

TGP, 2021/22
13. VAJE : 29. 12. 2021

1. Naj bo X neskončna množica. Pokaži, da simetrična grupa S_X ni amenabilna. Naj bo $G = \{\pi \in \text{Bij}(\mathbb{N}) \mid \pi(n) \neq n \text{ samo za končno mnogo } n \in \mathbb{N}\}$. Pokaži, da je G amenabilna.
2. Pokaži, da končno generirana linearna grupa ni amenabilna natanko tedaj, ko vsebuje prosto podgrupo.
3. Naj bo G končno generirana grupa, ki zadošča Følnerjevemu pogoju. Pokaži, da obstaja Følnerjevo zaporedje končnih podmnožic $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z lastnostmi $X_n \subset X_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.
4. Naj bo G grupa in H Hilbertov na katerega G deluje z unitarnimi operatorji (unitarno upodobitvijo).

Naj bo $Q \subset G$ in $\varepsilon > 0$ vektor $x \in H$ je (Q, ε) -invarianten, če je

$$\|gx - x\| < \varepsilon \|x\|$$

za vsak $g \in Q$.

Unitarna upodobitev grupe G ima *skoraj invariantne vektorje*, če za vsako končno podmnožico $Q \subset G$ in vsak ε obstaja (Q, ε) -invarianten vektor.

Podmnožica $Q \subset G$ je Kazhdanova množica, če obstaja $\varepsilon > 0$ za katerega velja: vsaka unitarna upodobitev, ki ima (Q, ε) -invarianten vektor ima tudi neničeln invarianten vektor.

Grupa ima lastnost (T) , ima kakšno končno Kazhdanovo množico.

Naj bo G končno generirana amenabilna grupa, ki deluje na $l^2(G, \mathbb{C})$ z levo translacijo. Pokaži, da delovanje opisuje unitarno upodobitev. Pokaži, da ima opisana upodobitev skoraj invariantne vektorje.

Pokaži, da ima vsaka končna grupa lastnost (T) .

Pokaži, da je vsaka končno generirana amenabilna grupa z lastnostjo (T) končna.