

CAUCHYJEV PRODUKT VRST JE EDEN OD NAČINOV ZA MNOŽENJE VRST:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) &= (a_0 + a_1 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + \dots) = \\ &= (a_0 \cdot b_0) + (a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{KJER} \quad c_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \end{aligned}$$

IZREK:

ČE STA VRSTI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ IN $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ABSOLUTNO KONVERGENTNI, JE TUDI CAUCHYJEV PRODUKT ABSOLUTNO KONVERGENTEN IN KONVERGIRA K PRODUKTU VSOT OBEH VRST.

OPOMBA: V TEM PRIMERU LAHKO IZBEREMO POLJUBNI VRSTNI RED MNOŽENJA IN BO REZULTAT VEDNO ENAK.

① IZRAČUNAJ CAUCHYJEV PRODUKT VRST S ELEMI:

(a) $a_n = b_n = \frac{1}{2^n}$

(b) $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

ALI KONVERGIRA?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \end{aligned}$$

$$\text{KJER} \quad c_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j} \cdot b_j = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{n-j}} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{n+1}{2^n}$$

$$\text{PRODUKT JE TOREJ ENAK: } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^n} \right).$$

$$\text{TA VRSTA KONV., SAJ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

$$\begin{aligned}
 (b) & \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \\
 & = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \right) = \\
 & = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n,
 \end{aligned}$$

KJER

$$\begin{aligned}
 C_n &= \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{1}{\sqrt{n-j+1}} \cdot (-1)^j \frac{1}{\sqrt{j+1}} \\
 &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-j+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{j+1}} \\
 |C_n| &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-j+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{j+1}} \geq \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{n+1} = 1
 \end{aligned}$$

SKLEP:

VRSTA NE KONVERGIRA, SAJ $|C_n| > 1$.

MORALA:

TO JE PRIMER, KI POTRDI, DA PRODUKT POGOJNO KONV. VRST NE KONVERGIRA NUJNO.

NAJ BO (x_n) PADAJOČE ZAPOREDJE POZITIVNIH ŠTEVIL.

DOKAŽI, DA $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ KONVERGIRA NATANKO TEDAJ, KO

KONVERGIRA VRSTA $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$. OBRAVNAVAJ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$
IN $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

OGLJEMO SI ČLENE VRST:

$$S_1 = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + x_8 + \dots$$

$$S_2 = 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \dots =$$

$$= (x_2 + x_2) + (x_4 + x_4 + x_4 + x_4) + \dots$$

KER JE ZAPOREDJE PADAJOČE IN POZITIVNO VELJA

$$(x_2 + x_2) > (x_2 + x_3)$$

$$(x_4 + x_4 + x_4 + x_4) > (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$$

Torej za n -ti delni vsoti velja zveza:

$$S_1^n < S_2^n + x_1$$

od tod sklepamo, da iz konvergence S_2 sledi konvergenca S_1 .

za obratni sklep pomnožimo prvo vrsto z 2:

$$2S_1 = 2x_1 + (2x_2) + (2x_3 + 2x_4) + (2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8) + \dots$$

$$S_2 = (2x_2) + (4x_4) + (8x_8) + \dots$$

vidimo, da velja:

$$2x_2 = 2x_2$$

$$4x_4 < 2x_3 + 2x_4$$

$$8x_8 < 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8$$

:

$$2S_1^n > 2x_1 + S_2^n \quad \text{za } n\text{-te delne vsote}$$

Torej iz konvergence S_1 sledi konv. S_2 .

Sedaj obravnavamo obe konkretni vrsti:

$\sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ konv. natanko tedaj, ko konvergira

$$\text{vrsta } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2} \quad \text{ta vrsta}$$

DIVERGIRA

$$\sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} \text{ KONV. NATAJKO TEDAJ, KO KONVERGIRA}$$

$$\text{VRSTA } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \ln^2 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 2} \cdot \text{TA VRSTA KONV.}$$

NAJ BO (a_n) KONV. ZAPOREDJE POZITIVNIH ŠTEVIL Z
LIMITO $a > 0$. OBRAVNAVAJ KONVERGENCO VRSTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n, \quad x > 0.$$

KORENSKI KRITERIJ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{a_n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{a_n} = \frac{x}{a}$$

ZA $x < a$ VRSTA KONVERGIRA, ZA $x > a$ PA DIVERGIRA.

KAJ SE ZGODI, ČE $x = a$?

LATIKO DIVERGIRA:

$$\text{NPR. } x=1, a=1, a_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

LATIKO KONVERGIRA:

$$\text{NPR. } x=1, a=1, a_n = \sqrt[n]{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

NAJ BOSTA $b, c > 0$ IN

$$a_n = \frac{b(b+1)(b+2) \cdot \dots \cdot (b+n-1)}{c(c+1)(c+2) \cdot \dots \cdot (c+n-1)}$$

(a) OBRAVNAVAJ KONVERGENCO VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(b) NAJ BO $c > b$. DOKAŽI, DA (a_n) KONV. IN DOLOČI LIMITO.

(c) IZRAČUNAJ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

KVOCIENTNI KRITERIJ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b+n)}{(c+n)} \frac{n}{n+1} = 1$$

RAABEJEV KRITERIJ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)(c+n)}{n(b+n)} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{cn + c + \cancel{n^2} + n - bn - \cancel{n^2}}{n \cdot (b+n)} = c - b + 1$$

SKLEPI: ZA $c - b + 1 > 1$ OZ. $c > b$ KONVERGIRA
ZA $c - b + 1 < 1$ OZ. $c < b$ DIVERGIRA.
ZA $c = b$ DOBIMO HARMONIZNO VRSTO, KI DIV.

(b) ČE JE $c > b$, JE ZAPOREDJE PADajoČE IN NAVZDOL OMEJENO Z 0. TOREJ IMA LIMITO. DEFINIMO,

DA JE $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. POTEM VELJA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} = a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

PREJ SMO Ugotovili, DA JE LEVA VRSTA KONV., ZATO BO TA SKLEP IMEL SMISEL LE, ČE BO $a = 0$.

(c)

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 2 \quad \textcolor{red}{/ : 2^n}}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \quad \textcolor{red}{/ : 2^n}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot \frac{3}{2}}$$

TO JE RAVNO a_n ZA $b=1$ IN $c = \frac{3}{2}$.

Torej JE LIMITA NIČELNA.