

TGP, 2021/22  
13. VAJE : 29.12.2021

1. Naj bo  $G$  grupa in  $H$  Hilbertov na katerega  $G$  deluje z unitarnimi operatorji (unitarno upodobitvijo).

Naj bo  $Q \subset G$  in  $\varepsilon > 0$  vektor  $x \in H$  je  $(Q, \varepsilon)$ -invarianten, če je

$$\|gx - x\| < \varepsilon \|x\|$$

za vsak  $g \in Q$ .

Unitarna upodobitev grupe  $G$  ima *skoraj invariantne vektorje*, če za vsako končno podmnožico  $Q \subset G$  in vsak  $\varepsilon$  obstaja  $(Q, \varepsilon)$ -invarianten vektor.

Podmnožica  $Q \subset G$  je Kazhdanova množica, če obstaja  $\varepsilon > 0$  za katerega velja: vsaka unitarna upodobitev, ki ima  $(Q, \varepsilon)$ -invarianten vektor ima tudi neničeln invarianten vektor.

Grupa ima lastnost  $(T)$ , ima kakšno končno Kazhdanovo množico.

Naj bo  $G$  končno generirana amenabilna grupa, ki deluje na  $l^2(G, \mathbb{C})$  z levo translacijo. Pokaži, da delovanje opisuje unitarno upodobitev. Pokaži, da ima opisana upodobitev skoraj invariantne vektorje.

Pokaži, da ima vsaka končna grupa lastnost  $(T)$ .

Pokaži, da je vsaka končno generirana amenabilna grupa z lastnostjo  $(T)$  končna.

2. Pokaži, da ima vsaka grupa amenabilno edinko, ki vsebuje vse ostale amenabilne edinke.
3. Pokaži, da je Grigorčukova grupa 2-grupa.