

LINEARNA ALGEBRA 2021/22
VAJE: sistemi linearnih enačb, matrike

Četrte vaje (drugi del)

1. Reši sistem.

$$\begin{array}{rrrrr} & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 9 \end{array}$$

Pete vaje

1. Prostor rešitev enačb zapiši parametrično.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right]$

2. Obravnavaj sistem.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array} \right]$$

Za katere vrednosti a, b ima sistem eno/neskončno rešitev? Za katere vrednosti sistem nima rešitve.

3. Določi za katere vrednosti a je sistem rešljiv in ga za dobljene vrednosti reši.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 & a+1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -2a \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & a-1 \end{array} \right]$$

Izrazi še rešitev homogenega sistema.

4. Hkrati reši sistema $2x_1 + 5x_2 = 1$, $x_1 + 3x_2 = 0$ in $2y_1 + 5y_2 = 0$, $y_1 + 3y_2 = 1$.

Šeste vaje

1. Reši sistem enačb:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 13 \\ 7 & 0 & -2 & 17 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

2. Parametrično izrazi rešitev sistema enačb.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -4 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right].$$

3. Podane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj vse možne produkte oblike XY za $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.

Sedme vaje

1. Izračunaj

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \text{ in } \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n, \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

2. Podana je matrika $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ in matrika e_{ij} , ki ima 1 na mestu (i, j) in 0 drugje. Izračunaj $e_{ij}Ae_{kl}$ in $e_{ij}e_{kl}$. Izračunaj še $(I + \alpha e_{ij})(I + \beta e_{kl})$.

3. Pokaži $(AB)^T = B^T A^T$ za vse matrike, ki jih lahko zmnožimo.

4. Pokaži, da za nobeno kvadratno matriko ne velja $A - A^T = I$. Pokaži, da za noben par kvadratnih matrik ne velja $AB - BA = I$.

5. S $\text{tr}(A)$ za kvadratno matriko A označimo vsoto diagonalnih elementov. Pokaži $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ in $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

6. Poišči inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{in reši enačbo } Ax = b \text{ za } b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. Kdaj je obrnljiva diagonalna matrika $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

8. Kdaj je matrika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ obrnljiva. Eksplicitno zapiši njen inverz.

9. Reši matrično enačbo $AX(I + B) = B + A + I$ za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osme vaje

1. Naj bodo $A, A', B, B', C, C', D, D' \in M_n(\mathbb{R})$. Naj bo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ in } \mathcal{A}' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}.$$

Izrazi $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ s produkti XY' .

2. Poišči inverze matrik (kdaž obstajajo)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

3. Naj bo $P \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva matrika. Naj bo $A = P^{-1}BP$. Pokaži: A je obrnljiva natanko tedaj, ko je B obrnljiva. Pokaži še $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ in $A^m = P^{-1}B^mP$.
4. Matriki A in B komutirata, če je $AB = BA$. Pokaži, da kvadratna matrika A komutira z vsemi ostalimi matrikami iste velikosti natanko tedaj, ko je oblike λI za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Devete vaje

1. Izračunaj determinanti matrik

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & 10 & 6 \\ 1 & 7 & -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunaj determinanto

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Najdi rekurzivno zvezo za determinanto $n \times n$ matrike.

$$D_n = \det \begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

4. Izračunaj determinato $n \times n$ matrike.

$$D_n = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Reši enačbo

$$\det \begin{bmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2x+6 \\ x+1 & x+5 & 6 & 2x+8 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} = 0.$$

6. Izračunaj determinanti $n \times n$ matrik.

$$\begin{vmatrix} & & & & & \\ & & & & a_1 & \\ & & & a_2 & & \\ & & \ddots & & & \\ a_n & & & & & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desete vaje

1. Izračunaj spodnji determinanti

$$\det \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{bmatrix}.$$

2. S Cramerjevim pravilom reši sistem

$$x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -10$$

$$9x_2 + 2x_3 = 7$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$