

Integrali

1 Računanje nedoločenih integralov

1. Izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int (x + \frac{1}{x})^2 dx$

(b) $\int (\tan^2 x - \sin x) dx$

Rešitev:

(a) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$

(b) $\tan x - x + \cos x + C$

2 Uvedba nove spremenljivke

$$t = g(x) \implies \int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$$

1. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int x(2x + 5)^{10} dx$

(e) $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$

(i) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(f) $\int \frac{e^x}{e^x+2} dx$

(j) $\int \sqrt{1-x^2} dx$ z novo spremenljivko $t = \arcsin x$

(c) $\int \frac{x}{x^4+1} dx$

(g) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2} dx$

(d) $\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2} dx$

(h) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx$

Rešitev:

(a) $\frac{(2x+5)^{12}}{48} - \frac{5(2x+5)^{11}}{44} + C$

(f) $\ln(e^x + 2) + C$

(b) $\frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$

(g) $e^x - 2 \ln(e^x + 2) + C$

(c) $\frac{\arctan x^2}{2} + C$

(h) $\ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + C$

(d) $-\frac{1}{\ln x+1} + C$

(i) $\frac{(\arcsin x)^3}{3} + C$

(e) $\tan x - \frac{1}{\cos x} + C$

(j) $\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$

2. Izračunaj integrale naslednjih funkcij.

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(b) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

Rešitev:

(a) $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

(b) $\frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C$

3 Integracija per partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \quad \text{oz.} \quad \int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, dx$$

1. Z uporabo integracije per partes izračunaj naslednje integrale.

(a) $\int x^2 \cos \frac{x}{2} \, dx$

(b) $\int (x^2 - 3) \ln x \, dx$

(c) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

Rešitev:

(a) $2(x^2 - 8) \sin \frac{x}{2} + 8x \cos \frac{x}{2} + C$

(c) $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$

(b) $(\frac{x^3}{3} - 3x) \ln x - \frac{x^3}{9} + 3x + C$

4 Integriranje racionalnih funkcij

1. Izračunaj integrale naslednjih racionalnih funkcij.

(a) $\int \frac{x^2}{x^2+4} \, dx$

(c) $\int \frac{1}{4x^2-1} \, dx$

(e) $\int \frac{x}{x^2-2x+1} \, dx$

(b) $\int \frac{x^2+2}{x^2+2x+2} \, dx$

(d) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6} \, dx$

(f) $\int \frac{x^3}{4x^2+4x+1} \, dx$

Rešitev:

(a) $x - 2 \arctan \frac{x}{2} + C$

(d) $\frac{4 \ln |x-3| + \ln |x+2|}{5} + C$

(b) $x - \ln(x^2 + 2x + 2) + 2 \arctan(x + 1) + C$

(e) $\ln |x - 1| - \frac{1}{x-1} + C$

(c) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C$

(f) $\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{32x+16} + \frac{3}{16} \ln |2x + 1| + C$

5 Računanje in uporaba določenih integralov

1. Izračunaj naslednje določene integrale.

(a) $\int_0^2 |1 - x| \, dx$

(b) $\int_2^\infty \frac{1}{x^2+x-2} \, dx$

Rešitev:

(a) 1

(b) $\frac{1}{3} \ln 4$

2. Izračunaj ploščino omejenega območja, ki ga omejujejo krivulja $y = x^2 - 5x + 6$ in obe koordinatni osi.

Rešitev: $\frac{14}{3}$

3. Izračunaj ploščino omejenega območja, ki ga omejujejo krivulje $y = 2^x$, $y = 2$ in $x = 0$.

Rešitev: $2 - \frac{1}{\ln 2}$

4. Naj bo D omejeno območje, ki ga omejujeta krivulji $y^2 = 2x$ in $x^2 = 2y$.

(a) Izračunaj ploščino omejenega območja D .

(b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če območje D zarotiramo okoli x osi.

Rešitev:

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{12\pi}{5}$

5. Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če lik omejen s krivuljami $xy = 4$, $x = 4$, $x = 1$ in $y = 0$ zarotiramo okoli x osi.

Rešitev: 12π

6. Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če omejen lik med grafoma funkcij $f(x) = x^2 + 2x + 2$ in $g(x) = x + 4$ zarotiramo okoli x osi.

Rešitev: $\frac{117\pi}{5}$

7. Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če elipso $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ zarotiramo okoli x osi.

Rešitev: $\frac{16\pi}{3}$

8. Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo z rotacijo parabole $y^2 = 4ax$, $0 \leq x \leq 3a$ okrog x osi.

Rešitev: $\frac{56\pi a^2}{3}$

9. Naj bo funkcija f dana s predpisom $f(x) = \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$ in naj γ označuje tisti del grafa funkcije f , ki leži nad x osjo. Izračunaj:

a) površino vrtenine, ki jo dobimo z rotacijo krivulje γ okrog x osi,

b) dolžino krivulje γ .

Rešitev:

a) 3π

b) $2\sqrt{3}$

10. Asteroida je krivulja z enačbo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Izračunaj dolžino asteroide.

Rešitev: $6a$

11. (a) Dokaži, da je $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$.

(b) Izračunaj dolžino grafa funkcije $f(x) = -\ln(\cos x)$ nad intervalom $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Rešitev: $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

12. Ugotovi, ali obstajajo naslednji integrali.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx$

(d) $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^2} dx$

Rešitev:

(a) Ne.

(c) Da.

(b) Da.

(d) Ne.