

TOPOLOGIJE NA PROSTORIH PRESLIKAV

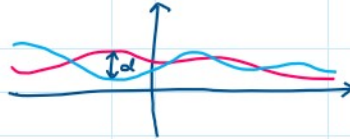
X, Y topološka prostora, $\mathcal{C}(X, Y) :=$ množica zveznih funkcij $X \rightarrow Y$

V $\mathcal{C}(X, Y)$ želimo vpeljati topologijo, konvergenco, metriko, ...

Npr. $\mathcal{C}([a, b]) \equiv \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ je metrični prostor za $d(f, g) := \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$

• na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ to ne deluje, ker je lahko $\{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$ neomejena

• na $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ dobimo metriko z $d(f, g) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$
↳ omejene (bounded)

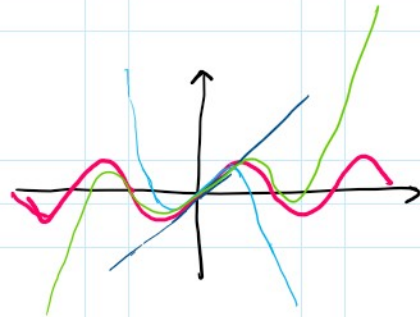


Osnovna intuicija: f in g sta "blizu", če sta njuna grafa blizu (v "naupični" smeri)

Kako konvergira Taylorjeva vrsta?

$$x, x - \frac{x^3}{6}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \dots \rightarrow \sin x$$

konvergira za vse x ($R = \infty$)



Za okolico $f: X \rightarrow Y$ vzamemo vse funkcije, ki so blizu f na $A \subseteq X$.

$$A \subseteq X, U \subseteq Y$$

$$\langle A, U \rangle := \{ f \mid f(A) \subseteq U \}$$

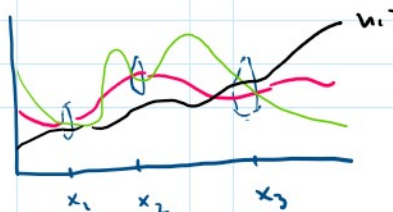


Tipično so $U^{\text{odp}} \subseteq Y$, za A pa imamo nekaj standardnih izbir:
točke / kompakti / zaprte množice / cel X

Za vsako od izbir vnamemo minimalno topologijo, ki jih vsebuje (tj. dajemo $\{ \langle A, U \rangle \mid A \subseteq X, U^{\text{odp}} \subseteq Y \}$ vnamemo za podbazo)

A so točke: podbaza: $\{ \langle x, U \rangle \mid x \in X, U^{\text{odp}} \subseteq Y \}$

tipična bazična množica: $\langle x_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle x_n, U_n \rangle$



Trditveni

$\mathcal{T}_p$ topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$, ki jo definira podbaza $\{ \langle x, U \rangle \mid x \in X, U^{\text{odp}} \subseteq Y \}$

$f_1, f_2, f_3, \dots$ zaporedje funkcij v $\mathcal{C}(X, Y)$. Tedaj

$\{f_i\} \rightarrow f$ v topologiji $\mathcal{T}_p \iff \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

(tj. zaporedje f_i konvergira proti f po točkah)

Dokaz $(\Rightarrow) \{f_i\} \rightarrow f$

$\forall x: f_i(x) \rightarrow f(x)$ za $\langle x, U \rangle$ obstaja $N: i > N, f_i \in \langle x, U \rangle$
 $\Rightarrow f_i(x) \in U \quad \forall i > N$

$(\Leftarrow)$

$f_i \rightarrow f$ po točkah

$\langle x_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle x_k, U_k \rangle \ni f$

$\Rightarrow \exists N: i > N, f_i \in \langle x_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle x_k, U_k \rangle$

$f(x_1) \in U_1 \quad \exists N_1: i > N_1: f_i(x_1) \in U_1$

$f(x_2) \in U_2 \quad \exists N_2 > N_1: i > N_2: f_i(x_2) \in U_2$

$\vdots$
 $f(x_k) \in U_k \quad \exists N_k > N_{k-1} > \dots > N_1: i > N_k: f_i(x_k) \in U_k$

torej za vsa $i > N_k: f_i \in \langle x_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle x_k, U_k \rangle$



$\mathcal{T}_p$ je topologija konvergence po točkah. Pri $\mathcal{T}_p$ topologiji X

ne igra nobene vloge (oz. je kot če bi bil X diskreten prostor).

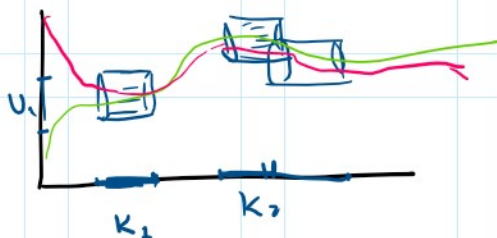
$$A = X$$

A so kompaktni: podbaza: $\{ \langle K, U \rangle \mid K^{\text{kompakt}} \subseteq X, U^{\text{odp}} \subseteq Y \}$

tipična bazisna uniočina: $\langle K_1, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle K_n, U_n \rangle$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \langle K_i, U_i \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^n K_i, U \rangle \right)$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \langle K, U_i \rangle = \langle K, \bigcap_{i=1}^n U_i \rangle \right)$$

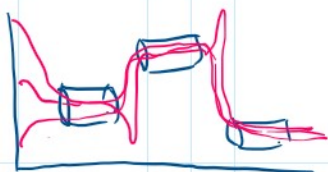


$\leadsto \mathcal{T}_{co}$ kompaktno - odprte topologija

Primeri: X kompakten, Y metričen $\begin{cases} \mathcal{T}_{co} \\ \text{metrična topologija (supremum metrika)} \\ \text{oz topologija enakomerne konvergence} \end{cases}$

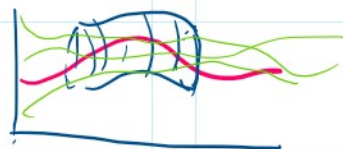
Ali gre za isto topologijo?

baza $\mathcal{T}_{co}$



DA

baza $\mathcal{T}_{ec}$



Trditev

če Y metričen, potem za bazo $\mathcal{T}_{co}$ na $\mathcal{C}(X, Y)$ lahko vstavimo

$$\mathcal{B} := \{ \langle f, K, \varepsilon \rangle \mid f: X \rightarrow Y, K^{\text{komp}} \subseteq X, \varepsilon > 0 \} \quad (\text{kjer } \langle f, K, \varepsilon \rangle = \{ g: X \rightarrow Y \mid d(f|_K, g|_K) < \varepsilon \ \forall x \in K \})$$

Dokaz

$$\mathcal{W} := \{ \langle f, K, \varepsilon \rangle \mid f: X \rightarrow Y, K^{\text{komp}} \subseteq X, \varepsilon > 0 \} \quad (\text{kjer } \langle f, K, \varepsilon \rangle = \{ g: X \rightarrow Y \mid d(f|_K, g|_K) < \varepsilon \ \forall x \in K \})$$

Dokaz

$\mathcal{B}$ je baza

polnjenje ✓

$$\langle f_1, K_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2 \rangle \ni g$$



$$\text{istota } K, \varepsilon \langle g, K, \varepsilon \rangle \subseteq$$



$$K = K_1 \cup K_2$$

$$\min \{ \varepsilon_1 - \max_{x \in K_1} d(f_1(x), g(x)), \varepsilon_2 - \max_{x \in K_2} d(f_2(x), g(x)) \} =: \varepsilon$$

$$\langle g, K, \varepsilon \rangle \subseteq \langle f_1, K_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2 \rangle$$

$$\mathcal{T}_{co} \subseteq \mathcal{T}_{ec}$$

$$\langle K, K|_Y, \varepsilon \rangle = \langle \text{const}_f|_K, \varepsilon \rangle$$

podskema

$$\mathcal{T}_{ec} \subseteq \mathcal{T}_{co}$$

$\langle f, K, \varepsilon \rangle$; mora vsebovati neko okolico f iz topologije $\mathcal{T}_{co}$



$U_\varepsilon := \{ x \in K \mid d(f(x), f(c)) < \frac{\varepsilon}{2} \}$, če K so odprto pokritje $K \rightsquigarrow U_{c_1}, \dots, U_{c_n}$ pokritje K

$$\Rightarrow \langle \bar{U}_{c_1}, K(f(c_1), \frac{\varepsilon}{2}) \rangle \cap \dots \cap \langle \bar{U}_{c_n}, K(f(c_n), \frac{\varepsilon}{2}) \rangle \subseteq K(f, K, \varepsilon)$$

□

X kompakten, Y metričen $\rightsquigarrow$

topologija enakomerne konvergence

X poljuben, Y metričen $\rightsquigarrow$

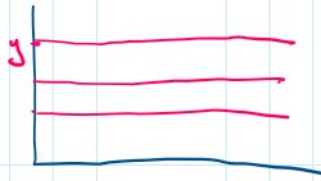
$\mathcal{T}_{co}$ je topologija enakomerne konvergence na kompaktilih
(to je ravno topologija v kateri konvergirajo Taylorjeve vrste)

Y lahko enačimo s podprostorom konstantnih preslikav v $\mathcal{C}(X, Y)$

$$i: Y \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Y) \quad y \mapsto c_y$$

je vličen (zaprta vličen, če je $Y \in \mathcal{I}_2$)

konstantnih preslikav v $\mathcal{C}(X, Y)$: $u: I \rightarrow C(X, Y)$ $y \mapsto c_y$ (zaporedi vlonitev, če je $Y \in T_2$)



- injektivna
- $i^{-1} \langle K, U \rangle = U$
- $\langle K, U \rangle \cap Z_i$ vlonitev

$f: X \rightarrow Y$ ni konstanta
 $x, x' \quad f(x) \neq f(x')$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $U \cap V = \emptyset$
 $f \in \langle x, U \rangle \cap \langle x', V \rangle$,
 ki ne slika Z_i (ne
 vsebuje konstant)

če Y nima neke lastnosti, ki je dedna, potem je ne more met. $\mathcal{C}(X, Y)$
 $Y \notin T_2 \Rightarrow \mathcal{C}(X, Y) \notin T_2$, Y ni metrizabilen $\Rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ ni metrizabilen

Veja izrek (dokaz opustimo)

$\mathcal{C}(X, Y)$ s c_0 topologijo je metrizabilen $\Leftrightarrow$ Y je metrizabilen in
 X je "hemikompakten"
 (številna razsežna kompaktnost)

Trditev

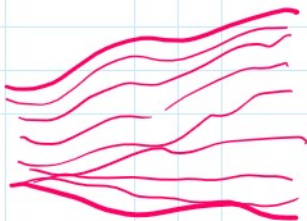
$(\mathcal{C}(X, Y), T_{c_0})$ je Hausdorff / regularen $\Leftrightarrow Y$ je Hausdorff / regularen

Dokaz

D.N.

Povezanost in kompaktnost v $\mathcal{C}(X, Y)$

- pot v prostoru preslikav imenujemo homotopija
 $\text{homotopija} = \text{pot v } \mathcal{C}(X, Y)$



pot je zvezna družina preslikav $f_t: X \rightarrow Y$,
 indeksiranih z $[0, 1]$, k. s. začne pri
 f_0 in konča pri f_1

• Kompaktnost v $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ je vsebina izreka Arzelà - Ascoli:

Naj bo X kompakten.

$F \subseteq C(X)$ je kompaktna $\Leftrightarrow F$ je zaprta,

omejena ($|f(x)| < M \quad \forall x \in X \quad \forall f \in F$) in

enako-vezna ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in F: d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$)

(equicontinuous family)