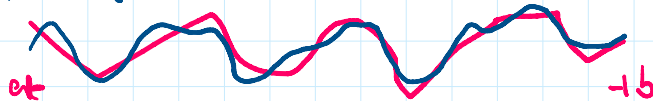


STONE-WEIERSTRASSOV IZREK

Znano je, da lahko vsako zvezno funkcijo aproksimiramo s polinomom.



Natančneje, za vsako $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in vsake $\varepsilon > 0$ obstaja polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, za katerega je $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vse $x \in [a, b]$.

Standardni dokaz je konstruktiven, z uporabo t.i. Bernsteinovih polinomov na intervalu $[0, 1]$.

$$1 = ((1-x) + x)^n = (1-x)^n + \binom{n}{1}(1-x)^{n-1} \cdot x + \dots + \underbrace{\binom{n}{i}(1-x)^{n-i} x^i}_{B_{n,i}(x)} + \dots + x^n$$

$B_{n,i}(x)$ Bernsteinova baza

npr:

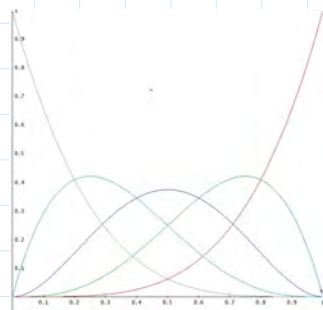
$$B_{4,0}(x) = (1-x)^4$$

$$B_{4,1}(x) = 4(1-x)^3 \cdot x$$

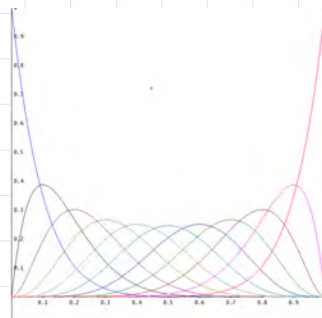
$$B_{4,2}(x) = 6(1-x)^2 x^2$$

$$B_{4,3}(x) = 4(1-x) x^3$$

$$B_{4,4}(x) = x^4$$



$$B_{10,i}(x)$$

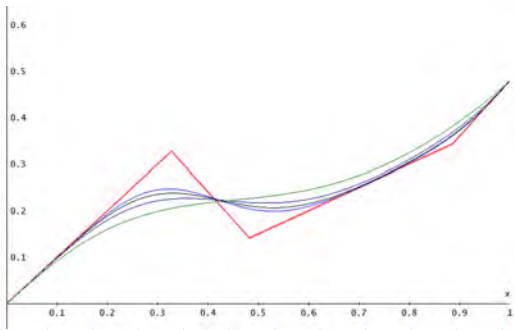


Za fiksno n so $B_{n,i}(x)$ razčlenitev enote na $[0, 1]$

$$B_{n,0}(x) + B_{n,1}(x) + \dots + B_{n,n}(x) = 1$$

Za zvezno funkcijo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo n -ti Bernsteinov polinom

$$f_n(x) := \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot B_{n,i}(x)$$



Bernsteinovi polinomi: konvergenca
za $n=6, 12, 18, 24$

Konvergenca je zelo počasna.

Prednost je, da je sorazmerno lahko pokazati, da $f_n \rightarrow f$ enakomerno na $[a, b]$:

- f zvezna $\leadsto M := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$

- $f_n(x) - f(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_{n,i}(x) - f(x) \sum_{i=0}^n B_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^n \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,i}(x)$

$$\leadsto |f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^n \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \cdot B_{n,i}(x)$$

- $\varepsilon > 0$, f enakomerno zvezna $\leadsto$ izberemo δ : $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum_{i=0}^n \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \cdot B_{n,i}(x) = \sum_{i: |x - \frac{i}{n}| < \delta} \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \cdot B_{n,i}(x) + \sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \cdot B_{n,i}(x)$$

$\left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \cdot B_{n,i}(x) \leq 2M \sum_{i: |x - \frac{i}{n}| \geq \delta} B_{n,i}(x) \leq 2M \sum_{i=0}^n \frac{\left(x - \frac{i}{n}\right)^2}{\delta^2} B_{n,i}(x) = \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{2M}{n \cdot \delta^2}$$

velja identiteta:

$$\sum_{i=0}^n \left(x - \frac{i}{n}\right)^2 B_{n,i}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Izberemo $\tilde{n}$, da je $\frac{2M}{\tilde{n} \cdot \delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ ---

Dokaz na $[a, b]$ dobimo s preprostim raztegom $[0, 1] \rightarrow [a, b]$.

Weierstrassov izrek je l. 1937 posplošil M. Stone na aproksimacijo funkcij v $C(X)$, kjer je X poljubni prostor.

- Kaj nadomesti polinome?

$C(X)$ je realna algebra; elemente lahko seštevamo in množimo ter tvorimo $\mathbb{R}$ -linearne kombinacije

v $C(\mathbb{R})$ so podmon $\mathbb{R}[x]$ najmanjša unitalna podalgebra, ki vsebuje $f(x)=x$.
Weierstrassov izrek pravi, da je $\mathbb{R}[x]$ gosta v $C([0,1])$.

velja: $\mathbb{R}[x]$ je gosta v $C(\mathbb{R})$ glede na enakomerno konv. na kompaktnih!

Izberimo nekeje funkcije $f_1, f_2, \dots \in C(X)$.

M. ktho videti, da najmanjšo unitalno podalgebra, ki te funkcije vsebuje
tvorijo vsi izrazi oblike $p(f_1, \dots, f_n)$, kjer je $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Izrek (Stone-Weierstrass)

Če je $A \subseteq C(X)$ unitalna podalgebra, ki loči točke X ,
potem je $\bar{A} = C(X)$ (v kompaktno-odprti topologiji!)

(A loči točke X , če za poljubna $x \neq x' \in X$
obstaja $f \in A$, $f(x) \neq f(x')$).

Npr. dovolj je, če A vsebuje eno injektivno
funkcijo

• $\{\sin x\}$ ne loči točk na $[-\pi, \pi]$, vendar pa
 $\{\sin x, \cos x\}$ ločita točke $[-\pi, \pi]$.)

Dokaz

Pomageli so bomo z naslednjo oceno:

Lema

$\mathcal{P}([0,1])$ je na $[0,1]$ enakomerna limita polinomov.

Dokaz

Razvijemo $\sqrt{t} = \sqrt{1+(t-1)}$ v Taylorjevo vrsto na $(0,2)$ in pokazemo,
da konverira za $t \rightarrow 0$ in da je konvergenca enakomerna na $[0,1]$.

□

Torej, če je $f \in A$, $f \geq 0$, potem je $\sqrt{f} \in \bar{A}$.

Ker je $|f| = \sqrt{f^2}$, je tudi $|f| \in \bar{A}$.

$$\text{tj. } \max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

dobimo

$$f, g \in \overline{A} \Rightarrow \min\{f, g\}, \max\{f, g\} \in \overline{A}$$

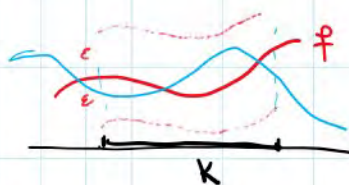
Če A nima točke, potem za poljubna $x \neq y$ v X in $a, b \in \mathbb{R}$ obstaja $f \in A$, $f(x) = a$, $f(y) = b$

$$(\text{jasno, če } g(x) \neq g(y)) \rightsquigarrow f(t) := a + \frac{b-a}{g(y)-g(x)} \cdot (g(t)-g(x))$$

Naj bo $f \in C(X)$ poljubna.

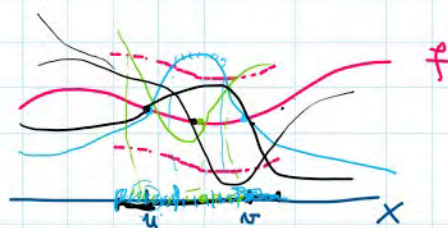
Že za co-kompakcije na $C(X)$ so množice $\langle f, K, \varepsilon \rangle$, $f \in C(X)$, $K \subseteq X$, $\varepsilon > 0$

Pokazati moramo, da za poljubna K, ε obstaja $g \in \overline{A} \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$.



Fiksiramo K in za vsak par $u \neq v \in K$

izberimo $h_{u,v} \in A$, $h_{u,v}(u) = f(u)$, $h_{u,v}(v) = f(v)$



Fiksiramo še $u \in K$ in opazujemo množico

$$U_v := \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

$$v \in U_v^{\text{odp}} \subseteq K \rightsquigarrow \{U_v \mid v \in K\} \text{ odp. pokritje}$$

$$\text{kompakta } K \rightsquigarrow U_{v_1}, \dots, U_{v_n} \text{ podpokritje} \quad h_u(x) := \min \{h_{u,v_1}(x), \dots, h_{u,v_n}(x)\}$$

$$\rightsquigarrow h_u \in \overline{A}, \quad h_u(x) < f(x) + \varepsilon \text{ za vse } x \in K \text{ in } h_u(u) = f(u)$$

$$V_u := \{x \in K \mid h_u(x) > f(x) - \varepsilon\} \text{ odprto pokritje za } K \rightsquigarrow V_{u_1}, \dots, V_{u_m} \text{ podpokritje}$$

$$\rightsquigarrow h(x) := \max \{h_{u_1}(x), \dots, h_{u_m}(x)\}$$

$h(x) := \max\{h_{n_1}(x), \dots, h_{n_m}(x)\}$

$$\leadsto h(x) := \max\{h_{n_1}(x), \dots, h_{n_m}(x)\}$$

$h \in \bar{A} \cap \langle f, k, \varepsilon \rangle$ kar smo hoteli dokazati.



Posledice

- polinomi so gosti v $C(X)$ za poljeen $X \subseteq \mathbb{R}$

če $C(X)$ ^{mehurastih} $\leadsto$ 2-števen
 $\bigcup$ gosti ~~gostih~~
 $\mathbb{R}[x] \supseteq \mathbb{Q}[x]$ stevna

- funkcije oblike $\sum p(x) \cdot q(y)$, $p, q \in \mathbb{R}[x]$ so goste v $C(X)$ za poljeen $X \subseteq \mathbb{R}^2$

- funkcije oblike $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ so goste v $C([- \pi, \pi])$.

"Fourierovi polinomi" $\leadsto$ Fourierove vrste

$\{\cos x, \sin x\}$ tvorita bazo na $[- \pi, \pi]$ ^{S-W izrek} lin. komb $\cos kx, \sin kx$
 so goste v $C([- \pi, \pi])$

$$\text{binom. druzice} = (\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx$$

$\cos kx$ in $\sin kx$ je lin. komb. $\cos l x, \sin l x$ za $l \leq k$.

$f(x)$ ^{S-W} $\leadsto$ aproksimirano s polinom $\cos x, \sin x$
 $\leadsto \cos^k x, \sin^k x$ nadlogamo z lin. komb $\cos(l x), \sin(l x)$