}')$ oziroma

$$\vec{x} = R_{\phi}\vec{x}' + \vec{a}.$$

Po eni strani nam ta zveza omogoča računanje koordinat točk iz robotove perspektive. V kolikor poznamo koordinate treh nekolinearnih točk v obeh koordinatnih sistemih, pa lahko iz teh podatkov natančno določimo položaj in orientacijo robota.

V matrični obliki lahko zvezo med koordinatami zapišemo v obliki

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Naši podatki so koordinate točk A , B in C v obeh koordinatnih sistemih, privedejo pa nas do sistema 6 linearnih enačb za neznanke a, b, c, d, e, f . Sedaj bomo z upoštevanjem danih podatkov določili lego robota.

Točka A :

Koordinate točke A so $x = 3$, $y = 1$, $x' = 0$ in $y' = -2$. Tako dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 3 &= -2b + e, \\ 1 &= -2d + f. \end{aligned}$$

Točka B :

Koordinate točke B so $x = 0$, $y = 0$, $x' = -1$ in $y' = 1$, dobimo pa sistem enačb:

$$\begin{aligned} 0 &= -a + b + e, \\ 0 &= -c + d + f. \end{aligned}$$

Točka C :

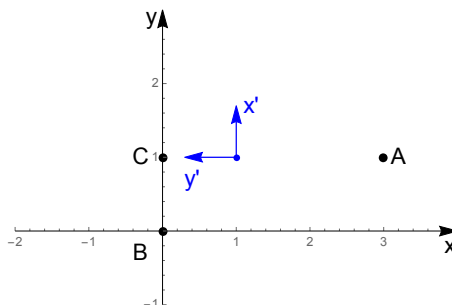
Koordinate točke C so $x = 0$, $y = 1$, $x' = 0$ in $y' = 1$, kar nam da sistem enačb:

$$\begin{aligned} 0 &= b + e, \\ 1 &= d + f. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da ima dobljeni sistem enačb rešitev $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$ in $f = 1$. Od tod sledi, da lahko lego robota opišemo z izometrijo

$$\tau(x', y') = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Robot je torej na položaju $(1, 1)$ in je zavrten za 90° glede na fiksni koordinatni sistem.



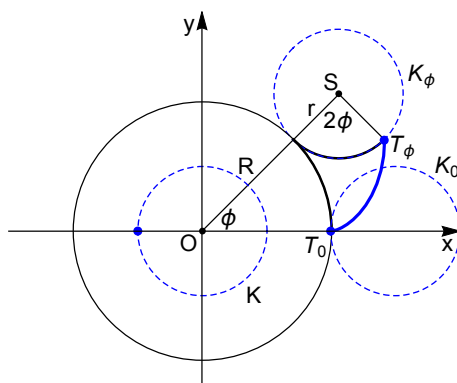
□

- (5) Izračunaj predpis, ki določa kotaljenje kroga s polmerom r po krogu s polmerom $R = 2r$.

Rešitev: Gibanje objekta po evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ lahko opišemo z gladko preslikavo

$$\tau : \mathbb{R} \rightarrow \text{SE}(2),$$

kjer označimo s $\tau(t)$ izometrijo, ki preslika objekt iz referenčnega položaja v trenutni položaj. V nadaljevanju bomo opisali kotaljenje manjšega kroga po obodu večjega kroga.



Za parameter bomo vzeli kot ϕ , našli pa bi radi izometrijo $\tau(\phi)$, ki bo krog iz referenčnega položaja K preslikala na krog K_ϕ . Pogoji kotaljenja, skupaj z dejstvom, da je $R = 2r$, nam pove, da je središčni kot z vrhom pri $S(3r \cos \phi, 3r \sin \phi)$ enak 2ϕ . Iskano izometrijo lahko potem zapišemo v obliki

$$\tau(\phi) = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1,$$

kjer je τ_1 translacija za vektor $\vec{a} = (3r, 0)$, τ_2 rotacija okoli točke $(0, 0)$ za kot ϕ , τ_3 pa rotacija okoli točke S za kot 2ϕ . Predpisi rotacij τ_1 , τ_2 in τ_3 so:

$$\begin{aligned}\tau_1(\vec{x}) &= \vec{x} + \vec{a}, \\ \tau_2(\vec{x}) &= R_\phi \vec{x}, \\ \tau_3(\vec{x}) &= R_{2\phi}(\vec{x} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S.\end{aligned}$$

Kompozicija teh izometrij je potem

$$\tau(\phi)(\vec{x}) = \tau_3(\tau_2(\vec{x} + \vec{a})) = \tau_3(R_\phi \vec{x} + R_\phi \vec{a}) = R_{2\phi}(R_\phi \vec{x} + R_\phi \vec{a} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S.$$

Da si stvari malo poenostavimo, bomo sedaj upoštevali, da je $\vec{r}_S = R_\phi \vec{a}$. Od tod sledi

$$R_{2\phi}(R_\phi \vec{x} + R_\phi \vec{a} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S = R_{3\phi} \vec{x} + R_{3\phi} \vec{a} - R_{3\phi} \vec{a} + R_\phi \vec{a} = R_{3\phi} \vec{x} + R_\phi \vec{a}.$$

Tako dobimo rezultat

$$\tau(\phi)(\vec{x}) = R_{3\phi} \vec{x} + R_\phi \vec{a},$$

od koder sledi, da lahko kotaljenje kroga razstavimo na kroženje njegovega središča z dano kotno hitrostjo in vrtenje kroga okoli središča s trikrat večjo kotno hitrostjo.

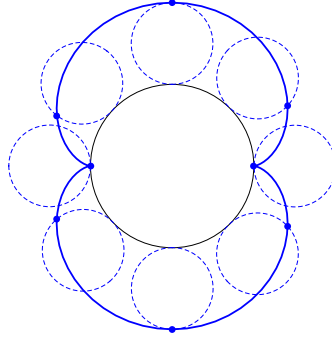
Kot ilustracijo si pogledajmo, kako med kotaljenjem potuje točka, ki ima v referenčnem položaju koordinati $T(-r, 0)$. Ko njene koordinati vstavimo v izometrijo τ , dobimo, da je

$$\tau(\phi)(T) = 3r(\cos \phi, \sin \phi) - r(\cos 3\phi, \sin 3\phi).$$

Tir te točke je epicikloida, ki jo lahko parametriziramo s predpisom:

$$\begin{aligned}x(\phi) &= 3r \cos \phi - r \cos 3\phi, \\y(\phi) &= 3r \sin \phi - r \sin 3\phi\end{aligned}$$

za $\phi \in [0, 2\pi]$.



□

Za konec študija izometrij evklidske ravnine si pogledjmo še nekaj topoloških in algebraičnih lastnosti grupe izometrij. Izometrije $\mathbb{R}^2$ tvorijo grupo

$$E(2) = \{\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a} \mid Q \in O(2), \vec{a} \in \mathbb{R}^2\}.$$

Grupa $E(2)$ je 3-dimenzionalna Liejeva grupa, ki je difeomorfna mnogoterosti $O(2) \times \mathbb{R}^2$. Ima dve povezani komponenti, ki sta obe difeomorfni produktu krožnice in evklidske ravnine. V komponenti enote so translacije in rotacije, v drugi komponenti pa zrcaljenja in zrcalni zdrsi. Translacije tvorijo 2-dimenzionalno zaprto podgrupo, ki je izomorfn $\mathbb{R}^2$, linearne izometrije pa zaprto 1-dimenzionalno podgrupo $O(2)$, ki je difeomorfna disjunktni uniji dveh krožnic. Množica zrcaljenj je zaprta 2-dimenzionalna podmnogoterost, ki pa ni podgrupa.

Simbolično lahko torej vsako izometrijo predstavimo s parom $(Q, \vec{a})$, kjer je $Q \in O(2)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Grupne operacije lahko na parih predstavimo na naslednji način. Enota je par $(I, 0)$, produkt in inverz pa se v tem zapisu izražata s formulama:

$$\begin{aligned}(Q_1, \vec{a}_1)(Q_2, \vec{a}_2) &= (Q_1 Q_2, Q_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1), \\(Q, \vec{a})^{-1} &= (Q^{-1}, -Q^{-1} \vec{a}).\end{aligned}$$

Iz formule za produkt sledi, da grupa izometrij $E(2)$ ni izomorfn direktnemu produktu grup $O(2)$ in $\mathbb{R}^2$. Ker lahko vsako izometrijo enolično zapišemo kot kompozicijo linearne izometrije in translacije, pa je grupa $E(2)$ izomorfn semidirektnemu produktu grup $O(2)$ in $\mathbb{R}^2$, oziroma

$$E(2) \cong O(2) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

- (6) Zapiši matriko za linearno rotacijo za kot $\phi = 60^\circ$ okoli osi $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Rešitev: Linearna rotacija evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ je določena z osjo rotacije, ki poteka skozi koordinatno izhodišče, in kotom. Če hočemo govoriti o pozitivnih oziroma negativnih rotacijah, moramo os orientirati.

Pridruženo rotacijsko matriko $R(\vec{e}, \phi)$ lahko izračunamo na naslednje načine:

- z uporabo prehodne matrike P lahko zapišemo $R(\vec{e}, \phi) = PR(\vec{k}, \phi)P^{-1}$, kjer je $R(\vec{k}, \phi)$ matrika, ki ustreza rotaciji za kot ϕ okoli osi z in ima obliko

$$R(\vec{k}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- z uporabo Rodriguesove formule,
- z uporabo kvaternionov.

Rotacijske matrike so ortogonalne matrike z determinanto ena. Tvorijo grupo

$$\text{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = I, \det(R) = 1\}.$$

Za zapis rotacijske matrike moramo izračunati, kako se preslikajo bazni vektorji. To pa lahko storimo z uporabo Rodriguesove formule

$$R(\vec{e}, \phi)\vec{x} = \cos \phi \vec{x} + (\vec{e} \cdot \vec{x})(1 - \cos \phi)\vec{e} + \sin \phi \vec{e} \times \vec{x},$$

ki pove, kako vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ zavrtimo okrog osi $\vec{e}$ za kot ϕ .

V našem primeru je $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$, zato velja:

$$R(\vec{e}, \phi)\vec{i} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right),$$

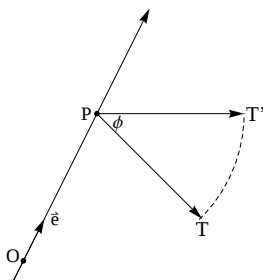
$$R(\vec{e}, \phi)\vec{j} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0, 1, 0) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

$$R(\vec{e}, \phi)\vec{k} = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0, 0, 1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Od tod sledi, da rotaciji $R(\vec{e}, \phi)$ ustreza rotacijska matrika

$$R(\vec{e}, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Opomba: Za izpeljavo Rodriguesove formule najprej označimo s T točko, ki jo vrtimo, s P njeno projekcijo na os vrtenja ter s T' zavrteno točko T .



Najprej opazimo, da velja

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_P + \overrightarrow{PT'}.$$

Pravokotna projekcija točke T na os vrtenja je enaka

$$\vec{r}_P = (\vec{e} \cdot \vec{r}_T) \vec{e}.$$

Vektor $\overrightarrow{PT'}$ je pravokoten na vektor $\vec{e}$, z vektorjem $\overrightarrow{PT}$ oklepa kot ϕ , za njegovo dolžino pa velja $|\overrightarrow{PT'}| = |\overrightarrow{PT}|$. Od tod sledi, da je:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT'} &= \cos \phi \overrightarrow{PT} + \sin \phi \vec{e} \times \overrightarrow{PT}, \\ &= \cos \phi (\vec{r}_T - \vec{r}_P) + \sin \phi \vec{e} \times (\vec{r}_T - \vec{r}_P), \\ &= \cos \phi (\vec{r}_T - (\vec{e} \cdot \vec{r}_T) \vec{e}) + \sin \phi \vec{e} \times \vec{r}_T. \end{aligned}$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{T'} &= (\vec{e} \cdot \vec{r}_T) \vec{e} + \cos \phi (\vec{r}_T - (\vec{e} \cdot \vec{r}_T) \vec{e}) + \sin \phi \vec{e} \times \vec{r}_T, \\ &= \cos \phi \vec{r}_T + (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)(1 - \cos \phi) \vec{e} + \sin \phi \vec{e} \times \vec{r}_T. \end{aligned}$$

Če pišemo $\vec{x} = \vec{r}_T$, od tod dobimo Rodriguesovo formulo. □

(7) Opiši linearni izometriji evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ju določata naslednji matriki:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Q &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \quad Q &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rešitev: Linearne izometrije evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ tvorijo grupo

$$O(3) = \{Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid Q^T Q = I\}.$$

Ta grupa je v topološkem in algebraičnem smislu izomorfná direktnemu produktu

$$O(3) \cong \mathbb{Z}_2 \times SO(3),$$

kjer je $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$. To pomeni, da je vsaka ortogonalna matrika bodisi rotacijska matrika ali pa kompozitum rotacijske matrike z matriko zrcaljenja.

Glede na geometrijski pomen ločimo 3 tipe linearnih izometrij.

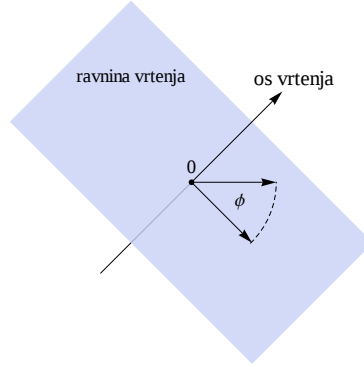
1. Rotacije:

Če je $\det(Q) = 1$, predstavlja matrika Q rotacijo za nek kot ϕ okoli neke osi v prostoru, ki poteka skozi izhodišče in ima smer $\vec{e}$. Torej je $Q = R(\vec{e}, \phi)$.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$ in $\lambda_3 = 1$ za nek $\phi \in [0, \pi]$.
- Kot $\phi \in [0, \pi]$ dobimo iz formule $\cos \phi = \frac{\text{sl}(Q)-1}{2}$.

- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju $\vec{e}$ matrike Q , ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$. Eksplicitno je za $\phi \notin \{0, \pi\}$ to vektor

$$\vec{e} = \frac{1}{2 \sin \phi} \begin{bmatrix} Q_{32} - Q_{23} \\ Q_{13} - Q_{31} \\ Q_{21} - Q_{12} \end{bmatrix}.$$



2. Zrcaljenja:

Če je $\det(Q) = -1$ in $\text{sl}(Q) = 1$, predstavlja matrika Q zrcaljenje čez ravnino v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi koordinatno izhodišče in ima normalo $\vec{n}$. Uporabili bomo oznako $Q = Z(\vec{n})$. Matrika Q zadošča pogojem:

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = -1$.
- Ravnina, preko katere zrcalimo, je lastni podprostor pri lastni vrednosti $\lambda = 1$, njena normala $\vec{n}$ pa kaže v smeri lastnega vektorja pri lastni vrednosti $\lambda = -1$.
- Diagonaliziramo jo lahko v obliki $Z(\vec{n}) = PZ(\vec{k})P^{-1}$, kjer je $Z(\vec{k})$ matrika, ki ustreza zrcaljenju čez ravnino $z = 0$ in ima obliko

$$Z(\vec{k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Zrcalni zasuki:

Če je $\det(Q) = -1$ in $\text{sl}(Q) \neq 1$, je Q zrcalni zasuk oblike $Q = Z(\vec{n}) \circ R(\vec{n}, \phi)$, predstavlja pa kompozicijo rotacije za kot ϕ okoli premice s smerjo $\vec{n}$ in pa zrcaljenja preko ravnine, ki ima to os za normalo.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\phi}$ in $\lambda_3 = -1$ za nek $\phi \in (0, \pi]$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q , ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.
- Kot vrtenja ϕ dobimo z uporabo formule $\cos \phi = \frac{\text{sl}(Q)+1}{2}$.
- Diagonaliziramo jo lahko v obliki $Z(\vec{n}) \circ R(\vec{n}, \phi) = PZ(\vec{k})R(\vec{k}, \phi)P^{-1}$, kjer je

$$Z(\vec{k})R(\vec{k}, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitro lahko preverimo, da je matrika Q ortogonalna, njena determinanta pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Matrika Q torej predstavlja rotacijo okoli neke osi v prostoru. Kot rotacije dobimo z uporabo formule

$$\cos \phi = \frac{\text{sl}(Q) - 1}{2} = 0,$$

od koder sledi, da matrika Q predstavlja rotacijo za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$. Os rotacije se ujema z jedrom matrike $Q - \text{Id}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Os vrtenja je simetrala lihih kvadrantov v xy -ravnini, določena z enačbama:

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Smerni vektor te premice je vektor $\vec{e} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Če zarotiramo nek poljuben vektor, lahko opazimo, da je Q rotacija za 90° v pozitivni smeri okoli vektorja $\vec{e}$.

(b) Matrika Q je ortogonalna, njena determinanta pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} = -1.$$

Dana matrika torej določa bodisi zrcaljenje bodisi zrcalni zasuk. Kot zasuka dobimo z uporabo formule

$$\cos \phi = \frac{\text{sl}(Q) + 1}{2} = 1,$$

kar pomeni, da je $\phi = 0$. Opravka imamo torej z zrcaljenjem preko neke ravnine. Normala te ravnine kaže v smeri lastnega vektorja pri lastni vrednosti $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V jedru te matrike je vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$, kar pomeni, da je Q zrcaljenje čez ravnino $x + y + z = 0$. $\square$

(8) Geometrično opiši naslednji izometriji evklidskega prostora:

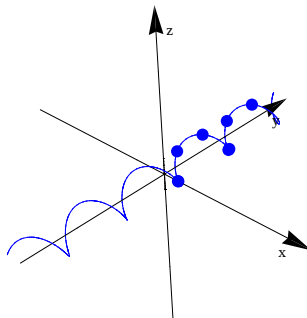
(a) $\tau(x, y, z) = (z, y + 1, -x),$

(b) $\tau(x, y, z) = (-y + 1, x - 1, -z).$

Rešitev: (a) Dano izometrijo lahko zapišemo v obliki

$$\tau(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del te izometrije je rotacija za kot $\phi = 90^\circ$ okoli osi $\vec{e} = (0, 1, 0)$. Hkrati pa imamo poleg vrtenja okoli y -osi še translacijo vzdolž iste osi. Takšni izometriji rečemo vijačni pomik vzdolž y -osi za kot $\phi = 90^\circ$ in za vektor $(0, 1, 0)$.



(b) Sedaj imamo izometrijo s predpisom

$$\tau(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del je tokrat zrcalni zasuk čez ravnino $z = 0$ okoli osi $\vec{e} = (0, 0, 1)$ za kot $\phi = 90^\circ$. Translacijski del povzroči, da se ravnina zrcaljenja in os vrtenja vzporedno prestavita. Preverimo lahko, da ima τ natanko eno fiksno točko $S(1, 0, 0)$. Gre torej za zrcalni zasuk čez ravnino $z = 0$ okoli točke $S(1, 0, 0)$ za kot $\phi = 90^\circ$. $\square$

Za konec zapišimo še klasifikacijo izometrij evklidskega prostora. Glede na geometrijski pomen ločimo šest tipov izometrij.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. V tem primeru je $Q = I$.

2. Rotacije:

Rotacije okoli neke osi s smerjo $\vec{e}$ za kot $\phi \in (0, \pi]$ so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = R(\vec{e}, \phi)\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je vektor $\vec{a}$ pravokoten na smer osi $\vec{e}$. Os vrtenja je množica fiksnih točk preslikave τ .

3. Vijačni pomiki:

Vijačni pomiki vzdolž neke osi s smerjo $\vec{e}$ za kot ϕ so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = R(\vec{e}, \phi)\vec{x} + \vec{a},$$

kjer vektor $\vec{a}$ ni pravokoten na smer osi $\vec{e}$.

4. Zrcaljenja:

Zrcaljenja čez ravnine s smerjo normale $\vec{n}$ so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n})\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je vektor $\vec{a}$ vzporeden normali $\vec{n}$.

5. Zrcalni zdrsi:

Zrcalni zdrsi čez ravnine s smerjo normale $\vec{n}$ so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n})\vec{x} + \vec{a},$$

kjer vektor $\vec{a}$ ni vzporeden normali $\vec{n}$.

6. Zrcalni zasuki:

Zrcalni zasuki čez ravnine s smerjo normale $\vec{n}$ za kot $\phi \in (0, \pi]$ so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z(\vec{n})R(\vec{n}, \phi)\vec{x} + \vec{a}.$$