

Izrek o inverzni preslikavi

Izrek: Naj bo $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable v $\vec{a}$ in naj bodo vsi odvodi zvezni. Če velja $\det JF(\vec{a}) \neq 0$, obstaja okolica U točke $\vec{a}$ in okolica V točke $F(\vec{a})$, da je $F : U \rightarrow V$ obrnljiva, za njen lokalni inverz $G : V \rightarrow U$ pa velja:

$$JG(F(\vec{a})) = [JF(\vec{a})]^{-1}$$

naloge

45. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned}(1 + y^2) \ln x &= z \\ x^3 + xy &= w.\end{aligned}$$

- Rešite ta sistem za $z = 0$ in $w = 5$.
- Pokažite, da obstajata taka okolica U rešitve iz prejšnje točke in taka okolica V točke $(0, 5)$, da ima sistem za vsak par $(z, w) \in V$ enolično rešitev na $(x, y) \in U$.
- Pri $z = 0$ in $w = 5$ izračunajte parcialne odvode $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ in $\frac{\partial y}{\partial w}$.
- Z uporabo diferenciablenosti približno rešite sistem za $z = 0.17$ in $w = 5.1$: kot izhodiščni približek vzemite rešitev iz točke a) in uporabite tamkajšnje parcialne odvode, izračunane v prejšnji točki.

Izrek o implicitni preslikavi

Izrek: Naj bo $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ zvezno odvedljiva preslikava, $(\vec{a}, \vec{b}) \in D$. Če je

(i) $F(\vec{a}, \vec{b}) = 0$,

(ii) $\det JF^{\vec{y}}(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$,

obstaja okolica U od $\vec{a}$, na kateri je enolično definirana preslikava $\vec{g} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, za katero velja:

- $\vec{g}(\vec{a}) = \vec{b}$
- $F(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) = 0, \vec{x} \in U$
- $J\vec{g}(\vec{a}) = -[JF^{\vec{y}}(\vec{a}, \vec{b})]^{-1} \cdot JF^{\vec{x}}(\vec{a}, \vec{b})$

Naloge

46. Pokaži, da lahko rešitev enačbe $z \cdot e^{xy} + e^z = 0$ v okolici točke $(1, -1, -1)$ zapišemo kot funkcijo $z = z(x, y)$. Izračunaj $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1)$ in $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1)$

47. Naj bo $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$f_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 2e^{y_1} + y_2x_1 - 4x_2 + 3$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3$$

- a) Izračunaj Jacobijevo matriko za f v točki $A(3, 2, 7, 0, 1)$.
- b) Ali lahko rešitev $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0$ v okolici točke A izrazimo kot $(y_1, y_2) = g(x_1, x_2, x_3)$, torej $f(x_1, x_2, x_3, g(x_1, x_2, x_3)) = 0$?
- c) Izračunaj Jacobijevo matriko za g v točki $(3, 2, 7)$.

48. Naj bo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

- a) V okolici katerih točk lahko rešitev izrazimo kot funkcijo $z = z(x, y)$?
- b) Dokaži, da v teh točkah velja $x \cdot z \cdot z_x + y \cdot z \cdot z_y = z^2 - c^2$.

- c) Naj bo $z = z(x, y)$ rešitev zgornje enačbe v okolici točke $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{\sqrt{2}})$.
Izračunaj $z_{xy}(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$.

49. Dan je sistem enačb:

$$\begin{aligned}y^3 + xz^2 &= 8 \\ xy^2 + z^2 &= 9\end{aligned}$$

- a) Rešite sistem enačb na y in z pri $x = 0$ in $z > 0$.
b) Pokažite, da obstajata taka okolica U točke 0 in taka okolica V rešitve iz prejšnje točke, da je sistem za vse $x \in U$ enolično rešljiv na $(y, z) \in V$. Tako postaneta y in z funkciji spremenljivke x : $y = f(x)$, $z = g(x)$.
c) Izračunajte $f'(0)$ in $g'(0)$.
d) Približno rešite sistem za y in z pri $x = 0.1$, $z > 0$.

50. Naj bo $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) &= x_1x_2x_4 + y_1x_3 - 4y_2 + 10 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) &= x_1 + x_2 + y_1^2 - 2y_2 - 5x_3x_4 + y_1y_2x_3 - 9\end{aligned}$$

- a) Pokaži, da lahko v okolici točke $A(1, 0, 1, 1, 2, 3)$ rešitev enačbe $f = 0$ zapišemo kot $(y_1, y_2) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
b) Izračunaj $Jg(1, 0, 1, 1)$.

51. Dana je enačba $e^{xz} - y - 5z = 0$.

- a) Rešite enačbo na z pri $x = y = 0$.
b) Pokažite, da obstajata taka okolica U izhodišča in taka okolica V rešitve iz prejšnje točke, da je enačba za vse $(x, y) \in U$ enolično rešljiva na $z \in V$. Tako postane z funkcija spremenljivk x in y : $z = f(x, y)$.
c) Izračunajte $f_x(0, 0)$ in $f_y(0, 0)$.
d) Približno rešite enačbo na z pri $x = 0.1$, $y = 0.2$.

Rešitve

45 a) $x = 1$ in $y = 4$ b) izrek o inverzni preslikavi c) $x_1 \approx 1.01$ d) $y_1 \approx 4.03$

46 $z_x(1, -1) = -\frac{1}{2}$, $z_y(1, -1) = \frac{1}{2}$

47 a) $Jf(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ b) Ja c) $Jg(3, 2, 7) = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 10 & -24 & -2 \end{bmatrix}$

48 a) V okolici točk (x_0, y_0, z_0) , kjer je $z_0 \neq 0$ b) Izrek o implicitni preslikavi.

c) $-\frac{\sqrt{2}c}{2ab}$

49 a) $y = 2$, $z = 3$ b) Izrek o implicitni preslikavi. c) $f'(0) = -\frac{3}{4}$, $g'(0) = -\frac{2}{3}$

d) $y \approx 1.925$, $z \approx 2.933$

50 a) Izrek o implicitni preslikavi. b) $Jg(1, 0, 1, 1) = -\frac{1}{40} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 & -20 \\ 1 & -6 & -13 & -5 \end{bmatrix}$

51 a) $z = 0.2$ b) Izrek o implicitni preslikavi. c) $f_x(0, 0) = 0.04$, $f_y = -0.2$

d) $z = f(0.1, 0.2) \approx 0.164$