

Vaje 16.12.2021: Normalni sistem, QR razcep

1. Pokažite, da je iskanje $x \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira

$$\|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n$$

ekvivalentno reševanju normalnega sistema

$$A^T Ax = A^T b.$$

2. S pomočjo normalnega sistema poiščite $x \in \mathbb{R}^2$, ki minimizira

$$\|Ax - b\|_2,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Naj bo π ravnina, ki jo razpenjata stolpca matrike A . Prepričajte se, da velja $Ax = \text{proj}_\pi b$.

3. Poiščite parabolo p , ki se po metodi najmanjših kvadratov najboljše prilega funkciji f , za katero imamo podane vrednosti

$$f(-1) = \frac{11}{4}, \quad f(0) = \frac{7}{4}, \quad f(1) = \frac{1}{4} \quad \text{in} \quad f(2) = \frac{13}{4}.$$

Rešitev: glej poglavje 8.6, naloga 6 v Splošna zbirka vaj.

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ in $b \in \mathbb{R}^4$. Pokažite, da če izračunamo $[A \ b] = QR$, je vrednost r_{44} enaka $\min_x \|Ax - b\|$.

5. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

s pomočjo *MGS* algoritma za QR razcep.