

PRESLIKAVE NA NORMALNIH PROSTORIH

Obravnavali bomo $C(X) = C(X, \mathbb{R})$.

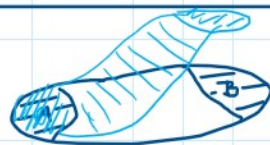
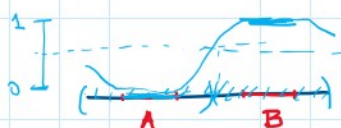
V splošnem ni nujno, da obstajajo nekonstantne preslikave $X \rightarrow \mathbb{R}$
npr., če X neskončen s topologijo končnih komplementov

Obstajajo celo regularni prostori X , da je $C(X) = \{\text{konstante}\}$

Pokazali bomo, da na normalnih prostorih obstaja veliko realnih preslikav.

IZREK (Urissonova lema)

Prostor X je $T_4 \iff$ za vsak par zaprtih, disjunktih $A, B \subseteq X$
obstaja preslikava $f: X \rightarrow [0, 1]$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$



Dokaz

$(\Leftarrow)$ $f: (X, A, B) \rightarrow (I, 0, 1) \rightsquigarrow f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ in $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ ostro ločita A in B

$$(T_4 \text{ zaprta } \supseteq \bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha} \overline{V_{\alpha}} \subseteq U)$$

$(\Rightarrow)$ A, B zaprti $\subseteq X$, $A \cap B = \emptyset$

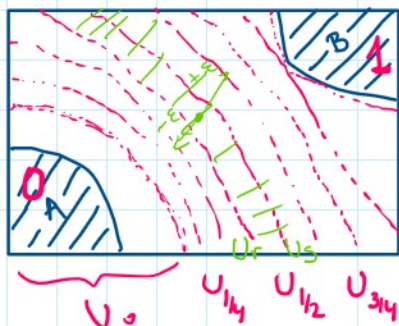
$U_1 := X - B$, jasno $A \subseteq U_1$

obstaja U_0 : $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$

obstaja $U_{1/2}$: $\overline{U_0} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$

obstajata $U_{1/4}, U_{3/4}$ $\overline{U_0} \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq U_1$

$\overline{U_0} \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq U_1$



$$U_0 = U_{1/4} \subseteq U_{1/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq U_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq U_{3/4} \subseteq U_1$$

$$\bar{U}_0 \subseteq U_{1/8} \subseteq \bar{U}_{1/8} \subseteq U_{1/4} \subseteq \bar{U}_{1/4} \subseteq U_{3/8} \subseteq \bar{U}_{3/8} \subseteq U_{1/2} \subseteq \bar{U}_{1/2} \subseteq U_{5/8} \subseteq \bar{U}_{5/8} \subseteq U_{3/4} \subseteq \bar{U}_{3/4} \subseteq U_{7/8} \subseteq \bar{U}_{7/8} \subseteq U_1$$

Tako dobimo $\{U_{\frac{a}{2^n}} \mid 0 \leq a \leq 2^n, n \geq 0\}$; za $r < s$ je $A \subseteq \bar{U}_r \subseteq U_s \subseteq X - B$

Definiramo $f: X \rightarrow [0,1]$, $f(x) := \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\}, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$ očitno $f(A) = 0$
 $f(B) = 1$

f je zvezna

najprej za x , kjer je $f(x) \in (0,1)$

$\varepsilon > 0$ izberemo dvojčka r, s : $f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$

$U_s - \bar{U}_r$ je odprta okolica x in $f(U_s - \bar{U}_r) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

za $f(x) = 0$ ali 1 sami (zadostita enostranska ocena)

□

Posledica X normalen $\Rightarrow$ za $x \neq x'$ v X obstaja $f: X \rightarrow I$, $f(x) \neq f(x')$.

Pravimo, da realne funkcije **ločijo točke**.

□

Če je X metričen, lahko Urysonovo funkcijo zapišemo s pomočjo metrike:

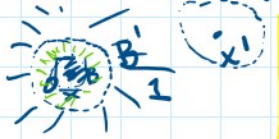
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

(Pri tem je $A = f^{-1}(0)$ in $B = f^{-1}(1)$, kar je nekoliko

boljše kot za splošne normalne prostore $\leadsto$ "popolnoma normalen".)

V obratni smeri, Urysonove funkcije lahko uporabimo za konstrukcijo metrike.

X normalen, z neko bazo $\mathcal{B}$: za $x \neq x'$ v X lahko najdemo $B, B' \in \mathcal{B}$ da je $\underline{x \in B \subseteq \bar{B} \subseteq B' \nsubseteq x'}$



Za vsake take par lahko izberemo Urissonovo funkcijo

$f_{B,B'}: (X, \bar{B}, X-B') \rightarrow (I, 0, 1)$, ki sledi x v 0 in x' v 1

Torej, če je $\mathcal{B}$ števena, potem obstaja števena družina funkcij v $\mathcal{C}(X, [0, 1])$, ki loči točke X .

IZREK (Urissonov metrizacijski izrek)

Vsak normalen, 2-števen prostor je metrizabilen.

Dokaz (skica)

X normalen, 2-števen bomo vložili v prostor realnih zaporedij z evklidsko metriko

Običajno metriko razširimo na zaporedja: $d((x_n), (y_n)) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$
 Da bo definicija dobra se omejujemo na "kvadratno sumabilna" zaporedja, tj. taka, da je $\sum x_n^2 < \infty$. Običajna oznaka ℓ^2 .

$\{f_n: X \rightarrow [0, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ (števena) družina Urissonovih funkcij, ki loči točke X .

Definiramo $f: X \rightarrow \ell^2$, $f(x) := \left(\frac{1}{n} f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$

• definicija je konkretna: (za vsake x je zaporedje $\left(\frac{1}{n} f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ s kvadratom sumabilno, po Weierstrassovem).

• definicija je korektna: (za vsake x je zaporedje $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ s kvadratno sumabilno, po Weierstrassovem kriteriju)

• f je injektivna $x \neq x' \Rightarrow \exists n: f_n(x) \neq f_n(x')$
 $\Rightarrow f(x) \neq f(x')$

• f je zvezna (komponente so zvezne)

• f je vlipek (oz. f^{-1} je zvezna na $f(X)$)

□

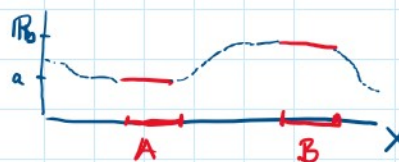
Če to združimo z izrekom Tihonova (regularen + 2-števen $\Rightarrow$ normalen) dobimo:

IZREK Vsak regularen, 2-števen prostor je metrizabilen.

Opomba: Zvedo obstajajo metrizabilni prostori, ki niso 2-števeni (npr. neskončna množica z diskretno topologijo). Znani so izreki, ki točno karakterizirajo metrizabilnost (Nagata-Smirnov).

Pri Urysonovi lemi lahko $[0,1]$ nadomestimo s poljubnim intervalom $[a,b]$ (preprosto komponiramo z raztegom $[0,1]$ na $[a,b]$)

Lemo lahko razumemo kot razširitev stopničaste funkcije na $A \sqcup B$ do zvezne funkcije na celotni X



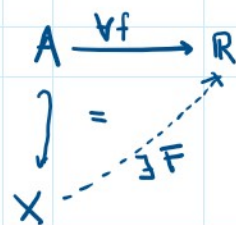
To bomo močno posplošili do izreka, ki zagotavlja

To bomo močno posplošili do izreka, ki zagotavlja razširitev poljubne preslikave $\gamma: A^{\text{zap}} \subseteq X$ na cel X .

Izrek (Tietzejev razširitevni izrek)

$$A^{\text{zap}} \subseteq X^{\text{normalen}}$$

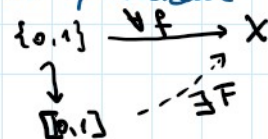
Vsako preslikavo $f: A \rightarrow J^{\text{interval}}$ lahko razširimo do preslikave $F: X \rightarrow J$
 ($f = F|_A$)



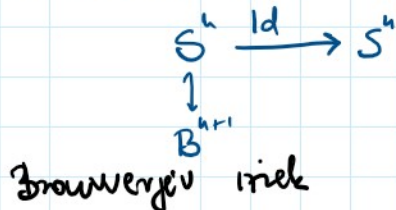
Opombe:

- Izreki o razširitvah so pomembni. Npr. Hahn-Banachov izrek, izrek o analitičnem nadaljevanju, ...

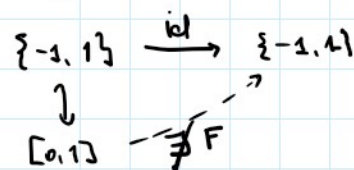
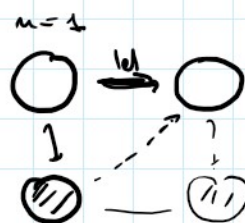
X je povezan s koturi $\Leftrightarrow$ vsako preslikavo $f: [0,1] \rightarrow X$ lahko razširimo do preslikave $F: [0,1] \rightarrow X$



Preslikave $\text{Id}: S^n \rightarrow S^n$ ni mogoče razširiti do preslikave $F: B^{n+1} \rightarrow S^n$

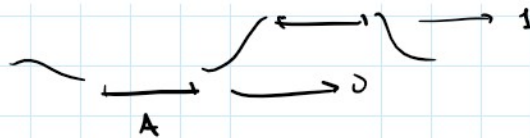


Brouwerjev izrek

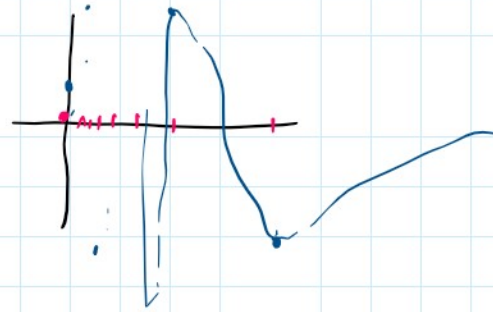


- Pri razširitevni izrekih je pomembno, da ne spreminjamo poddomene:
 $\text{Id}: S^1 \rightarrow S^1$ enostavno razširimo do $\text{Id}: B^2 \rightarrow B^2$

- Unisonova lema je zelo poseben primer Tietzejevega izreka

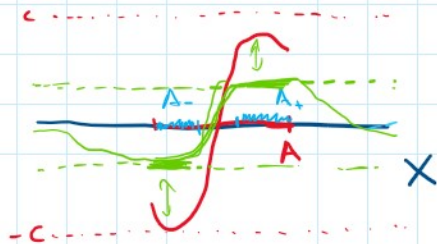


• $f: \underbrace{\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \cup \{0\}}_{\text{zapeta}} \rightarrow \mathbb{R}$



Lema $A^{\text{zap}} \subseteq X^{\text{norm}}$, $f: A \rightarrow [-c, c]$
 Obstaja $h: X \rightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$, za katero je $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ za vse $a \in A$

Dokaz



$$A_+ := \{a \in A \mid f(a) \geq \frac{c}{3}\}$$

$$A_- := \{a \in A \mid f(a) \leq -\frac{c}{3}\}$$

Za h vzamemo Urysonovo funkcijo
 $h: (X, A_-, A_+) \rightarrow (-\frac{c}{3}, \frac{c}{3})$

///

Dokaz izreka

Brež škode za splošnost prouzamemo $J = [-1, 1]$

F bomo dobili kot $F = h_1 + h_2 + \dots$

začnemo z $f: A \rightarrow [-1, 1]$, uporabimo lemo in dobimo $h_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$$f - h_1: A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}], \quad \rightsquigarrow \quad h_2: X \rightarrow [-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]$$

$$f - h_1 - h_2: A \rightarrow [-\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^2] \rightsquigarrow h_3: X \rightarrow [-\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2]$$

.....
 $F := h_1 + h_2 + h_3 + \dots$; zveza po Weierstrassovem kriteeriju

Očitno je $F|_A = \varnothing$.



Komentar :

v metričnih prostorih je: Uniformna kupa funkcij

dohaja Džetsevojemu kriteriju in metrični prostori so je enak