

Odvodi

1 Računanje odvodov, tangent in normal

1. Izračunaj odvode naslednjih funkcij.

(a) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - 2x + 4x^4 - 3 + 4\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = e^{-2x} \sin x$

(c) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\tan x^2}$

(d) $f(x) = x^{\cos x}$

Rešitev:

(a) $-\frac{2}{3x^3} - 2 + 16x^3 + \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

(c) $e^{\sqrt{x} \frac{\sin x^2 \cos x^2 - 4x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x} \sin^2 x^2}},$

(d) $x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right),$

(b) $e^{-2x} (\cos x - 2 \sin x)$

2. Izračunaj tangento in normalo na graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ v točki $x = 1$.

Rešitev: $y = x - 1 + \ln 2$ in $y = -x + 1 + \ln 2$

3. Izračunaj tangento in normalo na krivuljo $y^2 - 2y = x$ v točki $(0, 2)$.

Rešitev: $y = \frac{x}{2} + 2$ in $y = -2x + 2$

4. Izračunaj kot med krivuljama $y_1 = 3x^2 - 2$ in $y_2 = 2(1+x^2)^{-1}$. **Rešitev:** $\arctan(7/5)$

2 Ekstremi

1. Poišči območja naraščanja in padanja, stacionarne točke ter lokalne ekstreme funkcij f z naslednjim predpisom.

(a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

(c) $f(x) = \sin x + \cos x$

(b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(d) $f(x) = (3x^2 - 1)e^{-3x}$

Rešitev:

(a) Raste: $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$, pada: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(3, \infty)$. Stacionarni točki sta $x = 1$ in $x = 3$. Prva je lokalni minimum, druga pa lokalni maksimum.

- (b) Raste: $[-1, 0)$, pada: $(0, 1]$. Lok. maks.: $x = 0$.
- (c) Raste: $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; pada: $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Lok. min.: $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; lok. maks.: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (d) Raste: $(-\frac{1}{3}, 1)$, pada: $(-\infty, -\frac{1}{3})$, $(1, \infty)$. Lok. min.: $x = -\frac{1}{3}$; lok. maks.: $x = 1$.
- (e) Raste: $(\frac{1}{e}, \infty)$, pada: $(0, \frac{1}{e})$. Lok. min.: $x = \frac{1}{e}$.
- (f) Raste: $(-1, 1)$, pada: $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$. Lok. min.: $x = -1$; lok. maks.: $x = 1$.
2. Dana je točka $T(1, 2)$. Poišči točko na premici z enačbo $y = 2x - 1$, ki je točki T najbližje.
- Rešitev:** $(\frac{7}{5}, \frac{9}{5})$
3. Slika višine $1m$ visi na navpičnem zidu, tako da je spodnji rob $2,5m$ nad tlemi. Na katerem mestu mora stati opazovalec, ki ima oči v višini $1,7m$ nad tlemi, da bo videl sliko pod največjim zornim kotom?
- Rešitev:** $1,2m$ od stene

3 Računanje približkov

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

1. Približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) $\sqrt{1.01}$

(b) $\ln 0.98$

Rešitev:

(a) 1.005

(b) -0.02

4 L'Hospitalovo pravilo

1. Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \arctan x)$

(e) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(d) $\lim_{x \downarrow 0} \sin x \ln x$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x}$

Rešitev:

(a) $\frac{1}{4}$

(c) 2

(e) 1

(b) 2

(d) 0

(f) $\frac{1}{2}$

5 Risanje grafov

Za funkcijo $f(x) = (3x^2 - 1)\text{Exp}(-3x)$ določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote, ekstreme, intervale naraščanja/padanja, prevoje, intervale konveksnosti/konkavnosti ter nariši graf.