

Elementarne funkcije

1. Določi enačbo premice, ki poteka skozi točki $(1, 2)$ in $(2, 5)$.

Rešitev: $y = 3x - 1$

2. Določi enačbo premice, ki je pravokotna na premico $x + 2y = 1$ in poteka skozi točko $(1, 2)$.

Rešitev: $y = 2x$

3. Poišči vse kvadratne funkcije f , za katere velja $f(1) = 1$ in $f(2) = 2$. Katera od dobljenih funkcij zadošča $f(-1) = 7$?

Rešitev: $f(x) = ax^2 + (1 - 3a)x + 2a$, $f(x) = \frac{4}{3}x^2 - 3x + \frac{8}{3}$

4. Reši sistem

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= 15 \\ y^2 + xy &= 10\end{aligned}.$$

Rešitev: $x = -3$ in $y = -2$ ali $x = 3$ in $y = 2$.

5. Skiciraj graf polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

6. Skiciraj grafe naslednjih racionalnih funkcij.

(a) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$,

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(c) $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2+5x+6}$,

(d) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x-2}$.

7. Reši naslednje trigonometrične enačbe:

(a) $2 \sin^2 x - \sin x = 1$,

(b) $\sin x + \cos x = 1$,

(c) $4 \sin^2 x - \sin^2(2x) = 1$.

Rešitev:

(a) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(b) $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

8. Skiciraj graf funkcije $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + 1$.

9. Reši naslednji enačbi.

(a) $\frac{1}{\ln x} = 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right),$

(b) $4^{\sqrt{x}} + 4 = 5 \cdot 2^{\sqrt{x}},$

Rešitev:

(a) $x = e$

(b) $x_1 = 0, x_2 = 4$

10. Skiciraj graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(x+2) - 1$.

11. Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2x}\right).$$

Rešitev: $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$

12. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije

$$f(x) = -2 \arccos(x-1) + \frac{3\pi}{2}.$$

Izračunaj začetno vrednost funkcije f . Ali je funkcija naraščajoča?

Rešitev: $\mathcal{D}_f = [0, 2], \mathcal{Z}_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], f(0) = -\frac{\pi}{2}$. Funkcija je naraščajoča.

13. Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

14. Dokaži, da velja

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

15. Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Dokaži, da je sh injektivna na $\mathbb{R}$ in izračunaj njeno inverzno funkcijo.

(b) Dokaži, da je funkcija $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ liha.

(c) Dokaži, da je ch injektivna na $[0, \infty)$ in izračunaj inverzno funkcijo te zožitev.

(d) Dokaži, da velja $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

(e) Izpelji adicijska izreka za funkciji sh in ch :

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Rešitev:

(a) $\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(c) $\operatorname{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$