

7 Kompaktnost

Naloga 7.1.

- (a) Dokazite: prostor $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ je kompakten.
- (b) Dokazite splošnejšo trditev: če je X topološki prostor, $l \in X$ točka v njem in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v X , ki konvergira k l , tedaj je podprostor $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ kompakten.

Naloga 7.2. Dokazite, da je vsak prostor, opremljen s topologijo končnih komplemen-
tov, kompakten.

Naloga 7.3. Množico $\mathbb{R}$ opremimo s topologijo τ , porojeno z bazo $\mathcal{B} := \{(-a, a) \mid a \in (0, \infty)\}$.

- (a) Izrecno podajte vse odprte množice, tj. topologijo τ .
- (b) Dokazite, da $(\mathbb{R}, \tau)$ ni kompakten prostor.
- (c) Ali je kateri od intervalov $(0, 1]$ in $(0, 1)$ kompakten (v topologiji, podedovani od $(\mathbb{R}, \tau)$)?

Naloga 7.4. Množico $\mathbb{R}$ opremimo s topologijo τ , porojeno z bazo $\mathcal{B} := \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Izrecno podajte vse odprte množice, tj. topologijo τ .
- (b) Dokazite, da je vsak podprostor prostora $(\mathbb{R}, \tau)$ povezan s potmi.
- (c) Dokazite: podprostor prostora $(\mathbb{R}, \tau)$ je kompakten natanko tedaj, ko je prazen ali pa ima minimum.

Naloga 7.5. Topologijo τ na $\mathbb{R}^n$ podajmo na sledeči način: podmnožica A je zaprta, če je kompaktna v evklidski topologiji τ_E ali pa je $A = \mathbb{R}^n$.

- (a) Pokazite, da je τ topologija na $\mathbb{R}^n$.
- (b) Katerim ločljivostnim lastnostim zadošča prostor $(\mathbb{R}^n, \tau)$?
- (c) Dokazite, da je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktna v τ natanko tedaj, ko je zaprta v τ_E .

Naloga 7.6. Naj bo X kompakten topološki prostor in naj bo

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$$

padajoče zaporedje zaprtih podmnožic v X . Označimo njihov presek s $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Dokazite naslednje trditve.

- (a) Če so vsi C_n neprazni, tedaj je tudi C neprazen.
- (b) Če je $U \subseteq X$ odprta okolica za C , tedaj je tudi odprta okolica za C_k pri nekem $k \in \mathbb{N}$.
- (c) Če X zadošča pogoju T_4 in so vsi C_n neprazni povezani, tedaj je tudi C neprazen povezan.

Podajte protiprimere za te trditve, če X ni kompakten.

Naloga 7.7. Naj bo (X, τ) kompakten Hausdorffov prostor. Dokazite:

- (a) če je τ_1 strogo močnejša topologija od τ , potem prostor (X, τ_1) ni kompakten,
- (b) če je τ_2 strogo šibkejša topologija od τ , potem prostor (X, τ_2) ni Hausdorffov.

Povzeto: kompaktna Hausdorffova topologija je maksimalna kompaktna in minimalna Hausdorffova topologija. Naredite to trditev natančnejšo — izrecno podajte delno urejene množice, v katerih je ta topologija maksimalni oz. minimalni element.

Naloga 7.8. Naj bo (M, d) kompakten metrični prostor in $f: M \rightarrow M$ zvezna preslikava. Dokazite naslednji trditvi.

- (a) Če f nima negibnih točk, tedaj obstaja realno število $c > 0$, da je $d(x, f(x)) \geq c$ za vse $x \in M$.
- (b) Če je f izometrija, tedaj je f homeomorfizem.

Poiščite protiprimera za ti trditvi, če metrični prostor M ni kompakten.

Naloga 7.9. Dokazite: metrični prostor M je kompakten natanko tedaj, ko je vsaka zvezna funkcija $M \rightarrow \mathbb{R}$ omejena.

Naloga 7.10. Naj bo $a \in [0, \infty)$. Definirajmo prostor

$$X_a := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0, 1] \right) \cup \left(\{0\} \times [0, a] \right) \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

- (a) Poiščite potreben in zadosten pogoj na število a , da je prostor X_a kompakten.
- (b) Poiščite potreben in zadosten pogoj na število a , da je prostor X_a lokalno kompakten.

Naloga 7.11. Naj bo $\underline{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje realnih števil. Definirajmo prostor

$$X_{\underline{a}} := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \times [0, 1) \right) \cup ([0, \infty) \times \{0\}).$$

- (a) Poiščite potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\underline{a}$, da je prostor $X_{\underline{a}}$ kompakten.
- (b) Poiščite potreben in zadosten pogoj na zaporedje $\underline{a}$, da je prostor $X_{\underline{a}}$ lokalno kompakten.

Naloga 7.12. Dokažite za vse topološke prostore X, Y : če je Y kompakten Hausdorffov ter obstaja $y \in Y$, da sta X in $Y \setminus \{y\}$ homeomorfna, tedaj je kompaktifikacija z eno točko X^+ homeomorfna prostoru Y .

Naloga 7.13. Za vsakega od spodnjih prostorov poiščite primeren podprostor takega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen njegovi kompaktifikaciji z eno točko.

- (a) $\mathbb{N}$
- (b) $\mathbb{N} \times (-1, 1)$
- (c) $\mathbb{N} \times [-1, 1]$
- (d) $\mathbb{N} \times S^1$
- (e) $[-1, 1] \times [0, 1)$
- (f) $\mathbb{R} \times [0, \infty)$