

LINEARNA ALGEBRA 2021/22

VAJE: algebrske strukture

Desete vaje (drugi del)

1. Ali je grupoid, polgrupa, monoid, grupa? Ali je operacija komutativna?

$$(\{0\}, +), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{N}, *), (\mathbb{N}_0, *), (\mathbb{R}^3, \times), (M_n(\mathbb{R}), +), (M_n(\mathbb{R}), *)$$

2. Pokaži, da je množica vseh preslikav $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoid za kompozicijo.

Pokaži, da ima

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ n - 1 & ; n \geq 2 \end{cases}$$

desni inverz (neskončno desnih inverzov) ne pa tudi levega.

Enajste vaje

1. Podmnožica H (pol)grupe $(G, \cdot)$ je pod(pol)grupa, če je H (pol)grupa za isto operacijo. Naj bo M monoid. Pokaži, da množica vseh obrnljivih elementov v M podpolgrupa, ki je tudi grupa.
2. Zapiši vse možne tabele množenja grupe z 2/3/4/5 elementi.
3. Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$$

permutaciji.

Izračunaj $\pi\sigma$ in $\sigma\pi$.

Zapiši π, σ kot produkt disjunktnih ciklov.

Izračunaj red α in β .

4. Pokaži, da je S_2 komutativna S_3 ni komutativna.
5. Pokaži, da je $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, *)$, $f(x) = e^x$ homomorfizem grup. Ali je tudi izomorfizem?
6. Naj bosta $1_G, 1_H$ enoti grup G, H , naj bo $f: G \rightarrow H$ homomorfizem. Pokaži, da je f injektiven natanko tedaj, ko iz $f(g) = 1_H$ sledi $g = 1_G$.
7. Naj bo $f: G \rightarrow H$ homomorfizem. Pokaži, da red slike elementa $f(g) \in H$ deli red elementa $g \in H$.
8. Pokaži, da je $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ izomorfna $\mathbb{Z}_6$. Pokaži, da $\mathbb{Z}_9$ ni izomorfna $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Dvanajste vaje

1. Pokaži, da ne obstaja netrivialen homomorfizem grup $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_{2k+1}$.
2. Naj bo G grupa, v kateri velja $g^2 = 1$ za vsak $g \in G$. Pokaži, da je G abelova.
3. Naj bo $(R, +, \cdot)$ (asociativen) kolobar pokaži, da je $r0 = 0r = 0$ za vsak $r \in R$.
Dokaži: če je $1 = 0$, potem je $R = \{0\}$.
Pokaži, da je $-(rs) = (-r)s = r(-s)$.
4. Naj bosta R_1 in R_2 kolobarja. Potem je $R_1 \times R_2$ kolobar za operaciji po komponentah. Določi obrnljive elemente $R_1 \times R_2$. Pokaži, da za obsega D_1, D_2 kolobar $D_1 \times D_2$ ni obseg.
5. (Razširjen Evklidov algoritem)

Data: Neničelni celi števili a, b . (Ali neničelna polinoma.)

Result: d, x, y , kjer je $d = \gcd(a, b)$ in $xa + yb = d$.

$(r_0, x_0, y_0) = (a, 1, 0)$;

$(r_1, x_1, y_1) = (b, 0, 1)$;

while $r_{i+1} \neq 0$ **do**

$k_i = r_{i-1} // r_i$; $\triangleright$ celoštevilsko deljenje (polinomsko deljenje)
 $(r_{i+1}, x_{i+1}, y_{i+1}) = (r_{i-1}, x_{i-1}, y_{i-1}) - k_i(r_i, x_i, y_i)$;

end

return (r_i, x_i, y_i)

Pokaži, da algoritem deluje pravilno.

a.) Pokaži, da je $\gcd(r_j, r_{j+1}) = \gcd(r_{j+1}, r_{j+2}) = \gcd(r_{i-1}, r_i) = r_i$

b.) Pokaži, da je $x_i a + y_i b = r_i$ za vsak i .

6. Pokaži, da je celoštevilska enačba $ax + by = c$ rešljiva natanko tedaj, ko je c večkratnik $\gcd(a, b)$.
7. Reši celoštevilsko enačbo $4333x + 623y = 21$

Trinajste vaje

1. Poišči (multiplikativni) inverz 7 v $\mathbb{Z}_{13}$. Reši enačbi $66x = 84$ in $66y = 14$ v $\mathbb{Z}_{105}$.
2. Poišči dve neničelnai matriki $r, s \in M_n(\mathbb{R})$, za katera je $rs = 0$ in $sr \neq 0$.
Naj bo R poljuben kolobar in neničelna elementa $r, s \in R$, za katera je $rs = 0$. Pokaži, da r in s nista obrnljiva.
Pokaži, da je $\mathbb{Z}_n$ polje natanko tedaj, ko je n praštevilo.
3. Naj bo p praštevilo. Vzemimo $x, y \in \mathbb{Z}_p[x, y]$ pokaži, da je $(x + y)^p = x^p + y^p$. Po Poišči primer, ko p ni praštevilo in enakost ne velja.

4. Določi vse homomorfizme kolobarjev $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{26}$.

5. Ali je – vektorski podprostor v – ?

a.) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & \\ & -a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

b.) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \text{ v } \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

c.) $W = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(x) = p(-x)\} \text{ v } \mathbb{R}_n[x].$

d.) $W = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p \text{ ima vsaj eno realno ničlo}\} \text{ v } \mathbb{R}_n[x], n \geq 2.$