

To naredimo za vsa $x \in X$ in dajmo $\{U_x\}$ za $X \rightsquigarrow \{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$
 polniti $\cup_x$
 $U_x \cap U_y$ ima: korenno podpolniti $\neq \emptyset$ ali U

Indukcija: $X_1, \dots, X_n$ kompaktni $\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ kompaktni

$\Rightarrow$ zaprta podmnožica produkta intervalov je kompaktna

opomba: velja še veliko več: poljuben produkt kompaktnov
 je kompakten $\prod_{i \in I} X_i$ (izrek Tihonova)

Posledica Vsaka omejena, zaprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ je kompaktna.

za obrat bi rabili vedeti, da so kompaktni v $\mathbb{R}^n$ zaprti.
 (velja še, da so omejeni)

Trditev

K kompaktni $\subseteq X$ Hausdorff $\Rightarrow K$ je zaprt v X

Dokaz



$$\forall a \in K \exists U_a \ni a \quad \forall a \notin K \quad U_a \cap K = \emptyset$$

$\{U_a\}$ pokrivajo K

$\{U_{a_1}, \dots, U_{a_n}\}$ pokriva

$U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$ pokriva K

ki je disjunktna z $V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$,
 odprta okolica x .

opazimo, da smo dokazali, da T_2 topologije
 ostro ločijo točke od kompaktnov





ostre ločijo točke na množici

izrek (Heine - Borel - Lebesgue)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompakten $\Leftrightarrow A$ je zaprt in omejen.



Posledica

(zvena) Vsaka preslikava $f: X^{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R}$ je omejena ter zavzame max in min.

Dokaz

$Z_f = f(X)$ je kompakten (zvena sledi kompaktna je kompakten)

$\leadsto Z_f$ je omejena (ker so kompaktni omejeni)

$\leadsto Z_f$ je zaprt, torej vsebuje $\inf Z_f$ in $\sup Z_f$
(f ima min in max)



Trditev

v kompaktni ima vsaka neskončna množica stekališč

Dokaz

$A \subseteq X^{\text{komp}}$, A nima stekališč $\leadsto$ za vsak $x \in X$

obstaja U_x , ki vsebuje le končno mnogo točk iz A

$\{U_x\}$ odp. pokrije za $X \leadsto U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ pokrivajo X

$\leadsto A$ je končna

11 Torej A neskončna $\Rightarrow$ ima stekališč.

Posledica (Bolzano - Weierstrassov izrek).

Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.

Dokaz

Sleda zaporedja se vedno pojavljajo v nekem kompaktnem (projektivnem intervalu).

• če je sleda končna $\leadsto$ vsaj ena vrednost se ponovi neskončnokrat. $\leadsto$ konstantno konv. podzaporedje.

ponov. ... na konstantno vred. podsepor.

- če je delis neskončen, to pomeni, da ni stabilizirano v $\mathbb{R}^n$, red zaporedja in konvergira k stabilizirano je ...

□

Kompaktnost 'okrepi' nekatere druge Topološke lastnosti:

IZREK

Kompakten, Hausdorffov prostor je normalen.

DOKAZ

normalen = $T_2 + T_4$ (ostro loči zaprti množice)

A, B disj.; zaprti $\leadsto A, B$ kompaktni



$a \in A \quad U_a \ni a \quad V_a \ni B \quad U_a \cap V_a = \emptyset$

$\{U_a\}$ pokritje $A \leadsto U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$ podp.

$U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n} \supseteq A, \quad V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n} \supseteq B$
disjunktni

□

IZREK

Kompakten metričen prostor je 2-števen (in separabilen).

DOKAZ

X kompakten, metričen.

Za vsak $n=1,2,3,\dots$ izberemo končno podpokritje pokritja $\mathcal{U}_n = \{K(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$,
npr. $K(x_1^{(n)}, \frac{1}{n}), \dots, K(x_{k_n}^{(n)}, \frac{1}{n})$.

Če ta končna podpokritja združimo, dobimo števno bazo za X (alternativno, $\{x_i^{(n)}\}$ so števna gosta podmnožica X).

□

Pozor: 1-števnost + kompaktnost $\not\Rightarrow$ 2-števnost

Opis kompaktnosti z zaprtimi množicami:

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ je pokritje $\longleftrightarrow \{U_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$ s praznim presekom

$\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$ je podpokritje $\iff \{U_{\lambda_1}^c, \dots, U_{\lambda_n}^c\}$ s praznim presekom

Trditveni

X je kompakten metrikni prostor, to v vsaki omejeni zbirki množic, ki imajo prazen presek obstaja končna podmnožina ki ima prav tako prazen presek.

□

Posledica (Cantorjev izrek)

X kompakten, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ zapirane, zaprte $\Rightarrow \bigcap F_i \neq \emptyset$.

Dokaz Denimo $\bigcap F_i = \emptyset \leadsto$ obstajajo $F_{i_1}, \dots, F_{i_n} : \underbrace{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}}_{= F_{\max\{i_k\}}} = \emptyset$
protisloži

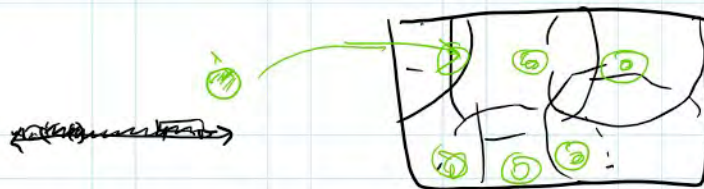
□

$\{[n, +\infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$ zapirane, zaprte, presek je prazen (ker $\mathbb{R}$ ni kompakten)

Naslednji cilj je pokazati, da so zvezne funkcije na (metričnih) kompaktnih enakomerno zvezne. Ključni korak je

Lebesgueova lema

Za vsako odprto pokritje $\mathcal{U}$ metričnega kompakta X obstaja **Lebesgueovo število** $\delta > 0$ z lastnostjo, da je vsaka kroglja ε radijem manjšim od δ vsebovana v nekem elementu U .



Dokaz

Za začetek izberemo končno podpokritje $U_1, \dots, U_n$ pokritja $\mathcal{U}$

Ogledamo si $f(x) := \max \{d(x, U_1^c), \dots, d(x, U_n^c)\}$

• f je zvezna (ker je max zveznih)

• f je pozitivna (ker vsaj ena od množic U_i vsebuje x , torej $d(x, U_i^c) > 0$)

- f je zvezna (ker je max zveznih)
- $f > 0$ ($\{U_1, \dots, U_n\}$ so pokritje, zato je za vsake x vsaj en $d(x, U_i^c) > 0$)

$$\Rightarrow \lambda := \min_{x \in X_{\text{komp}}} f(x) > 0$$

$$\Rightarrow \text{za vsake } x \in X \text{ obstaja } i: K(x, \lambda) \subseteq U_i$$

□

Posledica

X, Y metrična, X kompaktna, $f: X \rightarrow Y$ zvezna $\Rightarrow f$ je enakomerno zvezna

Dokaz

Izberemo $\varepsilon > 0$; $\delta := \text{Lebesgueovo število pokritja } \underbrace{\{f^{-1}(K(y, \frac{\varepsilon}{2})) \mid y \in Y\}}_{\text{odp. pokriva } X}$

$\leadsto d(x, x') < \delta$; $x, x' \in K(x, \delta) \subseteq f^{-1}(K(y, \frac{\varepsilon}{2}))$ za nek $y \in Y \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon$

□

$$\begin{array}{ccc} x, x' & \xrightarrow{\quad} & f(x), f(x') \in \text{hopolica z radijem } \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta & & d(f(x), f(x')) < \varepsilon \end{array}$$

Podobno kot druge lastnosti ima tudi kompaktnost svojo lokalizirano verzijo:

X je **lokalno kompakten**, če ima vsaka točka $x \in X$

kako kompaktno okolico (tj. x je notranji v nekem kompaktnu $K \subseteq X$)

• vsak kompakten prostor je (očitno) lokalno kompakten.

• $\mathbb{R}^n$ je lokalno kompakten vendar ni kompakten

Definicija lokalne kompaktnosti je malo navzvenj & običajnim vpisom lokalnih lastnosti. $U \subseteq X$ je **relativno kompaktna**, če je $\bar{U}$ kompaktna

Trditve

lokalno

1. ...

Trditev

Hausdorffov prostor je ^{lokalno} kompakten $\Leftrightarrow$ ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Dokaz D.N.

Izrek

Vsak lokalno kompakten Hausdorffov prostor je regularen.

Dokaz

Dovoli ji dokazati lastnost T_3



$x \in U$; $\Rightarrow$ obstaja relativno kompaktna V : $x \in V \subseteq U$

vendar ne vemo, ali je tudi $\bar{V} \subseteq U$

$\bar{V}$ je normalen $\Rightarrow$ obstaja W : $x \in W \subseteq \bar{W} \subseteq V \subseteq U$
(ker je komp. T_2)

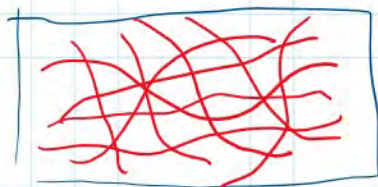
□

Lokalno kompaktni prostori imajo **Baireovo lastnost**:

X je **Baireov**, če ga ni mogoče predstaviti kot številno
unijo zaprtih množic s prazno notranjost
(tj. $X = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \Rightarrow \text{int } F_i \neq \emptyset$ vsaj za en i)

Primer

ravnine ni mogoče polniti s številno mnogo gladkih krivulj



Metrični prostor je poln, če ima vsako Cauchyovo zaporedje
limito v prostoru. Polni metrični prostori so Baireovi (izrek)
Lokalna kompaktnost je posplošitev polnosti:

Izrek

$F_1, F_2, F_3, \dots$ zaprte s prazno notranjostjo v X ^(poln metrični prostor) lokalno kompakten, Hausdorffov

Potem ima tudi $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots$ prazno notranjost v X .

$T_1, T_2, T_3, \dots$ zaporedje praznih notranjstev v X .

Potem ima tudi $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots$ prazno notranjost v X .

Dokaži

$U_0^{\text{odp}} \subseteq X$; trdimo, da $\{F_i\}_{i=1,2,\dots}$ ne pokrivajo U_0 .



$$\text{Int } F_1 = \emptyset \leadsto U_0 \not\subseteq F_1 \leadsto \exists x_1 \in U_0 - F_1$$

$$\Rightarrow \exists U_1 \subset U_0 \text{ rel. komp. obkroža } x_1, \\ \text{ki ne seka } F_1$$

$$\exists x_2 \in U_1 - F_2$$

$$\exists U_2 \text{ rel. komp.}, \bar{U}_2 \subseteq \bar{U}_1$$

$$\dots \\ \bar{U}_1 \supseteq \bar{U}_2 \supseteq \bar{U}_3 \supseteq \dots \cap \bar{U}_i \neq \emptyset \\ x \in U \wedge x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

□

Včasih je koristno, če lahko dani prostor X gledamo kot podprostor kompaktnega prostora.

Kompakt K je **kompaktifikacija** X , če je X gost podprostor v X .