

3. DOMAČA NALOGA

Oddaja rešitev nalog v dogovoru s tutorji v tednu od ponedeljka 10. 1. 22 dalje.

1. (10) Naj bosta $y_1(x) = e^x$ in $y_2(x) = x^2 + 1 + e^x$ rešitvi diferencialne enačbe

$$a(x)y' + b(x)y = c(x),$$

kjer so a, b, c zvezne funkcije na $\mathbb{R}$ in funkcija a nima ničel. Poiščite tisto rešitev te diferencialne enačbe, katere graf gre skozi točko $(1, 3e)$.

2. (10) Rešite

$$y' = \frac{(1 + e^x - e^{-x})y^2 - (e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x})y + 1}{3y^2 - 2(x + e^x + e^{-x})y + (xe^x + xe^{-x} + 1)}.$$

3. (10) V prvi posodi je 10l vode, v kateri je raztopljeno 10g soli, v drugi posodi pa je 5l vode, v kateri je tudi raztopljeno 10g soli. Obe posodi imata mešalec. V prvo posodo začne ob času $t = 0$ pritekati solna raztopina s koncentracijo 2 g/l. Vsako sekundo priteče 1 dl raztopine. Istočasno iz prve posode izteka 1dl/s raztopine v drugo posodo ter nato iz druge posode nova raztopina s hitrostjo 1dl/s v kanalizacijo. Kolikšna je količina soli v drugi posodi po eni minuti?

4. (10) Poiščite tisto rešitev sistema

$$x'' = 2x + y \quad y'' = x + 2y$$

za katero velja $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$ in $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Pomoč:

- i) Splošna rešitev enačbe $x' = ax$ je $x(t) = Ce^{at}$.
ii) Splošna rešitev sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ je $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{c} = Pe^{Jt}\vec{d}$.
iii) Za $a > 0$ je splošna rešitev enačbe $x'' = ax$ oblike $x(t) = Ce^{\sqrt{a}t} + De^{-\sqrt{a}t}$.
iv) Splošna rešitev sistema $\vec{x}'' = A\vec{x}$ je ...
5. (10) Množico realnih števil opremimo z dvema metrikama: standardno metriko $d_2(x, y) = |x - y|$ ter diskretno metriko

$$d_{\text{disk}}(x, y) = 1, \text{ če } x \neq y$$

in

$$d_{\text{disk}}(x, y) = 0, \text{ če } x = y.$$

Poiščite vse zvezne preslikave iz $(\mathbb{R}, d_2)$ v $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ ter vse zvezne preslikave iz $(\mathbb{R}, d_{\text{disk}})$ v $(\mathbb{R}, d_2)$.