

Dvojni in trojni integrali

1 Dvojni integrali v kartezičnih koordinatah

1. Izračunaj.

(a) Integral funkcije $f(x, y) = x + y^2$ po pravokotniku z oglišči $(1, -3)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ in $(2, -3)$.

(b) Integral funkcije $f(x, y) = x + 3y^2$ po paralelogramu z oglišči $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ in $(2, 5)$.

(c) Integral funkcije $f(x, y) = \cos x \cos y$ po trikotniku z oglišči $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Rešitev:

(a) 27

(b) 79

(c) $\frac{1}{2}$

2. Izračunaj $\int \int_D (x - y) \, dx \, dy$, kjer je D območje omejeno s krivuljama $y = 2 - x^2$ in $y = 2x - 1$.

Rešitev: $\frac{64}{15}$

3. Izračunaj maso in težišče plošče, ki je omejena s parabolama $y = x^2$ in $x = y^2$, njena gostota je pa $\rho(x, y) = \frac{x^2}{y}$.

Rešitev: $m = \frac{1}{6}$, $T(\frac{9}{16}, \frac{18}{35})$

4. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 2x$ in $y^2 + 4y = 2x$.

Rešitev: $\frac{9}{4}$

5. Izračunaj koordinati težišča homogene plošče, omejene s krivuljama $y^2 = 4x + 4$ in $y^2 = -2x + 4$.

Rešitev: $(\frac{2}{5}, 0)$, $m = 8\rho_0$

6. Zamenjaj vrstni red integracije v integralih.

(a) $\int_0^4 dx \int_{3x}^{12x} f(x, y) \, dy$

(b) $\int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-yx} \, dy \right) dx$ za $0 < a \leq b$

Rešitev:

(a) $\int_0^{12} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\frac{y}{3}} f(x, y) \, dx + \int_{12}^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^4 f(x, y) \, dx$

(b) $\int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-yx} \, dx \right) dy = \ln \frac{b}{a}$

2 Uvedba novih spremenljivk

1. Z uvedbo ustreznih novih koordinat izračunaj integral funkcije $f(x, y) = y - x$ po paralelogramu z oglišči $(1, 2)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ in $(3, 4)$.

Rešitev: -8

2. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^2}$, $y = x$ in $y = 3x$.

Rešitev: $\frac{3}{2} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left(3^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$

2.1 Dvojni integrali v polarnih koordinatah

1. Izračunaj $\iint_D \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy$, kjer je D kolobar med krožnicama $x^2 + y^2 = e^2$ in $x^2 + y^2 = e^4$.

Rešitev: $\pi(3e^4 - e^2)$

2. Izračunaj

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} \, dx \, dy,$$

kjer je D območje v prvem kvadrantu, ki ga omejujejo krožnici $x^2 + y^2 = 1$ ter $x^2 + y^2 = 9$ in premici $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ter $y = \sqrt{3}x$.

Rešitev: $\frac{\pi^2}{6}$

3. Izračunaj ploščino lika omejenega s krivuljami $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ in $y = 0$.

Rešitev: $\frac{3(\pi+2)}{4}$

4. Naj bo $a > 0$ in D območje v ravnini, ki ga omejuje krivulja z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Izračunaj

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy.$$

Rešitev: $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

3 Trojni integrali v kartezičnih koordinatah

1. Izračunaj

$$\iiint_V (1 - x) \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je V območje v prvem oktantu, omejeno z ravnino $x + y + z = 1$.

Rešitev: $\frac{1}{8}$

2. Izračunaj prostornino telesa, ki je določeno z enačbama $0 \leq y \leq 1 - x^2$ in $0 \leq z \leq y$.

Rešitev: $\frac{8}{15}$

4 Trojni integrali v cilindričnih koordinatah

1. Izračunaj volumen telesa omejenega s ploskvama $hz = x^2 + y^2$ in $z = h$, kjer je $h > 0$.

Rešitev: $\frac{\pi h^3}{2}$

2. Izračunaj volumen telesa, ki je določeno z enačbami $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 \leq z^2$ in $z \geq 0$, kjer je $R > 0$.

Rešitev: $\frac{\pi R^3(2-\sqrt{2})}{3}$

5 Integrali v sferičnih koordinatah

1. Izračunaj maso in koordinate težišča osmine krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Gostota je podana z $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Rešitev: $m = \frac{32\pi}{15}$, $x_T = y_T = \frac{15}{16}$, $z_T = \frac{5}{8}$

2. Izračunaj volumen preseka krogel, ki sta podani z neenačbama

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z.$$

Rešitev: $\frac{5\pi}{12}$