

Posplošeni integral

Naj bo $F(x) = \int_a^\infty f(x, t) dt$. (podobne lastnosti veljajo za druge posplošene integrale)

Weistrassov kriterij za integrale s parametri:

Če obstaja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, za katero velja $|f(x, t)| < g(t)$ za vsak $x \in I$ in $t \in [a, \infty)$ in integral $\int_a^\infty g(t) dt$ konvergira, potem F konvergira enakomerno.

Zveznost posplošenih integralov

Če je $f(x, t)$ zvezna in F konvergira enakomerno, potem je F zvezna.

Odvajanje posplošenih integralov

Naj bo $F(x) = \int_a^\infty f(x, t) dt$ za $x \in I$, I odprt interval. Če:

- $F(x)$ obstaja za neki $x \in I$
- f je parcialno odvedljiva po x , parcialni odvod f_x je zvezen v obeh spremenljivkah
- $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$ je enakomerno konvergenten: po Weistrassovem kriteriju: obstaja tak $g(t)$, da $|\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)| \leq g(t)$ za $\forall x \in I$, $t \in [a, \infty)$ in $\int_a^\infty g(t) dt$ konvergira

Potem:

- $F(x)$ obstaja za $\forall x \in I$
- $F'(x) = \int_a^\infty f_x(x, t) dt$

Integriranje posplošenih integralov

Če je f zvezna na $[c, d] \times [a, \infty)$ in F konvergira enakomerno, potem velja

$$\int_c^d F(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, t) dt \right) dx = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, t) dx \right) dt$$

Naloge

5. Določi definicijsko območje integrala $\int_0^\infty e^{a\sqrt{y}} dy$. s parametrom a .
6. Določi definicijsko območje integrala $\int_0^\infty \frac{\ln(1+ay^2)}{y^2} dy$. s parametrom a .
7. Ali je $F(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2y^2} dy$ zvezna? Kaj lahko iz tega sklepamo?
8. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx$ za $a \geq 0$.
9. Za $x \in \mathbb{R}$ izračunaj integral $\int_0^\infty \frac{\arctan(xy)}{y(1+y^2)} dy$.
10. Izračunajte integral $F(a) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2} dx$ Kot znano lahko privzamete, da je integral $F(a)$ enakomerno konvergenten in da lahko odvajate pod integralskim znakom.
11. Izračunaj $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-2at}}{t} dt$ za $a > 0$.

Rešitve

5 $(-\infty, 0)$

6 $[0, \infty)$

7 $f(x, t)$ je zvezna, $F(x)$ ni zvezna. Iz tega lahko sklepamo, da F ne konvergira enakomerno.

8 $-1/2(1+a)^{-2}$

9 $\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \ln(1 + |x|)$

10 $F(a) = 2\pi \ln(|a| + 1)$

11 $\ln 2$