

20. 12. 2021 16⁰⁰

Čas pisanja je 110 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!



Sedež (2.05)

1
2
3
4
Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dana naj bo **cikloida**, parametrizirana z

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

- a) Izračunaj dolžino cikloide.
- b) Parametriziraj krivuljo, ki jo opiše konec vrvi, z začetkom v točki $(0,0)$, ko se ta odvija s cikloide.

Rešitev:

Imamo

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1 - \cos t, \sin t),$$

od koder dobimo $|\dot{r}(t)| = 2 \sin \frac{t}{2}$ in dobimo dolžino cikloide enako

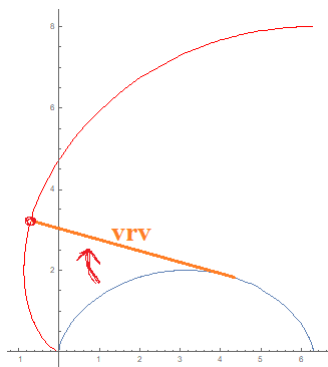
$$\int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \dots = 8.$$

Imamo še dolžino krivulje v odvisnosti od t :

$$s(t) = \int_0^t 2 \sin \frac{\tau}{2} d\tau = 4(1 - \cos \frac{t}{2})$$

Za odvijanje vrvi pa imamo

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) - s(t) \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = (t - \sin t, 1 - \cos t) - 4(1 - \cos \frac{t}{2}) \frac{(1 - \cos t, \sin t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad t \in [0, 2\pi].$$



2. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} dx.$$

- a) Za katere $a \geq 0$ konvergira integral $I(a)$?
b) Ali je $I(a)$ odvedljiva funkcija na intervalu $[1, \infty)$?
c) Izračunaj $I(2)$.

Rešitev: Pogledamo konvergenco pri $x = 0$ in $x = \infty$. V prvem primeru preoblikujemo

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

in velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} = (L'Hop) = 0$$

torej integral konvergira.

V drugem primeru pa imamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2}}{x^2} dx$$

in velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} = (L'Hop) = 0$$

torej integral konvergira. Konvergenčno območje je torej

$$a \in [0, \infty).$$

Imamo

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{a+x^2}{1+x^2}\right)}{2+x^2} dx$$

in velja (za $a \in [1, \infty)$)

$$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2+x^2)(a+x^2)} = \dots = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{a}(2+\sqrt{2}\sqrt{a})}.$$

Res, za $a \in [1, \infty)$ imamo oceno

$$\frac{1}{(2+x^2)(a+x^2)} \leq \frac{1}{(2+x^2)(1+x^2)},$$

kar po Weierstrassovem kriteriju pomeni, da integral za $I'(a)$ konvergira enakomerno (vsaj) na $a \in [1, \infty)$.

Od tod dobimo

$$I(a) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{2}\sqrt{a}) + C.$$

Ker je $I(1) = 0$, kar nam da

$$I(a) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{2}\sqrt{a}) - \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{2}\sqrt{1}).$$

Od tod končno dobimo

$$I(2) = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{2}\sqrt{2}) - \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \ln(2 + \sqrt{2}\sqrt{1}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{4}{2 + \sqrt{2}}\right).$$

3. naloga (25 točk)

Telo T naj bo podano z

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x - y^2}\}.$$

Izračunaj trojni integral

$$I = \iiint_T z \, dx \, dy \, dz.$$

Rešitev:

Integral I enak

$$V = \iint_D dx \, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x-y^2}} z \, dz$$

kjer je D notranjost kroga $x = x^2 + y^2$ oz. $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Dobimo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D (x - y^2 - (x^2 + y^2)^2) \, dx \, dy = (\text{polarne koordinate}) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r(r \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi - r^4) \, dr = \dots = \frac{11\pi}{384}. \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Dana naj bo diferencialna enačba

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = e^{-ax} \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Poišči splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

b) Poišči vse rešitve $y(x)$ dane diferencialne enačbe, za katere je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Rešitev:

Imamo

$$y = Ae^{-x} + B \cos(2x) + C \sin(2x) + \frac{e^{-ax}}{(1-a)(a^2+4)} \quad a \neq 1$$

in

$$y = Ae^{-x} + B \cos(2x) + C \sin(2x) + \frac{xe^{-x}}{5} \quad a = 1$$

Iskane rešitve so

$$y = Ae^{-x} + \frac{e^{-ax}}{(1-a)(a^2+4)} \quad A \in \mathbb{R} \quad a > 0 \quad (a \neq 1)$$

v prvem primeru in

$$y = Ae^{-x} + \frac{xe^{-x}}{5}$$

v primeru, da je $a = 1$.