

Integral s parametrom

Zveznost, odvod in integral integrala s parametrom

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u, v : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) \, dt$$

- u, v, f zvezne $\Rightarrow F$ zvezna
- u, v zvezno odvedljivi, f zvezna in parcialno zvezno odvedljiva po spremenljivki x
 $\Rightarrow F$ odvedljiva in velja

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x))$$

- f zvezna na $[c, d] \times [a, b] \Rightarrow$

$$\int_c^d F(x) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) \, dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) \, dx \right) dt$$

Naloge

1. Izračunaj $F(x) = \int_0^1 |2x - 3y| \, dy$ za $x \in \mathbb{R}$.

2. Izračunaj $\frac{d}{dx} \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^{-y^2/x}}{y} \, dy$.

3. Dokaži, da je integral

$$\int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y} \, dy$$

neodvisen od x .

Namig: Najprej pokaži, da to velja na poltrakih $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$, nato pa s substitucijo $z = \frac{1}{y}$ pokaži še, da se vrednost na prvem poltraku ujema z vrednostjo na drugem poltraku.

4. Izračunaj $g'(x)$, kjer je $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xy)}{y} \, dy$.

Rešitve

1

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - 2x; & x \leq 0, \\ \frac{4}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{2}; & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x - \frac{3}{2}; & \frac{3}{2} \leq x. \end{cases}$$

2 $F'(x) = -1/2xe^x$

3 $F'(x) = 0$ za $x \neq 0$ in $F(x) = F(-x - 2)$

4

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x}; & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0. \end{cases}$$