

7 Dobra osnovanost in indukcija

Naloga 7.1. Seštevanje na $\mathbb{N}$ rekurzivno definiramo kot

$$\begin{aligned}n + 0 &:= n, \\ n + m^+ &:= (n + m)^+.\end{aligned}$$

Dokažite naslednje trditve za vse $a, b, c \in \mathbb{N}$ (pri tem $1 := 0^+$).

- (a) $a + 1 = a^+$
- (b) $1 + a = a^+$
- (c) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (d) $a + b = b + a$

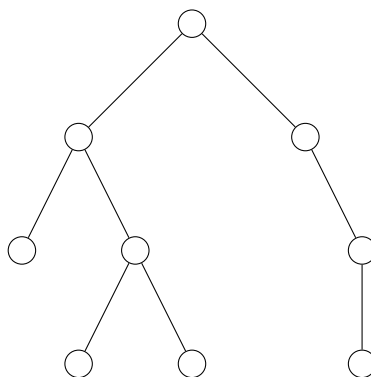
Naloga 7.2. Končne nize elementov iz množice S označimo z $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $a_i \in S$ za $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. **Dolžina** ℓ končnega niza je število elementov v nizu, tj. $\ell(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) = n$. Prazen niz označimo z ε in velja $\ell(\varepsilon) = 0$.

Stik ali **spoj** dveh končnih nizov dobimo tako, da za prvi niz pripnemo drugega. Stikanje označimo z $@$. Če sta torej $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ in $b_0 b_1 \dots b_{m-1}$ končna niza elementov iz množice S , potem je njun stik

$$(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) @ (b_0 b_1 \dots b_{m-1}) = a_0 a_1 \dots a_{n-1} b_0 b_1 \dots b_{m-1}.$$

- (a) Zgornje definicije niso povsem natančne, saj so podane s tropičji. Podajte induktivno definicijo končnih nizov ter rekurzivni definiciji stika in dolžine.
- (b) Z indukcijo dokažite, da je dolžina staknjene niza enaka vsoti dolžin ustreznih podnizov, tj. če sta a in b končna niza, velja:

$$\ell(a @ b) = \ell(a) + \ell(b).$$



Slika 1: Primer dvojiškega drevesa

Naloga 7.3. Spomnite se definicije dvojiških dreves s predavanj. Slika 1 podaja primer dvojiškega drevesa.

Globina drevesa je dolžina najdaljše poti (število vozlišč na poti) od korena do (poljubnega) lista. Drevo na sliki ima globino 4 (obstajajo tri različne poti, ki realizirajo to globino). Globina praznega drevesa je 0. **Obrnjeno drevo** dobimo iz dvojiškega drevesa, če vsakemu vozlišču zamenjamo levega in desnega otroka.

- Narišite obrnjeno drevo drevesa na sliki.
- Zapišite globino drevesa in obračanje drevesa kot rekurzivni funkciji na dvojiških drevesih.
- Z indukcijo dokažite, da ima dvojiško drevo z n vozlišči globino vsaj $\lceil \log_2(n+1) \rceil$.
- Z indukcijo dokažite, da je globina obrnjenega drevesa enaka globini prvotnega drevesa.

Naloga 7.4. Za naslednje stroge linearne ureditve ugotovite, ali so dobro urejene.

- $(\mathbb{Q}, <)$ množica racionalnih števil z običajno urejenostjo $<$.
- Podmnožica $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $<$ na realnih številih.
- Podmnožica $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $<$ na realnih številih.
- Podmnožica $\{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ z običajno urejenostjo $>$ na realnih številih.

Naloga 7.5. Definirajmo množico $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge \sin(\pi/x) = 0\}$.

- Ali je S z običajno relacijo $<$ na realnih številih dobro urejena?
- Ali je S z običajno relacijo $>$ na realnih številih dobro urejena?

Naloga 7.6. Množico $\mathbb{N}$ opremimo z relacijo stroge deljivosti (a strogo deli b , kadar a deli b in $a \neq b$). Ali dobimo dobro osnovano relacijo? Ali dobimo dobro ureditev?

Naloga 7.7. Konstruirajte dobro urejenost na množici racionalnih števil.

Naloga 7.8. Za podmnožico $S \subseteq \mathbb{N}$ rečemo, da je

- *dolnja*, kadar velja $\forall a \in S. \forall n \in \mathbb{N}. n \leq a \Rightarrow n \in S$, oz.
- *gornja*, kadar velja $\forall a \in S. \forall n \in \mathbb{N}. a \leq n \Rightarrow n \in S$.

- (a) Ali je množica vseh dolnjih podmnožic $\mathbb{N}$, urejena s strogo vsebovanostjo $\subset$, dobra ureditev?
- (b) Ali je množica vseh gornjih podmnožic $\mathbb{N}$, urejena s strogo vsebovanostjo $\subset$, dobra ureditev?