

Analiza 1: 1. kolokvij

2. 12. 2021

Naloga iz teorije (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- P Obstaja zaporedje, ki ima za stekališča natanko vsa cela števila.
- N Obstajata $x, y \in \mathbb{R}$, da je $|x - y| > |x| + |y|$.
- P Množici $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sta ekvipolentni.
- P Polinom $z^{2021} - 1$ ima 1010 ničel z lastnostjo $\operatorname{Im}(z) > 0$.
- P Če obstaja maksimum množice $A \subset \mathbb{R}$, obstaja tudi $\inf(-A)$.
- N Naj bo A Dedekindov rez. Potem je tudi $\{\sqrt[3]{a} \mid a \in A\}$ Dedekindov rez.
- P Za vse $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja $\operatorname{Arg}(\pi z) = \operatorname{Arg}(z)$.
- N Število $a \in \mathbb{R}$ je zgornja meja množice $A \subset \mathbb{R}$, če obstaja $x \in A$, da je $x \leq a$.
- N Če ima zaporedje kompleksnih števil eno samo stekališče, potem je konvergentno.
- N Naj bo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih števil. Če obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2$, potem obstaja tudi limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Točkovanje.

- Vsak pravilni odgovor: 2 točki.
- Prvi nepravilni odgovor: 0 točk.
- Vsak nadaljnji nepravilni odgovor: -2 točki.

1. naloga (10 točk)

Poišči vsa realna števila, ki zadoščajo neenačbi

$$\frac{1 + |x - 1|}{1 - |x - 1|} \leq 1.$$

Rešitev. Neenakost ni definirana, kadar je $1 - |x - 1| = 0$, tj. kadar je $|x - 1| = 1$, tj. če je $x \in \{0, 2\}$. Neenakost je torej smiselno obravnavati le v primeru $x \notin \{0, 2\}$. V tem primeru jo lahko množimo s pozitivnim številom $(1 - |x - 1|)^2$ in dobimo ekvivalentno neenakost

$$(1 + |x - 1|)(1 - |x - 1|) \leq (1 - |x - 1|)^2,$$

kar se poenostavi v

$$0 \leq |x - 1|^2 - |x - 1| = |x - 1|(|x - 1| - 1).$$

Število $x = 1$ očitno zadošča neenakosti. Za $x \neq 1$ pa je $|x - 1|$ pozitivno število in zato lahko z njim delimo. Dobimo neenakost

$$1 \leq |x - 1|,$$

ki velja natanko tedaj, ko je $x \leq 0$ ali $x \geq 2$. Množica rešitev je zato

$$R = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty).$$

Opomba. Možno je tudi reševanje z obravnavo primerov.

Točkovanje.

- Definicijsko območje: 2 točki.
- Razmislek/obravnavo primerov: 6 točk.
- Množica rešitev: 2 točki.

2. naloga (15 točk)

Pokaži, da je število $\sqrt[n]{2^n - 1}$, $n \geq 2$, iracionalno in izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n - 1}$.

Rešitev. Denimo, da je $\sqrt[n]{2^n - 1}$ racionalno število. Potem ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek

$$\sqrt[n]{2^n - 1} = \frac{a}{b},$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{N}$. Od tod sledi

$$a^n = b^n(2^n - 1).$$

Če je p praštevilo, ki deli b , mora torej deliti tudi a . Toda a in b sta tuji števili, zato je to mogoče le, če b nima nobenega praštevilskega delitelja. Torej je $b = 1$. Od tod sledi, da je

$$a^n = 2^n - 1 < 2^n.$$

Torej mora biti $a < 2$ in zato $a = 1$. Dobimo, da je $2^n = 2$ in zato $n = 1$. Protislovje.

Limito lahko izračunamo takole:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n - 1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-n})^{\frac{1}{n}} = 2e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-2^{-n})^{\frac{1}{n}}} = 2e^0 = 2.$$

Tu smo med drugim uporabili pravilo, ki smo ga povedali na vajah: če je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n}.$$

Opomba. Možni so še številni drugi načini izračuna limite.

Točkovanje.

- Zapis v obliki okrajšanega ulomka: 3 točke.
- Razmislek, da mora biti $b = 1$: 4 točke.
- Izpeljava protislovja: 3 točke.
- Izračun limite: 5 točk.

3. naloga (20 točk)

Podana sta polinoma z realnimi koeficienti

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \text{ in } q(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k},$$

kjer je $a_n = a_0 = 1$.

- a) Pokaži, da za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja $p(\alpha) = 0$ natanko tedaj, ko je $q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.
- b) Naj bo $p = q$ in naj za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ velja $p(\alpha) = 0$. Dokaži, da obstaja $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ z lastnostma $p(\beta) = 0$ in $\alpha \cdot \bar{\beta} = 1$.
- c) Poišči par ničel iz točke b) za polinom $p(z) = z^4 + z^2 + 1$.

Rešitev. Preverimo vsako točko posebej:

- a) Pogoji $p(\alpha) = 0$ je ekvivalenten zahtevi, da je

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0.$$

Če delimo z α^n , dobimo ekvivalentno enakost

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha^{k-n} = 0$$

oziroma

$$\sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-k} = 0,$$

kar pomeni, da je $q\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

- b) Če je $p(\alpha) = 0$, je treba pokazati, da je

$$\beta = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

prav tako ničla polinoma p . Po točki a) iz dejstva, da je α ničla polinoma p , sledi, da je tudi $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ ničla. Ker pa je p polinom z realnimi koeficienti, kompleksne ničle nastopajo v konjugiranih parih, zato od tod sledi, da je tudi β njegova ničla.

- c) Taki ničli sta npr.

$$\alpha = \beta = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

V tem primeru namreč velja

$$p(\alpha) = p(\beta) = e^{\frac{4\pi i}{3}} + e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1 = 0$$

in pa

$$\alpha \bar{\beta} = e^{\frac{\pi i}{3}} e^{-\frac{\pi i}{3}} = 1.$$

Točkovanje.

- Točka a): 8 točk.
- Točka b): 7 točk.
- Točka c): 5 točk.

4. naloga (20 točk)

Naj bo $\mathcal{A}$ množica vseh divergentnih zaporedij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki zadoščajo rekurzivni zvezi

$$a_{n+2} = \frac{7}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n.$$

Konstruiraj injektivni preslikavi $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ ter s tem pokaži, da gre za ekvipolentni množici.

Rešitev. Rekurzivna zveza ima karakteristično enačbo

$$q^2 = \frac{7}{2}q - \frac{3}{2}$$

z ničloma $q_1 = 3$ in $q_2 = \frac{1}{2}$. Rešijo jo torej vsa zaporedja oblike

$$a_n = C \cdot 3^n + D \cdot 2^{-n},$$

kjer sta $C, D \in \mathbb{R}$ poljubni konstanti. Opazimo lahko, da so zaporedja take oblike divergentna natanko tedaj, ko je $C \neq 0$. Definiramo lahko torej bijektivno¹ preslikavo $\Phi: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$,

$$\Phi(C, D) = (C \cdot 3^n + D \cdot 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dovolj bo torej poiskati injektivni preslikavi $F: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Takih preslikav je veliko, izberemo lahko npr. (očitno injektivni)

$$F(x, y) = (x, y) \quad \text{in} \quad G(x, y) = (e^x, y).$$

Iskani injekciji $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ sta potem $f = F \circ \Phi^{-1}$ ter $g = \Phi \circ G$.

Opomba. Preslikavi f in g lahko zapišemo tudi direktno brez uporabe Φ .

Točkovanje.

- Rešitev rekurzije: 5 točk.
- Pogoji za divergenco: 2 točki.
- Korespondenca med zaporedji in pari: 3 točke.
- Injekcija $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: 4 točke.
- Injekcija $\mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$: 6 točk.

¹Preslikava Φ je očitno surjektivna, saj v njeni sliki leži vsako zaporedje $(C \cdot 3^n + D \cdot 2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, za katero je $C \neq 0$. Je pa tudi injektivna: če namreč velja $\Phi(C_1, D_1) = \Phi(C_2, D_2)$, od tod sledi $3C_1 + \frac{1}{2}D_1 = 3C_2 + \frac{1}{2}D_2$ ter $9C_1 + \frac{1}{4}D_1 = 9C_2 + \frac{1}{4}D_2$. (Zaporedji sta namreč enaki, kadar imata enake člene.) Če drugo enačbo množimo z 2 in od nje odštejemo prvo, dobimo $15C_1 = 15C_2$ in zato $C_1 = C_2$, od tod pa potem enostavno sledi tudi $D_1 = D_2$.

5. naloga (15 točk)

Naj bosta (a_n) in (b_n) omejeni zaporedji. Dokaži, da velja

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Poišči primer dveh zaporedij, za kateri v zgornji zvezi veljajo strogi neenačaji.

Rešitev. Ključno je dokazati drugo neenakost. Pokažimo namreč, da prva neenakost sledi iz nje (možen je sicer tudi obraten sklep). Pišimo $A_n = a_n + b_n$ in $B_n = -a_n$. Potem iz druge neenakosti sledi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n,$$

kar pomeni, da je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

Upoštevamo še, da je $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ in dobimo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

Dokazati moramo torej le še drugo neenakost, to pa lahko storimo na mnogo načinov.

Prvi način. Pišemo lahko:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} b_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Tu smo uporabili trditev s predavanj, da za poljubno omejeno zaporedje $(x_n)_n$ velja

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} x_k,$$

dejstvo, da je limita vsote enaka vsoti limit, in pa opazko, da je

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k.$$

Slednje bi lahko preverili neposredno, sledi pa tudi iz naloge 17.b) iz prvega sklopa vaj².

Drugi način. Za vsako stekališče zaporedja obstaja podzaporedje, ki k njemu konvergira. Izberimo torej podzaporedje $(a_{k_n} + b_{k_n})_n$ zaporedja $(a_n + b_n)_n$, ki konvergira k $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$. Nato izberimo podzaporedje $(a_{l_n})_n$ zaporedja $(a_{k_n})_n$, ki konvergira k $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{k_n}$ in podzaporedje $(b_{m_n})_n$ zaporedja $(b_{l_n})_n$, ki konvergira k $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_{l_n}$. Podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno zaporedje z isto limito, $\limsup$ pa se s prehodom na podzaporedje kvečjemu zmanjša, zato velja:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{m_n} + b_{m_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_{l_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Tretji način. Pišimo $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ in $p = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$. Naj bo $\epsilon > 0$. Po trditvi s predavanj potem obstaja le končno mnogo indeksov n , za katere je $a_n > a + \epsilon$, in le končno mnogo indeksov n , za katere je $b_n > b + \epsilon$. Od tod sledi³, da le za končno mnogo indeksov n velja $a_n + b_n > a + b + 2\epsilon$, kar pa pomeni, da je $a + b + 2\epsilon \geq p$. Ker slednja neenakost velja za poljuben $\epsilon > 0$, lahko sklepamo, da je $a + b \geq p$.

²Če pišemo $A = \{a_k \mid k \geq n\}$ in $B = \{b_k \mid k \geq n\}$ ter $X = \{a_k + b_k \mid k \geq n\}$, velja $X \subseteq A + B$ in zato $\sup X \leq \sup(A + B)$. Torej je $\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) = \sup X \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$.

³Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ množica vseh indeksov n z lastnostjo $a_n > a + \epsilon$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}$ množica vseh indeksov n z lastnostjo $b_n > b + \epsilon$ in $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}$ množica vseh indeksov n z lastnostjo $a_n + b_n > a + b + 2\epsilon$. Potem velja $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Naj bo namreč n indeks z lastnostjo $a_n + b_n > a + b + 2\epsilon$. Denimo, da $n \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Potem je $a_n \leq a + \epsilon$ in $b_n \leq a + \epsilon$ ter zato $a_n + b_n \leq a + b + 2\epsilon$, to pa je v protislovju s predpostavko, da je $n \in \mathcal{X}$.

S tem je druga neenakost dokazana. Oglejmo še primer zaporedij, kjer veljajo stroge neenakosti:

$$a_n = 1 + (-1)^n \quad \text{in} \quad b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

Tu ima zaporedje $(a_n)_n$ stekališči 0 in 2, zaporedje $(b_n)_n$ pa stekališči 0 in 1. Njuna vsota ima splošni člen $a_n + b_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n$ in stekališči 1 in 2. Torej res veljajo zelene neenakosti:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 + 1 = 1 < \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2 < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 + 1 = 3.$$

Opomba. V nekaterih rešitvah sem zasledil besedno zvezo “limita supremuma”, zato bi še enkrat opozoril, da $\limsup$ ni limita supremuma, ampak **zgornja limita**. Supremum zaporedja je število, zato bi besedna zveza “limita supremuma” najverjetneje pomenila limito konstantnega zaporedja, katerega splošni člen je enak supremumu; ta limita je potem kar enaka supremumu zaporedja, to pa ni tisto, kar tu želimo obravnavati⁴. Zgornja limita je največje stekališče zaporedja, supremum pa je najmanjša zgornja meja njegovih členov, kar sta precej različna pojma, zato rešitve, ki so se ukvarjale s slednjim, niso prinesle veliko točk.

Točkovanje.

- Druga neenakost: 7 točk.
- Prva neenakost: 4 točke.
- Primer zaporedij: 4 točke.

⁴Kar je res, je to, da je $\limsup$ enak supremumu množice stekališč. Res je tudi, da je $\limsup$ enak limiti zaporedja, katerega členi so supremumi členov zaporedja od nekje naprej, tj. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$, vendar tudi to ni “limita supremuma”, kvečjemu limita zaporedja točno določenih supremumov. Podobno velja za $\liminf$, ki je **spodnja limita** in ne “limita infimuma”. Mogoče te zmede ne bi bilo, če bi namesto $\limsup$ konsistentno pisali $\overline{\lim}$, kar je še ena pogosta oznaka za zgornjo limito; sta pa obe oznaki splošno sprejeti v literaturi, zato je v vsakem primeru dobro poznati obe. (Namesto $\liminf$ se uporablja tudi $\underline{\lim}$.)