

Številске vrste

1. Razišči konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,
- (c) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n}\right)^n$,
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$,
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,
- (g) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$,
- (h) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n+2^n}{6^n} + \dots$

Rešitev:

- (a) Vrsta konvergira. Vsota vrste je enaka 1.
- (b) Harmonična vrsta divergira.
- (c) Vrsta divergira.
- (d) Vrsta divergira.
- (e) Vrsta divergira.
- (f) Vrsta konvergira. Vsota vrste je enaka 1.
- (g) Vrsta konvergira. Vsota vrste je enaka $\frac{1}{2}$.
- (h) Vrsta konvergira. Vsota vrste je enaka $\frac{3}{2}$.

2. S pomočjo primerjalnega kriterija razišči konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,
- (c) $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,
- (e) $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \dots$,
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}$,
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

Rešitev:

- (a) Vrsta divergira.
- (b) Vrsta konvergira. V splošnem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ in divergira za $\alpha \leq 1$.
- (c) Vrsta konvergira.
- (d) Vrsta konvergira.
- (e) Vrsta divergira.
- (f) Vrsta konvergira.
- (g) Vrsta konvergira.

3. S pomočjo kvocientnega kriterija razišči konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{1-n}$,
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n (2n)!}{(3n)!}$.

Rešitev:

- (a) Vrsta konvergira.
- (b) Vrsta konvergira.
- (c) Vrsta divergira.
- (d) Vrsta konvergira.
- (e) Vrsta konvergira.

4. S pomočjo korenskega kriterija razišči konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2+n+9}$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Rešitev:

- (a) Vrsta konvergira.
- (b) Vrsta konvergira.

- (c) Vrsta divergira.
- (d) Vrsta konvergira.

5. Ugotovi, za katera pozitivna realna števila a konvergira vrsta.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)a^{2n}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{4n+3}\right)^{2n-1}$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$.
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$.

Rešitev:

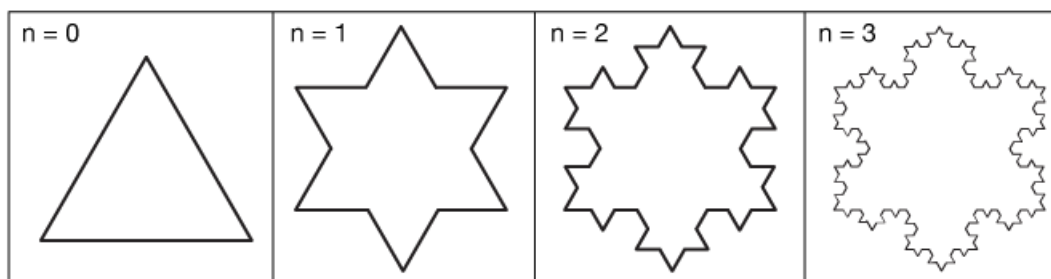
- (a) Uporabi kvocientni kriterij. Vrsta konvergira za vsak a .
- (b) Uporabi kvocientni kriterij. Vrsta konvergira za $a < 1$, sicer divergira.
- (c) Uporabi korenski kriterij. Vrsta konvergira za vsak a .
- (d) Uporabi korenski kriterij. Vrsta konvergira za $a < 1$ in kateri koli s ter za $a = 1$ in $s > 1$. Sicer divergira.
- (e) Uporabi kvocientni kriterij. Vrsta konvergira za vsak a .

6. Določi vsa števila $s \in \mathbb{R}$, za katera naslednja vrsta konvergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+s}{n+1}\right)^{n^2-n}.$$

Rešitev: Uporabi korenski kriterij. Vrsta konvergira za $s < 1$ in divergira za $s \geq 1$.

7. Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke. Kockova snežinka je ravninski lik, ki ga dobimo z naslednjo iteracijo. Začnemo z enakostraničnim trikotnikom s stranico dolžine 1. Nato vsaki stranici nad srednjo tretjino prilepimo enakostranični trikotnik (kot na sliki). Postopek ponavljamo na vseh straneh novega lika.



Rešitev: $o = \infty$, $p = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

8. Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ali konvergira? Ali konvergira absolutno? Oцени napako, ki jo storiš, če za približek vsote cele vrste vzameš vsoto njenih prvih štirih členov.

Rešitev: Vrsta je absolutno konvergentna. Napaka je manjša od $\frac{1}{120}$.

9. Dana je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^3}.$$

Ali konvergira? Ali konvergira absolutno? Koliko členov vrste moramo sešteti, da bo napaka po absolutni vrednosti manjša od 0.01?

Rešitev: Vrsta je absolutno konvergentna. Sešteti je potrebno prva dva člena, saj je $|a_3| = \frac{1}{6^3} = 0.0046$.

10. Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo absolutno oziroma pogojno:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^4},$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},$ za $\alpha > 0,$
- (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n},$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n},$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n},$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right).$

Rešitev:

- (a) Vrsta je absolutno konvergentna.
- (b) Vrsta je absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Za $0 < \alpha \leq 1$ je vrsta pogojno konvergentna.
- (c) Vrsta je pogojno konvergentna.
- (d) Vrsta je pogojno konvergentna.
- (e) Vrsta je absolutno konvergentna.
- (f) Vrsta je pogojno konvergentna.