

NALOGA:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(a) IZRAČUNAJ DEFINICIJSKA OBMOČJA D_{T_n} .

(b) DOKAŽI, DA JE T_n POLINOM STOPNJE n .

REŠITEV:

(a) V ARKUS KOSINUS LAHKO VSTAVIMO $x \in [-1, 1]$.

TAKO DOBIMO $n \arccos(x) \in [0, n\pi]$.

KER JE KOSINUS DEFINIRAN ZA VSA TOVRSTNA ŠTEVILA, JE $D_{T_n} = [-1, 1]$.

(b) BAZA INDUKCIJE:

$n=0$: $T_0(x) = \cos 0 = 1$
POLINOM STOPNJE 0.

$n=1$: $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$
ZA VSE $x \in [-1, 1]$.
POLINOM STOPNJE 1.

INDUKCIJSKI KORAK:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos(n \arccos x + \arccos x) = \\ &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) \\ &\quad - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ \text{ADICIJSKI} \quad \uparrow \\ \text{IZREK} \quad &= T_n(x) \cdot x - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

KLJUČEN TRIK: OGLEDJMO SI ŠE $T_{n-1}(x)$!

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) &= \cos(n \arccos x - \arccos x) = \\ &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) \\ &\quad + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ &= T_n(x) \cdot x + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

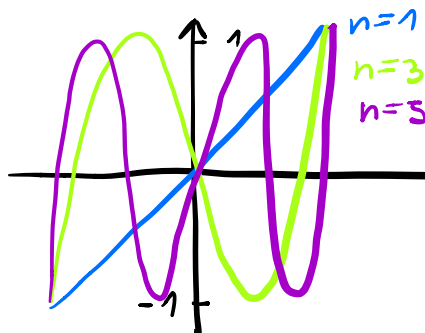
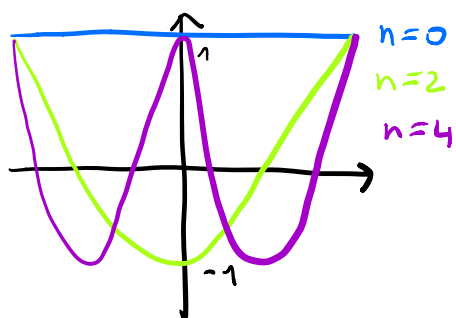
ČE TI ENAKOSTI SEŠTEJEMO, DOBIMO

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x) \cdot x$$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

PO INDUKCIJSKI PREDPOSTAVKI JE T_n POLINOM STOPNJE n , T_{n-1} PA POLINOM STOPNJE $n-1$. TO POME NI, DA JE T_{n+1} POLINOM STOPNJE $n+1$ (ČLEN T_{n-1} NE MORE UNIČITI VDDILNEGA ČLENA OD $x T_n$)

KOMENTA: T_n - JEM REČEMO POLINOMI ČEBIŠEVA.



ZA SODE n DOBIMO SODE FUNKCIJE, ZA LIHE n PA LIHE.

NALOGA: HIPERBOLIČNI SINUS IN KOSINUS

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

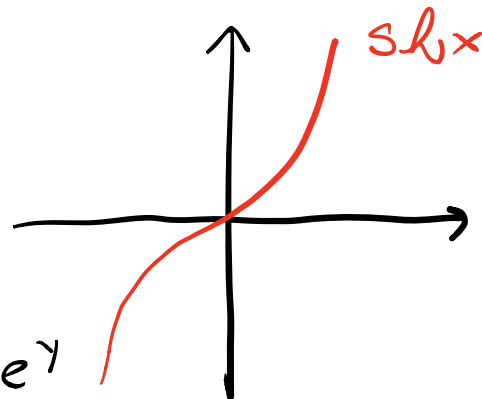
(a) POKAŽI, DA $\operatorname{sh} x$ INJEKTIVNA NA $\mathbb{R}$ IN POIŠČI NJEN INVERZ.

(b) POKAŽI, DA $\operatorname{ch} x$ INJEKTIVNA NA $[0, \infty)$ IN POIŠČI NJEN INVERZ.

(c) IZPELJI ADICIJSKE IZREKE ZA $\operatorname{sh} x$ IN $\operatorname{ch} x$.

REŠITEV:

(a) shx INJEKTIVNA NA $\mathbb{R}$



$$\text{sh } x = \text{sh } y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad | \cdot 2e^x e^y$$

$$e^{2x+y} - e^y = e^{x+2y} - e^x$$

$$e^{x+y}(e^x - e^y) + (e^x - e^y) = 0$$

$$(\underbrace{e^{x+y} + 1}_{\text{VEDNO POZITIVNO}})(e^x - e^y) = 0$$

↑
VEDNO
POZITIVNO

$$e^x - e^y = 0$$

$$\underbrace{e^x = e^y}_{x=y}$$

← e^x INJEKTIVNA

INVERZ

$$x = \text{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad | \cdot 2e^y$$

$$2xe^y = (e^y)^2 - 1$$

$$0 = (e^y)^2 - 2xe^y - 1$$

$$t = e^y: t^2 - 2xt - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

$$e^{y_{1,2}} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

TO INA SMISEL
LE ZA +, SAJ
 $e^y \geq 0$.

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(b) INJEKTIVNOST CH X NA $[0, \infty)$

$$ch(x) = ch(y), \quad x, y \in [0, \infty).$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad | \cdot 2e^x e^y$$

$$e^{2x+y} + e^y = e^{x+2y} + e^x$$

$$e^{x+y}(e^x - e^y) + e^y - e^x = 0$$

$$(e^{x+y} - 1)(e^x - e^y) = 0$$

DVE MOŽNOSTI:

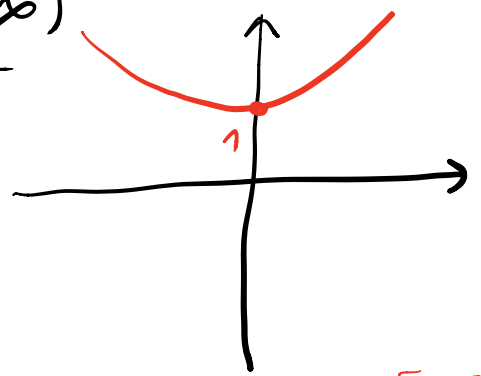
$$(i) \quad e^{x+y} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x+y} = 1 \Rightarrow$$

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y.$$

KER STA $x, y \in [0, \infty)$, JE TO

MOŽNO LE ZA $x=y=0$. t.j. $x=y$ ✓

$$(ii) \quad e^x - e^y = 0 \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x=y \quad \checkmark$$



TEMU GRAFU REŽENO
TUDI VERIŽNICA
(KER ILUSTRIRA VIŠEJŠE
VERIGE)

INVERZ

$$x = ch(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad | \cdot 2e^y$$

$$2xe^y = (e^y)^2 + 1, \quad t = e^y$$

$$0 = t^2 - 2xt + 1$$

$$t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

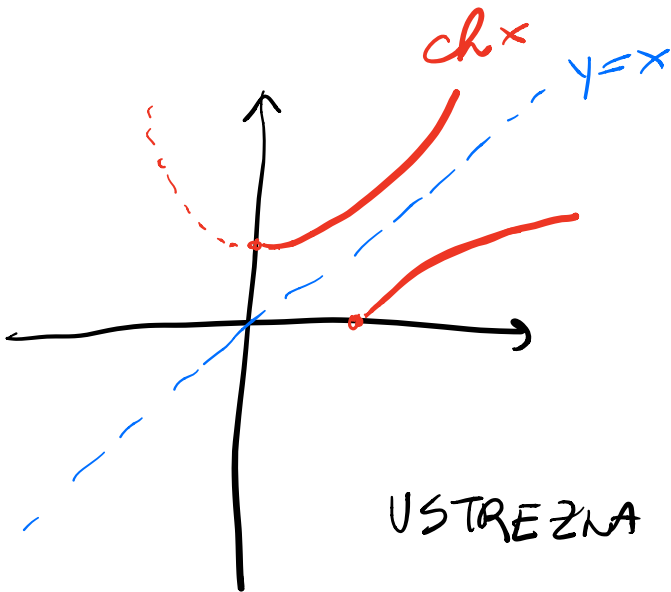
TO JE DOBRO DEFINIRANO LE ZA
 $x \geq 1$ IN $x \leq -1$.

$$e^{y_{1,2}} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

TOKRAT STA V PRINCIPU MOŽNI
 OBE IZBIRI PREDZAKA.

$$y_{1,2}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

VENČAR NE POZABIMO: IŠČEMO
 INVERZ ZA $ch(x)$ NA $[0, \infty)$



PRIČAKUJEMO, DA BO
 DEFINICIJSKO OBMOČJE
 $[1, \infty)$ IN ZALOHA
 VREDNOSTI $[0, \infty)$.

USTREZNA IZBIRA: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

KOMENTAR: DEFINIRALI SMO INVERZA:

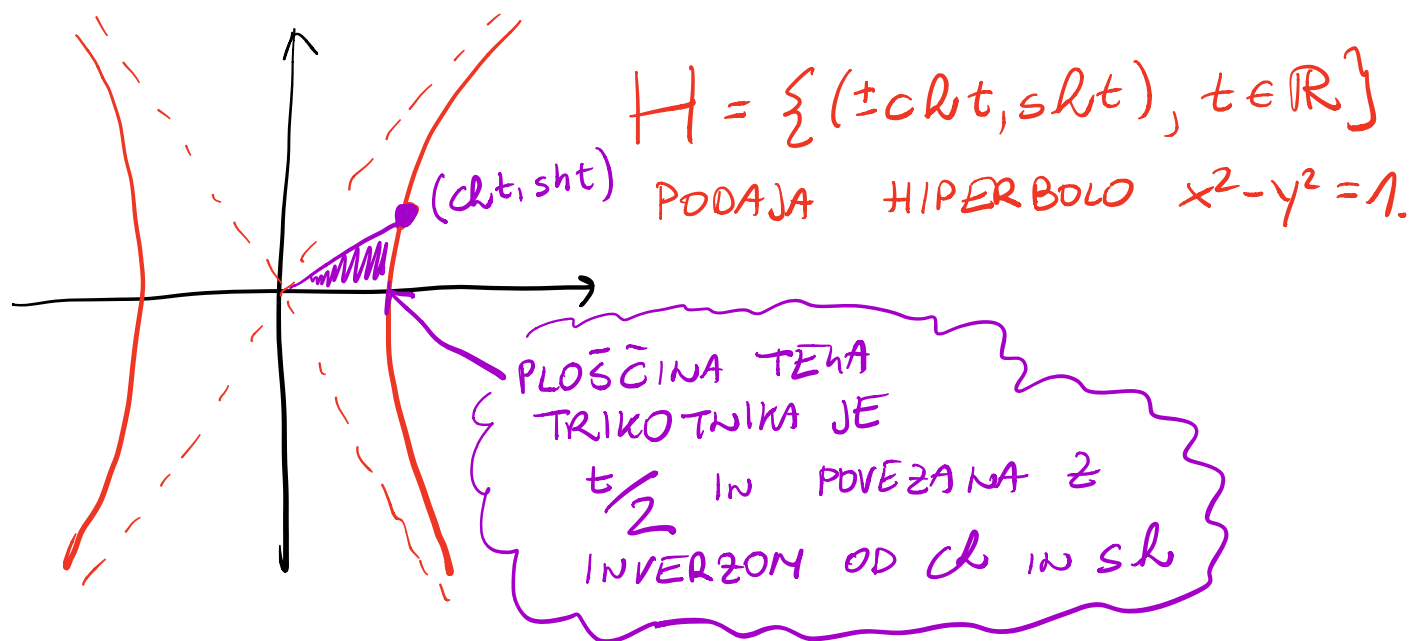
$$\operatorname{ars} h x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

ME NUJETA SE AREA SINUS OZIROMA AREA KOSINUS
HIPERBOLIKUS (+.j. NE ARKUS IN BREZ C).

POJASNILO:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1$$



(C) ZA KOTNE FUNKCIJE VELJA:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

POKAŽIMO ANALOG ZA HIPERBOLIZME:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y} - \cancel{e^{-x+y}} + \cancel{e^{x-y}} + e^{x+y} - e^{-x-y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \operatorname{sh}(x+y)$$

DOKAŽI SAM:

$$\{ \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \}$$

NALOGA: DOKAŽI, DA OBSTAJA NATANKO ENA NENIČELNA FUNKCIJA $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, KI ZADOŠČA POGOJEMA:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

NASVET 1: OBRAVNAVAJ PO VRSTI x, y IZ $\{0\}, \{1\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

NASVET 2: PRI $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ POKAŽI, DA JE f NARAŠČAJOČA.

REŠITEV: POIGRAJMO SE Z OČITNIMI VREDNOSTMI:

$$x=y=0: \quad f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$x=y=1: \quad f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \Rightarrow f(1)(f(1)-1) = 0$$

DVE MOŽNOSTI:

$$(i) \quad f(1) = 0 \Rightarrow f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$$

t.j. $f(x) \equiv 0$ NIČELNA,
TO NISMO ŽELELI

$$(ii) \boxed{f(1) = 1}$$

ODITNO CILJAMO NA
 $f(x) = x$

SEDAJ VZEMIMO: $x = n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1+1) = f(n-1) + f(1) = \\ &= f(n-1) + 1 = f(n-2) + 2 = \dots = f(1) + n-1 \\ &\quad \quad \quad \uparrow \text{INDUKCIJA} \\ &\quad \quad \quad = n \end{aligned}$$

SKLEP: $\boxed{f(n) = n, n \in \mathbb{N}}$

SEDAJ VZEMIMO: $x = -n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f(-n) &= f(-n) + n - n = f(-n) + f(n) - n \\ &= f(-n + n) - n = f(0) - n = 0 - n = -n. \end{aligned}$$

SKLEP: $\boxed{f(m) = m, m \in \mathbb{Z}}$

SEDAJ NAJ BO: $x = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n \cdot \frac{1}{n} = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) \cdot \frac{1}{n} = f(m) \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

SKLEP: $\boxed{f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$

ČE BI VEDELI, DA JE f ZVEZDA, BI TO
ŽE ZADOŠČALO, DA JE $f(x) = x$ TUDI
ZA $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. KER TE INFORMACIJE
NIMAMO, DOKAŽIMO, DA NARAŠČA.

DEJIMO, DA TO NI RES IN DA OBSTAJATA
 $x < y$, DA JE $f(y) < f(x)$.

Torej je: $0 < y - x = t$

$$0 > f(y) - f(x) + \underbrace{f(x) + f(-x)}_{f(x-x)=f(0)=0} = f(y) + f(-x) \\ = f(y-x) \\ = f(t)$$

IMAMO TOREJ $t > 0$ IN $f(t) < 0$. TO
JE PROTISLOVJE, SAJ ZA POZITIVEN t
VELJA $t = s^2 \Rightarrow f(t) = f(s^2) = f(s) \cdot f(s) \geq 0$.

VENO TOREJ, DA f NARAŠČA. DEJIMO,

DA VSEENO $\exists x \in \mathbb{R}$, DA $f(x) \neq x$.

BREZ ŠKODE ZA SPLOŠNOST $f(x) < x$.

POTEM $\exists q \in \mathbb{Q}$: $f(x) < q < x$.

VEN DAR PA: $f(x) < f(q) = q < x$.

TO JE PROTISLOVJE, SAJ

$$q < x \text{ IN } f(x) < f(q)$$

POHENTI, DA f NE NARAŠČA POVSOD.