

MARKO KANDIĆ

**NALOGE IZ TEORIJE
MERE**

Z ODGOVORI IN NASVETI

LJUBLJANA 2015

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.518.1(075.8)(076.1)

KANDIĆ, Marko

Naloge iz teorije mere [Elektronski vir]: z odgovori in nasveti / Marko Kandić.
– 1. izd. – El. knjiga. – Ljubljana: samozal. M. Kandić, 2015

Način dostopa (URL): <http://www.fmf.uni-lj.si/~kandic/predmeti/zbirke/TeorijaMere.pdf>

ISBN 978-961-283-238-4 (pdf)

277939456

Predgovor

Zbirka je namenjena študentom predmeta Teorija mere bolonjskega magistrskega programa Matematika. Zbirka vsebuje veliko nalog, ki so mi služile za pripravo na vaje, ki sem jih imel pri tem predmetu, hkrati pa vsebuje tudi naloge, ki sem jih pripravil za pisna preverjanja znanja. Precej nalog je originalnih, dosti pa jih je povzetih v takšni ali drugačni obliki iz raznih zbirk nalog ali učbenikov, katere lahko bralec najde med literaturo.

Naloge so vsebinsko razdeljene med poglavja, poglavja pa na razdelke. Praviloma znotraj vsakega razdelka naloge vsebinsko sledijo študijskemu programu in so načeloma razvrščene po težavnosti. Naloge so opremljene z odgovori, precej nalog pa vsebuje tudi nasvete oziroma namige, ki študenta vodijo k rešitvi. Vsekakor se je možno marsikatero naloge tudi drugače lotiti, zato se kaka naloga ponovi tudi v kakem drugem razdelku. Bralcu svetujem, naj jo poskusi rešiti z orodji in teorijo tekočega razdelka. V zbirki se bo zagotovo našla kakšna napaka. Najverjetneje se jih najde več kot ena, za kar se bralcu opravičujem.

Marko Kandić
Marko.Kandic@fmf.uni-lj.si

Ljubljana, februar 2015

Oznake

$\mathcal{P}(X)$	potenčna množica množice X
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	σ -algebre
$\sigma(\mathcal{F})$	σ -algebra, generirana z $\mathcal{F}$
$\mathcal{B}_X$	Borelova σ -algebra topološkega prostora X
$E, F, \dots$	elementi σ -algebre
μ, λ, ν	mere (pozitivne, realne, kompleksne)
m	Lebesgueova mera
δ_x	Diracova mera, skoncentrirana v točki x
μ_f	Lebesgue-Stieltjesova mera, porojena s funkcijo f
ζ	zunanja mera
$\int_X f d\mu$	Lebesgueov integral funkcije f
$(\bar{X}, \mathcal{A})$	merljiv prostor
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	produktna σ -algebra σ -algeber $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.
$\mu \times \nu$	produktna mera mer μ in ν
$ \lambda $	totalna variacija kompleksne mere λ
$\ \lambda\ $	norma kompleksne mere
λ^+, λ^-	pozitivni in negativni del realne mere
$\lambda \ll \mu$	absolutna zveznost mere λ glede na mero μ
$\lambda \perp \mu$	vzajemna singularnost mer λ in μ
λ_a, λ_s	Lebesgueov razcep kompleksne mere λ glede na σ -končno mero
$\frac{d\lambda}{d\mu}$	Radon-Nikodymov odvod mere λ po meri μ
$L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$)	prostor vseh funkcij, katerih p -te potence so integrabilne
$L^\infty(\mu)$	prostor bistveno omejenih funkcij

Kazalo

Predgovor	3
Oznake	4
NALOGE	7
1 Merljive množice	8
σ -algebre	8
Pozitivne mere	10
Zunanje mere	13
Polalgebre in razširitve mer	13
Lebesgue-Stieltjesove mere	14
2 Integral	16
Merljive preslikave	16
Načini konvergence	19
Integral nenegativne merljive funkcije	21
Integral kompleksne merljive funkcije	23
Integriranje funkcijskih vrst	27
Produktna mera	29
3 Kompleksne mere	33
Primeri in totalna variacija	33
Realne mere	34
Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek	35
L^p -prostori	37
ODGOVORI	41
1 Merljive množice	42
2 Integral	43
3 Kompleksne mere	46
NASVETI	49
1 Merljive množice	50

2 Integral	52
3 Kompleksne mere	55
Literatura	57

NALOGE

1. Merljive množice	8
2. Integral	16
3. Kompleksne mere	33

1. Merljive množice

σ -algebre

1-1. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neprazni podmnožici potenčne množice množice X . Dokaži, da velja $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$.

1-2. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neprazna podmnožica potenčne množice množice X . Dokaži, da velja

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\{A^c : A \in \mathcal{F}\}).$$

1-3. Naj bo X neprazna množica, $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ pa neprazni podmnožici potenčne množice množice X .

(a) Dokaži, da velja $\sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \sigma(\sigma(\mathcal{F}) \cup \sigma(\mathcal{G}))$.

(b) Ali velja $\sigma(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{G})$?

1-4. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Za množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mathcal{A}_E = \{F \subseteq E : F = E \cap G \text{ za nek } G \in \mathcal{A}\}.$$

Dokaži, da je $\mathcal{A}_E$ σ -algebra na E .

1-5. Naj bo $\mathcal{A}$ σ -algebra podmnožic množice X in E podmnožica v X . Pokaži, da je σ -algebra, generirana z $\mathcal{A} \cup \{E\}$, enaka

$$\{(A \cap E) \cup (B \setminus E); A, B \in \mathcal{A}\}$$

1-6. Naj bo X poljubna neštevna množica in

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : \text{ena od množic } E \text{ in } E^c \text{ je števna}\}.$$

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ σ -algebra na X .

(b) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ generirana z družino vseh singletonov iz X .

1-7. Za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{1\}, \dots, \{n\}\}).$$

(a) Naj bo $B_n = \{n+1, n+2, \dots\}$. Dokaži, da je množica

$$\mathcal{B}_n = \{E \subseteq \mathbb{N} : E \subseteq B_n^c \text{ ali } E^c \subseteq B_n^c\}$$

enaka $\mathcal{A}_n$.

(b) Dokaži, da je $\mathcal{A}_n$ prava podmnožica v $\mathcal{A}_m$ za $n < m$.

(c) Dokaži, da $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ni σ -algebra.

1-8. Naj bo X neštevna množica. Množico X opremimo s topologijo τ končnih komplementov. Določi Borelovo σ -algebro, generirano s topologijo τ .

1-9. Določi vse metrične prostore, katerih topologija je σ -algebra.

1-10. Naj bodo $X_1, \dots, X_n$ topološki prostori. Kartezični produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ opremimo s produktno topologijo. Dokaži, da velja

$$\mathcal{B}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{X_n} \subseteq \mathcal{B}_{X_1 \times \dots \times X_n}.$$

1-11. Če je $\mathcal{A}$ neskončna σ -algebra, dokaži, da za vsako podmnožico $E \in \mathcal{A}$, vsaj ena od množic E in E^c vsebuje neskončno mnogo množic iz $\mathcal{A}$.

1-12. Naj bo $\mathcal{A}$ algebra podmnožic množice X . Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne.

- (a) $\mathcal{A}$ je σ -algebra.
- (b) $\mathcal{A}$ je zaprta za števne disjunktne unije.
- (c) $\mathcal{A}$ je zaprta za števne unije naraščajočega zaporedja množic.

1-13. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{F}$ podmnožica potenčne množice množice X . Naj bo $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ in

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \cup \{A^c : A \in \mathcal{F}_0\}.$$

Množico $\mathcal{F}_2$ definiramo kot družino vseh končnih presekov množic iz $\mathcal{F}_1$, množico $\mathcal{F}_3$ pa definiramo kot družino vseh končnih unij množic iz $\mathcal{F}_2$. Dokaži, da je $\mathcal{F}_3$ enaka algebri, generirani z $\mathcal{F}$.

1-14. Naj bo $\mathcal{A}$ σ -algebra na neprazni množici X , generirana z neprazno družino podmnožic $\mathcal{F}$ množice X . Naj bo $\mathcal{B}$ unija vseh σ -algeber, generiranih s števno mnogo podmnožicami iz $\mathcal{F}$. Dokaži, da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

1-15. Naj bo $\mathcal{A}$ končna netrivialna algebra na množici X .

- (a) Dokaži, da obstajajo paroma disjunktne neprazne množice $E_1, \dots, E_n$ v $\mathcal{A}$, da je vsak $E \in \mathcal{A}$ unija nekaterih od teh množic in vsak $A \in \mathcal{A}$, ki je vsebovan v množici E_j za nek $1 \leq j \leq n$ je bodisi enak E_j bodisi je prazen.
- (b) Določi kardinalnost končne σ -algebre.

1-16. Naj bo $\mathcal{A}$ neskončna σ -algebra.

- (a) Dokaži, da v $\mathcal{A}$ obstaja neskončno padajoče zaporedje paroma različnih množic.
- (b) Dokaži, da je kardinalnost neskončne σ -algebre vsaj kontinuum.

1-17. Dokaži naslednji trditvi.

- (a) Naj bo X neprazna dobro urejena množica in $A \subseteq X$ neprazna podmnožica. Naj za vsak $x \in X$ velja:

$$I_x := \{y \in X : y < x\} \subseteq A \implies x \in A.$$

Tedaj je $X = A$.

- (b) Obstaja taka neštevna dobro urejena množica X z lastnostjo, da je za vsak $x \in X$ množica I_x števna. Množica X se imenuje množica števnih ordinalov, njeni elementi pa so števniki ordinali.

1-18. Naj bo Ω množica števnih ordinalov in X neprazna množica. Naj bo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ neprazna podmnožica, ki vsebuje prazno množico. Za $\alpha \in \Omega$ definirajmo naslednje:

- (a) če ima α predhodnika β , definiramo $\mathcal{E}_\alpha$ kot množico, ki ima za elemente natanko števne unije množic iz $\mathcal{E}_\beta$ in komplemente le-teh,
 (b) če α nima predhodnika, definiramo

$$\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{E}_\beta.$$

Dokaži, da velja

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{E}_\alpha.$$

1-19. Določi kardinalnost Borelove σ -algebre na realni osi.

Pozitivne mere

1-20. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A}$ potenčna σ -algebra na X . Naj bo $a \in X$ poljuben element. Dokaži, da je s predpisom

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 0 & : a \notin E \\ 1 & : a \in E \end{cases}$$

definirana pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

1-21. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A}$ potenčna σ -algebra na X . Dokaži, da je s predpisom

$$\mu(E) = \begin{cases} \infty & : E \text{ je neskončna} \\ |E| & : \text{sicer} \end{cases}$$

definirana pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

1-22. Naj bo X neštevna množica in

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : \text{ena od množic } E \text{ in } E^c \text{ je števna}\}.$$

Dokaži, da je s predpisom

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & : E \text{ je števna množica} \\ 1 & : \text{sicer} \end{cases}$$

definirana pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

1-23. Dokaži, da je števna unija množic z mero nič množica z mero 0.

1-24. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Dokaži, da za merljivi podmnožici $A, B \in \mathcal{A}$ velja

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

1-25. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero. Če je mera merljive množice $A \in \mathcal{A}$ enaka $\mu(X)$, dokaži, da za poljubno množico $B \in \mathcal{A}$ velja $\mu(B) = \mu(A \cap B)$.

1-26. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s tako pozitivno mero μ , da velja $\mu(X) = 2$. Naj bosta A in B neprazni množici iz $\mathcal{A}$. Dokaži ali ovrži naslednji trditvi.

(a) Če je $\mu(A), \mu(B) > 1$, potem je $A \cap B \neq \emptyset$.

(b) Če je $\mu(A) = \mu(B) = 1$, potem je $A \cap B \neq \emptyset$.

1-27. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tako zaporedje množic v $\mathcal{A}$, da za $m \neq n$ velja $\mu(E_n \cap E_m) = 0$. Dokaži, da velja

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

1-28. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bodo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ take merljive množice, da velja $\mu(E_n \cap E_m) = 1$ za poljubna $n, m \in \mathbb{N}$.

Izračunaj $\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right)$.

1-29. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje množic v $\mathcal{A}$.

(a) Dokaži, da velja

$$\mu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(b) Dokaži, da je množica $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n$ enaka množici vseh $x \in X$, ki so vsebovani v vseh razen v končno mnogo množicah E_n .

(c) Če je $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, dokaži, da je skoraj vsak $x \in X$ vsebovan v končno mnogo množicah E_n .

1-30. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\}$. Definirajmo

$$\overline{\mathcal{A}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A} \text{ in } F \subseteq N \text{ za nek } N \in \mathcal{N}\}.$$

(a) Dokaži, da je $\overline{\mathcal{A}}$ σ -algebra na X , ki vsebuje $\mathcal{A}$.

(b) Dokaži, da obstaja natanko ena razširitev mere μ do polne mere $\overline{\mu}$ na $\overline{\mathcal{A}}$.

1-31. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ . Za poljubno množico $E \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : \mu(F) < \infty, F \subseteq E \text{ in } F \in \mathcal{A}\}.$$

Dokaži, da je μ_0 pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

1-32. Naj bosta μ_1 in μ_2 končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

(a) Dokaži, da predpis

$$\lambda(A) = \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\}$$

definira končno pozitivno mero na $(X, \mathcal{A})$.

(b) Če za končno pozitivno mero ν na $(X, \mathcal{A})$ velja $\nu \geq \mu_1, \mu_2$, dokaži, da velja $\nu \geq \lambda$.

1-33. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor z neskončno mero.

(a) Dokaži, da je vsaka σ -končna mera semi-končna.

(b) Če je μ semi-končna mera, dokaži, da za vsak $c > 0$ obstaja tak $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > c$.

(c) Če je μ σ -končna, dokaži, da za vsak $c > 0$ obstaja tak $E \in \mathcal{A}$, da je $\mu(E) > c$.

(Mera je semi-končna, če vsaka množica z neskončno mero vsebuje množico s končno pozitivno mero.)

1-34. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni prostor in naj bo $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tako zaporedje merljivih množic, da je 1 stekališče zaporedja $\{\mu(E_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dokaži, da za vsak $0 < \epsilon < 1$ obstaja tako podzaporedje $\{E_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, da velja

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > \epsilon.$$

1-35. Naj bo X kompakten Hausdorffov topološki prostor in μ taka verjetnostna mera na $(X, \mathcal{B}_X)$, da je

$$\mu(K) = \inf\{\mu(V) : K \subseteq V \text{ odprta v } X\}.$$

Dokaži, da obstaja najmanjša kompaktna množica z mero 1.

1-36. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero μ . Na σ -algebri $\mathcal{A}$ definiramo relacijo

$$E \sim F \iff \mu(E \triangle F) = 0.$$

(a) Dokaži, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna relacija.

(b) Dokaži, da preslikava $\rho(E, F) := \mu(E \triangle F)$ inducira metriko ρ' na $\mathcal{A}/\sim$.

(c) Dokaži, da iz $\rho'([A_n], [A]) \rightarrow 0$ sledi $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Zunanje mere

1-37. Naj bo ζ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $A \subseteq X$ poljubna množica. Naj za množico $B \subseteq X$ velja $\zeta(B) = 0$. Dokaži, da je B ζ -merljiva in izračunaj $\zeta(A \cup B)$.

1-38. Naj bo ζ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in $E \subseteq X$ poljubna ζ -merljiva množica v X . Dokaži, da za poljubno podmnožico $A \subseteq X$ velja

$$\zeta(A \cup E) + \zeta(A \cap E) = \zeta(A) + \zeta(E).$$

1-39. Naj bo ζ zunanja mera na potenčni množici neprazne množice X in naj bo A poljubna podmnožica v X . Naj za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka ζ -merljiva podmnožica E v A , da je $\zeta(A \setminus E) < \epsilon$. Dokaži, da je A ζ -merljiva.

Polalgebre in razširitve mer

1-40. Naj bo $\mathcal{S}$ družina podmnožic množice X z naslednjimi lastnostmi:

(a) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(b) Če je $A, B \in \mathcal{S}$, potem $A \cap B \in \mathcal{S}$.

(c) Če je $A \in \mathcal{S}$, potem je A^c končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$.

Dokaži, da je

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n E_i : n \in \mathbb{N}, E_i \in \mathcal{S} \text{ paroma disjunktne} \right\}$$

algebra na X . (Družino $\mathcal{S}$ z zgornjimi lastnostmi imenujemo polalgebra na X , algebro $\mathcal{A}$ pa algebro, generirano s polalgebro $\mathcal{S}$.)

1-41. Naj bo $\mathcal{S}$ polalgebra na X in $\mathcal{A}$ algebra na X , generirana s $\mathcal{S}$. Naj bo μ polmera na $\mathcal{S}$. Za $A \in \mathcal{A}$ definiramo

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j),$$

kjer je $A = \bigcup_{j=1}^n A_n$ neka končna disjunktna unija množic iz $\mathcal{S}$. Dokaži, da je $\tilde{\mu}$ dobro definirana mera na algebri $\mathcal{A}$, ki razširja polmero μ .

1-42. Naj bo X neprazna množica, $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ naraščajoče zaporedje podmnožic v $\mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Naslednje trditve bodisi dokaži bodisi ovrži s protiprimerom.

(a) Če so vse $\mathcal{A}_n$ polalgebre na X , potem je $\mathcal{A}$ polalgebra na X .

(b) Če so vse $\mathcal{A}_n$ algebre na X , potem je $\mathcal{A}$ algebra na X .

(c) Če so vse $\mathcal{A}_n$ σ -algebre na X , potem je $\mathcal{A}$ σ -algebra na X .

(d) Naj bo za vsak $m \in \mathbb{N}$ μ_m taka mera na algebri $\mathcal{A}_m$, da za $n > m$ velja

$\mu_n|_{\mathcal{A}_m} = \mu_m$. Definirajmo preslikavo μ na $\mathcal{A}$ s predpisom $\mu(A) = \mu_n(A)$, če je $A \in \mathcal{A}_n$. Teda je μ mera na algebri $\mathcal{A}$.

1-43. Na realni osi definiramo

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\emptyset, [a, b), (-\infty, b), [a, \infty) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Dokaži, da je $\mathcal{S}$ polalgebra na $\mathbb{R}$.

Lebesgue-Stieltjesove mere

1-44. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča z leve zvezna funkcija. Na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definiramo preslikavo μ_f s predpisom

$$\begin{aligned} \mu_f(\emptyset) &= 0 \\ \mu_f([a, b)) &= f(b) - f(a) & (a < b, a, b \in \mathbb{R}) \\ \mu_f((-\infty, b)) &= f(b) - f(-\infty) & (b \in \mathbb{R}) \\ \mu_f([a, \infty)) &= f(\infty) - f(a) & (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}.$$

Dokaži, da je μ_f polmera na polalgebri $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1-45. Naj bo E podmnožica v $[0, 1]$ z Lebesgueovo mero 1. Dokaži, da je E gosta v $[0, 1]$.

1-46. Določi notranjost podmnožic realne osi z ničelno Lebesgueovo mero.

1-47. Racionalna števila razvrstimo v zaporedje $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in definiramo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [r_n - 1/n^2, r_n + 1/n^2].$$

Ali je $A = \mathbb{R}$?

1-48. Za poljuben $\epsilon > 0$ poišči tako neprazno gsto podmnožico $E \subseteq \mathbb{R}$, za katero velja $m(E) \leq \epsilon$.

1-49. Realno os opremimo z Lebesgueovo mero m . Naj bo K neprazna kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Dokaži naslednji trditvi:

(a) $m(K) < \infty$.

(b) Če je $0 < \lambda < m(K)$, potem obstaja taka kompaktna podmnožica L v K , da je $m(L) = \lambda$.

1-50. Naj bo f strogo monotona zvezna funkcija na realni osi in μ_f pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Naj bo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

(a) Če je g skoraj povsod enaka zvezni funkciji h glede na mero μ_f , dokaži, da je g enaka h povsod.

(b) Ali lahko strogo monotonost funkcije f izpustimo?

1-51. Naj bo f dvakrat odvedljiva naraščajoča konveksna funkcija na realni osi.

- (a) Utemelji, da obstajata Lebesgue-Stieltjesovi meri μ_f in $\mu_{f'}$.
- (b) Naj velja $\mu_f = \mu_{f'}$. Določi mero μ_f in izračunaj $\mu_f([0, 1])$.

1-52. Naj bo f monotona z leve zvezna funkcija na realni osi in μ_f njena pripadajoča Lebesgue-Stieltjesova mera. Izračunaj Lebesgue-Stieltjesove mere naslednjih množic.

- (a) $[a, b]$
- (b) $\{a\}$
- (c) $(a, b]$
- (d) (a, b)

Dokaži, da je $\mu_f(\{a\}) = 0$ natanko takrat, ko je funkcija f zvezna v točki a .

1-53. Naj bosta A in B zaprti podmnožici realne osi. Dokaži, da je množica

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

F_σ -množica.

1-54. Na realno os vpeljemo relacijo $\sim$ na naslednji način:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

- (a) Preveri, da je relacija $\sim$ ekvivalenčna relacija na realni osi.

Naj bo $E \subset (0, 1)$ množica, ki vsebuje natanko en element iz vsakega ekvivalenčnega razreda relacije $\sim$.

- (b) Če sta $r, s \in \mathbb{Q}$ in $r \neq s$, dokaži $(r + E) \cap (s + E) = \emptyset$.
- (c) Če je $x \in (0, 1)$, dokaži, da obstaja $r \in \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$, da je $x \in r + E$.
- (d) Dokaži, da množica $S = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap E} (r + E)$ ni Lebesgueovo merljiva.

1-55. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzova funkcija.

- (a) Dokaži, da f preslika množice z ničelno Lebesgueovo mero v množice z ničelno Lebesgueovo mero.
- (b) Dokaži, da f preslika množice tipa F_σ v množice tipa F_σ .
- (c) Dokaži, da f preslika Lebesgueovo merljive množice v Lebesgueovo merljive množice.

2. Integral

Merljive preslikave

2-1. Dokaži, da lahko vsako kompleksno merljivo funkcijo zapišemo kot linearno kombinacijo štirih nenegativnih merljivih funkcij.

2-2. Dokaži, da je funkcija

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & : z \neq 0 \\ 0 & : z = 0 \end{cases}$$

Borelovo merljiva funkcija.

2-3. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in naj bodo množice $E_1, \dots, E_n$ v X paroma disjunktne z unijo X . Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paroma različna kompleksna števila. Dokaži, da je funkcija $\sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{E_j}$ merljiva natanko takrat, ko so množice $E_1, \dots, E_n$ merljive.

2-4. Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora in naj bo $f : X \rightarrow Y$ merljiva preslikava. Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

(a) Dokaži, da je s predpisom

$$\lambda(E) = \mu(f^{-1}(E)) \quad (E \in \mathcal{B})$$

definirana pozitivna mera na $(Y, \mathcal{B})$.

(b) Če je λ σ -končna, dokaži, da je tudi μ σ -končna.

2-5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor. Naj bo $E \in \mathcal{A}$ poljubna množica in $\mathcal{A}_E$ σ -algebra

$$\mathcal{A}_E = \{F \subseteq E : F = E \cap G \text{ za nek } G \in \mathcal{A}\}.$$

(a) Dokaži, da je funkcija f merljiva glede na σ -algebro $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko sta funkciji $f|_E$ in $f|_{E^c}$ zaporedoma merljivi glede na σ -algebri $\mathcal{A}_E$ in $\mathcal{A}_{E^c}$.

(b) Dokaži, da je $\mu_0 : \mathcal{A}_E \rightarrow [0, \infty]$, definirana s predpisom $\mu_0(A) = \mu(E \cap A)$, pozitivna mera.

2-6. Naj bo U odprt enotski krog v ravnini $\mathbb{R}^2$ in $\mathcal{A}$ družina vseh tistih Borelovih podmnožic $A \subseteq \mathbb{R}^2$, za katere velja $U \subseteq A$ ali $U \subseteq A^c$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ σ -algebra.

(b) Poišči vsaj eno $\mathcal{A}$ -merljivo funkcijo f iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{C}$, za katero velja

$$f((0, 0)) = 3 \quad \text{in} \quad f((1, 1)) = -1.$$

2-7. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ taka funkcija, da je

$$\{x \in X : f(x) \geq r\} \in \mathcal{A}$$

za vse $r \in \mathbb{Q}$. Dokaži, da je funkcija f merljiva.

2-8. Naj bo μ pozitivna mera na X in naj za realni merljivi funkciji f in g na X velja

$$\mu(\{x \in X : f(x) > c \geq g(x)\}) = 0$$

za vsak $c \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je

$$\mu(\{x \in X : f(x) > g(x)\}) = 0.$$

2-9. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor in f funkcija na X . Dokaži, da je funkcija f merljiva natanko takrat, ko je funkcija $f \cdot \chi_E$ merljiva za vsako množico E v X s končno mero.

2-10. Naj bosta dani funkciji $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki zadoščata zvezi $e^{f(x)} = g(x)$ za vsak $x \in [0, 1]$. Dokaži, da je f Borelovo merljiva natanko takrat, ko je g Borelovo merljiva.

2-11. Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora in $f : X \rightarrow Y$ preslikava. Če je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ za neko družino $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, dokaži, da je f merljiva natanko takrat, ko je $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ za vsako množico $F \in \mathcal{F}$.

2-12. Dokaži, da za odprto injektivno preslikavo $f : X \rightarrow Y$ med topološkima prostoroma X in Y velja $f(\mathcal{B}_X) \subseteq \mathcal{B}_Y$.

2-13. Naj bo X neprazna množica in $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ trivialna σ -algebra na X . Poišči vse merljive preslikave $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

2-14. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

(a) Naj ima f največ števno zalogo vrednosti. Pokaži, da je f merljiva natanko takrat, ko je za vsak $c \in \mathbb{R}$ množica $\{x \in X : f(x) = c\}$ merljiva v X .

(b) Poišči primer σ -algebre na X in nemerljive funkcije na X z neštevno zalogo vrednosti.

2-15. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ poln merljiv prostor in g merljiva realna funkcija.

(a) Če je funkcija g enaka funkciji f skoraj povsod na X , dokaži, da je tudi f merljiva funkcija.

(b) Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki po točkah skoraj povsod konvergira proti funkciji f . Dokaži, da je f merljiva funkcija.

(c) Ali zgornji trditvi veljata tudi v primeru, ko mera prostora $(X, \mathcal{A})$ ni polna?

2-16. Naj bo X neprazna množica in $\{(Y_i, \mathcal{B}_i)\}_{i \in I}$ družina merljivih prostorov. Za vsak $i \in I$ naj bo $f_i : X \rightarrow Y_i$ preslikava.

(a) Dokaži, da obstaja najmanjša σ -algebra $\mathcal{A}$ na X , da so vse preslikave $f_i : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{B}_i)$ merljive.

(b) Če je $\mathcal{B}_i = \sigma(\mathcal{F}_i)$, določi generatorje σ -algebre $\mathcal{A}$.

(c) Naj bo $Y = \mathbb{R}$ in $\mathcal{B}$ σ -algebra vseh podmnožic v $\mathbb{R}$, ki so bodisi števne

bodisi je njihov komplement števen. Določi najmanjšo σ -algebro $\mathcal{A}$ na $\mathbb{R}$, da je funkcija $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, podana s predpisom $f(x) = x^2$, merljiva.

2-17. Naj bo f odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$. Dokaži, da je funkcija f' Lebesgueovo merljiva.

2-18. Naj bodo $(X_j, \mathcal{A}_j)$ ($1 \leq j \leq n$) merljivi prostori in $f_j : X_j \rightarrow \mathbb{R}$ merljive preslikave. Dokaži, da je preslikava $F : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$F(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

merljiva glede na produktno σ -algebro $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

2-19. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih podmnožic množice X . Definirajmo zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisom $f_n = \chi_{E_n}$. Naj zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ skoraj povsod konvergira proti funkciji f .

(a) Določi funkcijo f .

(b) Ali je funkcija f merljiva, če je mera prostora X polna?

2-20. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij.

(a) Dokaži, da je množica vseh $x \in X$, za katere zaporedje $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira, merljiva množica.

(b) Dokaži, da je množica vseh $x \in X$, za katere je zaporedje $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče ali naraščajoče, merljiva množica.

(c) Dokaži, da je množica

$$\{x \in X : \forall k \in \mathbb{N} \exists m, n \geq k \text{ da velja } |f_n(x) - f_m(x)| > 1\}$$

merljiva.

2-21. Dokaži, da je vsaka monotona funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelovo merljiva.

2-22. Naj bo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naraščajoča funkcija. Definirajmo

$$G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Dokaži, da je G Borelovo merljiva.

2-23. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ njegova napolnitev. Dokaži, da za $\overline{\mathcal{A}}$ -merljivo funkcijo f , obstaja taka $\mathcal{A}$ -merljiva funkcija g , da je $f = g$ skoraj povsod glede na mero $\overline{\mu}$.

2-24. Naj bo X neštevna množica in

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ je števna ali } E^c \text{ je števen}\}.$$

Dokaži, da je funkcija f na X merljiva natanko takrat, ko je konstantna na komplementu števne množice.

2-25. Naj bo X neštevna množica in τ topologija na X , ki vsebuje natanko tiste množice, katerih komplementi so končni in prazna množica. Določi vse Borelovo merljive funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Načini konvergence

2-26. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ . Zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je podano s predpisom

$$f_n = \chi_{\{n, n+1, \dots\}}.$$

- (a) Ali zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0 po točkah?
- (b) Ali zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0 po meri?
- (c) Ali zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0 skoraj enakomerno?

2-27. Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij na merljivem prostoru X s končno mero.

- (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ po točkah konvergira proti f_0 natanko takrat, ko zaporedje $\{f_n - f_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ po točkah konvergira proti 0.
- (b) Naj $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0. Definirajmo

$$A_{k,m} = \{x \in X : |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \text{ za vse } n \geq k\}.$$

Dokaži, da je $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{k,m} = X$ za vsak $m \in \mathbb{N}$ in $A_{k,m} \subseteq A_{k+1,m}$.

(c) Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak k_m , da je $\mu(A_{k_m, m}) \geq \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^m}$.

(d) Naj bo $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_{k_m, m}$. Dokaži, da je $\mu(A^c) \leq \epsilon$ in da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti 0 na A .

(e) Če zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti merljivi funkciji f , dokaži, da konvergira proti njej tudi skoraj enakomerno.

Ali trditev iz (e) velja tudi v primeru, ko mera prostora X ni končna?

2-28. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti merljivi funkciji f skoraj enakomerno.

- (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti f .
- (b) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti f .

2-29. Naj bo X merljiv prostor s končno pozitivno mero μ in naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij, ki skoraj povsod konvergira proti merljivi funkciji f . Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti f .

2-30. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ .

- (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira skoraj povsod proti funkciji f natanko takrat, ko konvergira povsod.
- (b) Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti funkciji f natanko takrat, ko konvergira enakomerno.

(c) S protiprimerom pokaži, da konvergenca po točkah ne implicira enakomerne konvergence oziroma konvergence po meri.

2-31. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo dano zaporedje merljivih množic $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ s končno mero. Za vsak $m \in \mathbb{N}$ definirajmo nenegativno funkcijo $f_m : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ s predpisom

$$f_m(n) = \frac{1}{m} \mu(A_n).$$

- (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti 0.
- (b) Če je $\mu(X) < \infty$, dokaži, da zaporedje $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno.
- (c) Ali zaporedje $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergira proti 0 enakomerno tudi v primeru, ko je $\mu(X) = \infty$?

2-32. Naj bo podano zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ realnih števil. Za vsako naravno število n definirajmo funkcijo $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_n(x) = a_n \chi_{[-n, n]}(x).$$

- (a) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkah proti ničelni funkciji.
- (b) Poišči potreben in zadosten pogoj, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po Lebesgueovi meri proti ničelni funkciji.

2-33. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj zaporedji $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih funkcij zaporedoma konvergirata po meri k ničelni funkciji.

- (a) Dokaži, da zaporedje $\{f_n + g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti ničelni funkciji.
- (b) Dokaži, da $\{f_n g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti ničelni funkciji.

2-34. Naj zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih funkcij na σ -končnem merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ konvergira skoraj povsod proti merljivi funkciji f . Pokaži, da obstajajo take merljive množice $A_1, A_2, \dots$, katerih komplement unije ima ničelno mero, zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pa konvergira enakomerno proti f na vsaki množici A_k .

2-35. Naj bo X kompakten topološki prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje zveznih funkcij, ki narašča proti zvezni funkciji f . Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti funkciji f .

Integral nenegativne merljive funkcije

2-36. Neprazno množico X opremimo s potenčno σ -algebro. Naj bo $x_0 \in X$ poljuben in naj bo δ_{x_0} Diracova mera na $\mathcal{P}(X)$. Za nenegativno funkcijo f na X po definiciji izračunaj $\int_X f d\delta_{x_0}$.

2-37. Naj bo f nenegativna funkcija na merljivem prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, opremljenim z mero štetja točk μ . Po definiciji izračunaj $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

2-38. Naj bosta μ_1 in μ_2 taki pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, da velja $\mu_1(E) \leq \mu_2(E)$ za vse $E \in \mathcal{A}$. Dokaži, da za nenegativno merljivo funkcijo f na X velja

$$\int_X f d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_2.$$

2-39. Izračunaj limite:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{n^2 \cos^2 \frac{x}{n}}{n^2 x^2 + 2nx + n^2 + 1} dx & \quad \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^n (n^2 x - 1) e^{-n^2 x^2} dx \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{\arctg(n/x)}{1 + x^2} e^{-\frac{x^2}{n}} dx & \quad \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{n^2 x + n - 1}{2n^2 x^3 + 2nx^2 + 1} e^{-\frac{x^{2012}}{n}} dx \end{aligned}$$

2-40. Za $0 < a < b < 1$ izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-\frac{x}{n}} \sqrt{\frac{n-1}{1+n-nx^2}} dx.$$

2-41. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in f nenegativna merljiva funkcija. Naj bo $E = \{x \in X : f(x) < 1\}$. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E e^{-f^n} d\mu.$$

2-42. Naj bo f nenegativna merljiva funkcija na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s pozitivno mero. Definirajmo zaporedji funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisoma

$$f_n(x) = \max\{f(x), n\} \quad \text{in} \quad g_n(x) = \min\{f(x), n\}$$

za vse $x \in X$ in $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj

$$L_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \quad \text{in} \quad L_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Ali je lahko $L_2 = \infty$?

2-43. Naj bo $f : X \rightarrow [0, \infty]$ merljiva funkcija na σ -končnem merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Če velja $\int_A f d\mu = 0$ za vsako množico A s končno mero, dokaži, da je $f = 0$ skoraj povsod na X .

2-44. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ taka nenegativna merljiva funkcija, da velja $\int_X f d\mu < \infty$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka merljiva množica $E \in \mathcal{A}$ s končno mero, da velja

$$\int_E f d\mu > \int_X f d\mu - \epsilon.$$

2-45. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje merljivih funkcij na X .

(a) Če je $\int_X f_1 d\mu \in \mathbb{R}$, dokaži

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

(b) Ali trditev velja iz (a), če je $\int_X f_n d\mu = \infty$ za vse $n \in \mathbb{N}$?

2-46. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\frac{n}{n+x} \right)^n dx.$$

2-47. Funkciji $F, G : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sta podani s predpisoma

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2^n} \frac{dx}{(1+x^t)^n} \quad \text{in} \quad G(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{(1+x^t)^n}.$$

Definirajmo $0^0 := 1$.

(a) Izračunaj $F(t)$ in $G(t)$ za vsak $t \in [0, \infty)$.

(b) Ali je funkcija F Borelovo merljiva na $[0, \infty)$? Ali je funkcija F zvezna na $[0, \infty)$?

(c) Ali obstaja taka funkcija $g \in L^1([0, \infty), m)$, da za vse $x, t \geq 0$ in vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{(1+x^t)^n} \leq g(x)?$$

2-48. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij, ki skoraj povsod konvergira proti merljivi funkciji f . Če velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 0,$$

dokaži, da je $f = 0$ skoraj povsod.

2-49. Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje realnih merljivih funkcij na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

(a) Če obstaja taka nenegativna funkcija g , da je $\int_X g d\mu < \infty$ in da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n| \leq g$, dokaži

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

(b) Ali neenakosti iz (a) drži, če izpustimo predpostavko o obstoju funkcije g ?

Integral kompleksne merljive funkcije

2-50. Ali je funkcija f , podana s predpisom $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, v $L^1([1, \infty), m)$?

2-51. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ . Za $f \in L^1(\mu)$ izračunaj integral $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.

2-52. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje funkcij v $L^1(\mu)$, ki v $\|\cdot\|_1$ -normi konvergira proti funkciji f . Če je zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ omejeno, dokaži, da obstaja taka množica N z mero 0, da velja $\|f|_N\|_\infty < \infty$.

2-53. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje skoraj povsod nenegativnih merljivih funkcij v $L^1(\mu)$, ki v $\|\cdot\|_1$ -normi konvergira proti funkciji f . Dokaži, da je f skoraj povsod nenegativna funkcija.

2-54. Naj bo dano zaporedje merljivih množic $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s končno mero v merljivem prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Naj zaporedje funkcij $\{\chi_{E_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira v $\|\cdot\|_1$ -normi proti merljivi funkciji f . Določi merljivo funkcijo f .

2-55. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor. Naj zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ na X konvergira po točkah proti funkciji f , zaporedje integralov

$$\int_X |f_n| d\mu$$

pa naj konvergira proti 0. Dokaži, da je f enaka 0 skoraj povsod.

2-56. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in naj bo $f : X \rightarrow [0, \infty)$ merljiva funkcija. Definirajmo množico

$$A_f = \{g \in L^1(\mu) : |g(x)| \leq f(x) \text{ s.p.}[\mu]\}.$$

(a) Dokaži, da je A_f zaprta podmnožica v $L^1(\mu)$.

(b) Če je A_f omejena, potem dokaži, da je $f \in L^1(\mu)$.

2-57. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor. Naj bo $f \in L^1(\mu)$ taka kompleksna funkcija, da za vsako merljivo množico E s končno mero velja $\int_E f d\mu = 0$. Dokaži, da je $f = 0$ skoraj povsod.

2-58. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor. Za $p \geq 1$ skonstruiraj tako merljivo funkcijo f , ki je skoraj povsod večja od 0 in velja $f^p \in L^1(\mu)$.

2-59. Zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ na intervalu $[0, 1]$ je definirano s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ x^{-\frac{3}{2}} & : x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & : x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

(a) Dokaži, da je funkcija f_n merljiva za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dokaži, da za vsak $x \in [0, 1]$ obstaja limita $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(c) Ali velja enakost

$$\int_{[0,1]} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n dm?$$

(d) Ali obstaja taka pozitivna funkcija $g \in L^1([0, 1], m)$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq f_n \leq g$?

2-60. Realna števila opremimo z Borelovo σ -algebro in Lebesgueovo mero m . Zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je na $\mathbb{R}$ podano s predpisom

$$f_n(x) = n \cdot \sin(\pi n^4 x) \chi_{[0, \frac{2}{n^3}]}$$

Dokaži, da obstaja funkcija g iz $L^1(m)$, ki dominira vse funkcije f_n .

2-61. Izračunaj limite:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-x^n} dx & \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{nx - x^3}{nx^4 + n - 2x^3} e^{-\frac{x^2}{n}} dx \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n^2}}^n \frac{n^{\frac{9}{2}} x^{\frac{3}{2}} + n^2}{n^2 + 1 - n} e^{-n^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}}} dx & \qquad \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{n^2 x^2 - 1}{n^2 x + 1} e^{-\frac{nx^3 + 2x}{nx}} dx \end{aligned}$$

2-62. Naj bo dana zvezna funkcija $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{n^2 x^4 - nx^3}{n^2 x^2 + 2nx + 1} e^{-xf(x)^{\frac{1}{n}}} dx.$$

2-63. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $f \in L^1(\mu)$. Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja taka merljiva množica $E \in \mathcal{A}$ s končno mero, da velja

$$\int_E |f| d\mu > \int_X |f| d\mu - \epsilon.$$

2-64. Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[0, 1]$ in naj bo F njena primitivna funkcija. Dokaži, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 n f(x) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{n}\right) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx.$$

2-65. Izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos(2\pi n! x)^m dx.$$

2-66. Ali obstajata taki omejeni zaporedji $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kompleksnih števil, da zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definirano s predpisom

$$f_n(x) = a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx),$$

konvergira proti funkciji 1 skoraj povsod na intervalu $[0, 2\pi]$?

2-67. Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R}, m)$.

(a) Dokaži, da obstajata limiti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(t, \infty)} f dm \quad \text{in} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(-\infty, t)} f dm$$

in ju izračunaj.

(b) Dokaži, da je funkcija $x \mapsto \int_{(x, \infty)} f dm$ zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

2-68. Naj bo $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil in naj bo $\{a_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ tako dvojno zaporedje kompleksnih števil, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = a_n.$$

Če obstaja taka absolutno konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, da pri vsakem $m \in \mathbb{N}$ velja $|a_{m,n}| \leq |b_n|$ za vse $n \in \mathbb{N}$, dokaži, da velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2-69. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih merljivih funkcij na X ki po točkah konvergira proti 0.

(a) Naj velja

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X \max\{f_1, \dots, f_n\} d\mu < \infty.$$

Izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

(b) Ali trditev iz (a) velja, če je zaporedje integralov neomejeno?

2-70. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor s končno pozitivno mero μ in naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij iz $L^1(\mu)$.

(a) Če zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira enakomerno proti funkciji f , dokaži, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

in $f \in L^1(\mu)$.

(b) Ali trditev iz (a) velja tudi v primeru, ko je mera prostora X neskončna?

2-71. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno mero. Vektorski prostor ekvivalenčnih razredov skoraj povsod enakih merljivih kompleksnih funkcij na X opremimo s preslikavo d , definirano s predpisom

$$d([f], [g]) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

(a) Dokaži, da je d dobro definirana metrika.

(b) Če zaporedje merljivih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti merljivi funkciji f skoraj povsod, dokaži, da zaporedje $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti $[f]$ po metriki.

(c) Dokaži, da zaporedje $\{[f_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti $[f]$ po metriki, natanko takrat, ko zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti f po meri.

(d) Če za zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ merljivih funkcij na X velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \frac{|f_n|}{1 + |f_n|} d\mu = 0,$$

dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po meri proti 0.

(e) Ali trditve veljajo tudi v primeru, ko je mera prostora X neskončna?

2-72. Naj bo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje merljivih funkcij na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ s pozitivno mero μ , ki po točkah konvergira proti ničelni funkciji. Če obstaja taka funkcija $g \in L^1(\mu)$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|f_n| \leq g$, dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira skoraj enakomerno na X proti ničelni funkciji.

2-73. Dokaži, da je omejena Riemannovo integrabilna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tudi Lebesgueovo integrabilna in velja

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f dm.$$

2-74. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno pozitivno mero in naj bo $\mathcal{F}$ neprazna množica nenegativnih merljivih funkcij na X . Naj obstaja taka

omejena nenegativna merljiva funkcija g na X , da za vsak $f \in \mathcal{F}$ in vsak $x \in X$ velja $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Dokaži, da je funkcija

$$(\sup \mathcal{F})(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

skoraj povsod enaka neki merljivi funkciji.

Integriranje funkcijskih vrst

2-75. Izračunaj vsoto vrste

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

2-76. S pomočjo integrala funkcije $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ po primerno izbranem intervalu izračunaj vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}.$$

2-77. S pomočjo določenega integrala primerno izbrane nenegativne funkcije dokaži, da velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

2-78. Na $[0, \infty)$ definiramo zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s predpisom

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$$

in naj bo $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

- (a) Dokaži, da je zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ naraščajoče.
- (b) Dokaži $f_n \leq f$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Na dva načina pokaži

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0, \infty)} |f_n| dm = \infty.$$

2-79. Izračunaj

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx.$$

2-80. Podan je posplošeni integral $I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{x^3 - 1} dx$.

(a) Dokaži, da je I enak

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots.$$

(b) S pomočjo (a) izpelji

$$\frac{29}{100} \leq I \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{54}.$$

2-81. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero štetja točk μ . Dokaži, da za nenegativno funkcijo f na $\mathbb{N}$ velja

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

2-82. Naj bo $\{a_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ dvojno zaporedje nenegativnih števil razširjene realne osi. Dokaži

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}.$$

2-83. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in naj bo $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje pozitivnih mer na $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da je preslikava $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, definirana s predpisom

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E),$$

pozitivna mera na $(X, \mathcal{A})$.

2-84. Racionalna števila intervala $(0, 1)$ razvrstimo v zaporedje $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definirajmo funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ s predpisom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |x - r_n|^{\frac{1}{2}}}.$$

Dokaži, da je funkcija f merljiva in velja $f(x) < \infty$ skoraj povsod.

Produktna mera

2-85. Naj bo μ mera štetja točk na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Definirajmo $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & : m = n \\ -1 & : m = n + 1 \\ 0 & : \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Izračunaj oba dvakratna integrala.

(b) Ali je $f \in L^1(\mu \times \mu)$?

2-86. Naj bo funkcija $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^2}} & : (x, y) \neq 0 \\ 0 & : x = y = 0 \end{cases}.$$

(a) Izračunaj $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy$ in $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dy dx$.

(b) Ali je $f \in L^1(m \times m)$?

2-87. S pomočjo zamenjave vrstnega reda integracije izračunaj $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$.

2-88. Naj bo $0 < a < b < 1$. Dokaži zvezo

$$\int_a^b \frac{\arcsin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\arcsin(bx) - \arcsin(ax)}{x} dx.$$

2-89. S pomočjo zamenjave vrstnega reda integracije izračunaj integral

$$\int_1^\infty dx \int_x^\infty \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

2-90. S pomočjo Fubinijevega izreka izpelji zvezo

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

2-91. S pomočjo dvojnega integrala primerno izbrane funkcije dveh spremenljivk na primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(ax)}{xe^x} dx.$$

2-92. Naj bo $a \geq 1$. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{a^2 x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) dx.$$

2-93. Naj bo $0 < a < b$. S prevedbo na dvojni integral in zamenjavo vrstnega reda integracije izračunaj integrale.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx & \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx) - \operatorname{arctg}(ax)}{x} dx \\ \text{(c)} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx & \text{(d)} \int_0^\infty \frac{e^{bx} - e^{ax}}{x(e^{ax} + 1)(e^{bx} + 1)} dx \end{array}$$

2-94. Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezno odvedljiva funkcija, da obstaja končna limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ in $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Naj bo $0 < a < b$. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$$

2-95. S pomočjo dvojnega integrala funkcije f po primerno izbranem območju izračunaj integrale.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^\infty e^{-x^2} dx; & f(x, y) = ye^{-(1+x^2)y^2}, \\ \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx; & f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}, \\ \text{(c)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin^2 x dx; & f(x, y) = e^{-sx} \sin(2xy), \quad s > 0. \end{array}$$

2-96. S pomočjo enakosti $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ izračunaj $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2-97. Dokaži, da za poljubno naravno število m velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi n} \frac{\sin x}{\sqrt[n]{x}} dx = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)}.$$

2-98. S pomočjo trojnega integrala funkcije

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x^2 y^2)(1 + x^2 z^2)}$$

po primerno izbranem območju izračunaj integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\arctg x}{x} \right)^2 dx.$$

2-99. Naj bo $\{a_{nm}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tako dvojno kompleksno zaporedje, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < \infty.$$

Dokaži, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

2-100. Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ zvezna funkcija.

(a) Dokaži, da je funkcija F , definirana s predpisom

$$F(x, y) = (f(y) - f(x))(\ln f(y) - \ln f(x)),$$

nenegativna funkcija na $[0, 1] \times [0, 1]$.

(b) Utemelji, da Lebesgueov integral

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} F d(m \times m)$$

obstaja in je nenegativno število.

(c) Dokaži, da velja

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \ln f(x) dx \leq \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx.$$

2-101. Naj bosta dana merljiva prostora $(X, \mathcal{P}(X))$ in $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Za $x_1 \in X$ definirajmo mero $\mu = \delta_{x_1}$ na $\mathcal{P}(X)$, ν pa naj bo mera štetja točk na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(a) Določi produktno mero $\mu \times \nu$.

(b) Določi $L^1(\mu \times \nu)$.

(c) Za funkcijo $f \in L^1(\mu \times \nu)$ določi

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y).$$

2-102. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor s pozitivno mero μ in naj bo $f : X \rightarrow [0, \infty)$ nenegativna merljiva funkcija. Naj bo m Lebesgueova mera na realni osi.

(a) Dokaži, da je množica

$$G_f = \{(x, y) \in X \times [0, \infty) : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

merljiva glede na produktno σ -algebro $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$.

(b) Izračunaj $(\mu \times m)(G_f)$.

2-103. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor in f_1, f_2 taki merljivi funkciji na X , da velja $f_1 \leq f_2$. Naj bo E merljiva podmnožica v X . Dokaži, da je množica

$$\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

merljiva množica z mero

$$\int_E (f_2 - f_1) d\mu.$$

2-104. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in f realna merljiva funkcija na X .

(a) Dokaži, da je graf funkcije f merljiva množica v $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Če ima X končno mero, dokaži, da ima graf funkcije f mero 0.

(c) Koliko je mera diagonale kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$?

2-105. Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -končna merljiva prostora. Za funkciji $f \in L^1(\mu)$ in $g \in L^1(\nu)$ definirajmo funkcijo $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom $h(x, y) = f(x)g(y)$. Dokaži, da je $h \in L^1(\mu \times \nu)$ in dokaži, da velja

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \int_X f d\mu \int_Y g d\nu.$$

2-106. Naj bo interval $[0, \infty)$ opremljen z Borelovo σ -algebro $\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ in Lebesgueovo mero m . Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Borelovo merljiva funkcija. Definirajmo funkcijo $F : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ z $F(x, y) = f(x + y)$.

(a) Dokaži, da je F merljiva glede na produktno σ -algebro $\mathcal{B}_{[0,\infty)} \otimes \mathcal{B}_{[0,\infty)}$ na $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

(b) Naj za funkcijo f velja $f(x + y) = f(x)f(y)$ za vse $x, y \geq 0$. Če je $f \in L^1([0, \infty), m)$, dokaži, da je $F \in L^1([0, \infty) \times [0, \infty), m \times m)$ in izrazi

$$\int_{[0,\infty) \times [0,\infty)} F(x, y) d(m \times m)(x, y)$$

z integralom funkcije f .

2-107. Naj bosta $(X, \mathcal{A}, \mu)$ in $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -končna merljiva prostora. Če je $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{B}$ vsebuje kako neprazno merljivo množico z ničelno mero, pokaži, da $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ ni poln.

2-108. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -končen merljiv prostor s pozitivno mero in $f \in L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$) poljubna nenegativna funkcija. Za vsak $t \geq 0$ definirajmo

$$g(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}).$$

(a) Dokaži, da je funkcija g merljiva.

(b) Izračunaj integral $p \int_0^\infty t^{p-1} g(t) dt$.

3. Kompleksne mere

Primeri in totalna variacija

3-1. Ali je Lebesgueova mera totalna variacija kake kompleksne mere?

3-2. Naj bo $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ merljiv prostor in $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kompleksno zaporedje. Za $E \subseteq \mathbb{N}$ definirajmo

$$\lambda(E) = \sum_{n \in E} a_n.$$

Določi potreben in zadosten pogoj, da bo λ kompleksna mera. V tem primeru tudi izračunaj totalno variacijo $|\lambda|$.

3-3. Naj bosta $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kompleksni zaporedji in naj bosta μ in λ zaporedoma pozitivna in kompleksna mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, definirani s predpisoma

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n \quad \text{in} \quad \lambda(E) = \sum_{n \in E} b_n.$$

(a) Določi potreben in zadosten pogoj, da velja $\lambda \ll \mu$.

(b) Določi potreben in zadosten pogoj, da velja $\mu \perp \lambda$.

3-4. Za kompleksno mero μ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ definiramo preslikavo $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ s predpisom

$$\lambda(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^n \text{ končno razbitje za } E \right\}.$$

Dokaži, da je $\lambda = |\mu|$.

3-5. Dokaži, da za kompleksni meri μ_1 in μ_2 na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ velja

$$||\mu_1| - |\mu_2|| \leq |\mu_1 + \mu_2| \leq |\mu_1| + |\mu_2|.$$

3-6. Naj bosta μ_1 in μ_2 vzajemno singularni kompleksni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da veljajo naslednje enakosti:

$$||\mu_1| - |\mu_2|| = |\mu_1 + \mu_2| = |\mu_1 - \mu_2| = |\mu_1| + |\mu_2|.$$

3-7. Dokaži, da za paroma vzajemno singularne kompleksne mere $\mu_1, \dots, \mu_n$ na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ velja

$$|\mu_1 + \dots + \mu_n| = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|.$$

3-8. Naj bo λ taka kompleksna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, da je $|\lambda|(X) = \lambda(X)$. Dokaži, da je λ pozitivna mera.

3-9. Ali na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ obstaja taka kompleksna Borelova mera μ , da za vsako iracionalno število x velja $\mu((-\infty, x)) \neq \mu((-\infty, x])$?

3-10. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero μ in $f \in L^1(\mu)$.
Dokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $\mu(E) < \delta$ sledi $\left| \int_E f d\mu \right| < \epsilon$.

Realne mere

3-11. Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje kompleksnih števil. Za poljubno podmnožico $E \subseteq \mathbb{N}$ definiramo

$$\lambda(E) = \sum_{n \in E} a_n.$$

- (a) Določi potreben in zadosten pogoj, da je λ realna mera na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
- (b) Določi kak Hahnov razcep mere v primeru, ko je λ realna mera.
- (c) Kdaj je Hahnov razcep enolično določen?

3-12. Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in naj bo $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Na σ -algebri $\mathcal{A}$ definiramo realno mero

$$\mu_f(E) = \int_E f d\mu.$$

Določi taki končni pozitivni meri μ_1 in μ_2 , da velja $\mu_f = \mu_1 - \mu_2$ in $\mu_1 \perp \mu_2$.

3-13. Naj bosta μ_1 in μ_2 končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Definirajmo realno mero $\lambda := \mu_1 - \mu_2$ na $(X, \mathcal{A})$.

- (a) Dokaži, da velja $|\lambda| \leq \mu_1 + \mu_2$.
- (b) Dokaži, da za poljubno nenegativno merljivo funkcijo f na X velja

$$\int_X f d|\lambda| \leq \int_X f d\mu_1 + \int_X f d\mu_2.$$

3-14. Dokaži, da za realno mero λ velja $|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-$.

3-15. Naj bo λ realna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

- (a) Če za totalno variacijo $|\lambda|$ mere λ velja $|\lambda|(X) = \lambda(X)$, dokaži, da je λ končna pozitivna mera.
- (b) Ali trditev iz (a) velja, če samo predpostavimo $\lambda(X) \geq 0$?

Lebesgue-Radon-Nikodymov izrek

3-16. Naj bosta μ in ν končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$.

(a) Dokaži, da v primeru, ko obstajata pozitivni meri ν_a in ν_s , da je $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_a \ll \mu$ in $\nu_s \perp \mu$, potem sta enolično določeni.

(b) Definirajmo

$$D = \{g : X \rightarrow [0, \infty] : g \text{ merljiva in } \int_A g d\mu \leq \nu(A)\}.$$

Dokaži, da je D zaprta za končne maksimume.

(c) Dokaži, da je D zaprta za števne supremume.

(d) Dokaži, da obstaja $f \in D$, da je $\int_X f d\mu = \sup_{g \in D} \int_X g d\mu$.

(e) Definirajmo $\mu_f(E) = \int_E f d\mu$ in $\nu_s(E) = \mu(E) - \mu_f(E)$. Dokaži, da μ_f in ν_s izpolnjujeta pogoje iz (a).

(f) Dokaži, da obstaja natanko ena funkcija $f \in L^1(\mu)$, da je $\nu_a(E) = \int_E f d\mu$ za vse $E \in \mathcal{A}$.

3-17. Na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definiramo kompleksno mero s predpisom

$$\lambda(E) = \sum_{k \in E} e^{ik} 2^{-|k|}$$

in pozitivno mero

$$\mu(E) = \sum_{k \in E \cap \mathbb{N}} \frac{1}{k^2}.$$

(a) Določi $|\lambda|$ in $\|\lambda\|$.

(b) Določi Lebesgueov razcep mere λ glede na mero μ .

(c) Določi Radon-Nikodymov odvod mere λ_a po meri μ .

3-18. Naj bo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje nenegativnih števil, zaporedje $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pa naj bo element prostora l^1 . Definirajmo kompleksno mero ν in pozitivno mero μ na $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ s predpisoma

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n \quad \text{in} \quad \nu(E) = \sum_{n \in E} b_n.$$

(a) Določi Lebesgueovo dekompozicijo mere ν glede na mero μ . Zakaj ta dekompozicija obstaja?

(b) Določi $\frac{d\nu_a}{d\mu}$.

3-19. Naj bo m Lebesgueova mera na intervalu $[0, 1]$, opremljenim z Lebesgueovo σ -algebro $\mathcal{L}$. Naj bosta E_1 in E_2 Lebesgueovo merljivi podmnožici

intervala $[0, 1]$. Definirajmo λ_1 in λ_2 na $\mathcal{L}$ z

$$\lambda_1(F) = \alpha m(F \cap E_1) \quad \text{in} \quad \lambda_2(F) = \beta m(F \cap E_2)$$

za $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $F \in \mathcal{L}$.

(a) Dokaži, da sta λ_1 in λ_2 kompleksni meri na $\mathcal{L}$.

(b) Poišči potreben in zadosten pogoj, da sta meri λ_1 in λ_2 vzajemno singularni.

(c) Dokaži, da je mera $\lambda_1 + \lambda_2$ absolutno zvezna glede na mero m in izračunaj $\frac{d(\lambda_1 + \lambda_2)}{dm}$.

3-20. Naj bo $X = [0, 1]$ in $\mathcal{A}$ Lebesgueova σ -algebra na X , μ mera štetja točk na $\mathcal{A}$ in m Lebesgueova mera na $[0, 1]$.

(a) Ali obstaja Lebesgueova dekompozicija mere μ glede na mero m ?

(b) Dokaži, da je $m \ll \mu$.

(c) Dokaži, da ne obstaja Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\mu}{dm}$.

3-21. Naj bosta ν in λ kompleksni meri na merljivih prostorih $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$. Dokaži, da obstaja na produktni σ -algebri $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ natanko ena taka kompleksna mera $\nu \times \lambda$, da je

$$(\nu \times \lambda)(A \times B) = \nu(A)\lambda(B)$$

za poljubni $A \in \mathcal{A}$ in $B \in \mathcal{B}$.

3-22. Naj bo μ σ -končna pozitivna mera in λ kompleksna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$. Naj bo λ absolutno zvezna glede na μ . Če je $\frac{d\lambda}{d\mu} = f$, dokaži, da velja $\frac{d|\lambda|}{d\mu} = |f|$.

3-23. Naj bosta μ in ν taki σ -končni pozitivni meri na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, da velja $\mu \ll \nu \ll \mu$.

(a) Ali velja $L^1(\mu) = L^1(\nu)$? Dokaži ali poišči protiprimer.

(b) Poišči izometrični izomorfizem med prostoroma $L^1(\mu)$ in $L^1(\nu)$.

3-24. S pomočjo Radon-Nikodymovega izreka dokaži obstoj Hahnovega razcepa realne mere.

3-25. Naj bodo mere λ, φ in μ definirane na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$, pri čemer sta φ in μ σ -končni pozitivni meri in λ kompleksna mera. Naj bo $\lambda \ll \varphi$ in $\varphi \ll \mu$. Dokaži, da je $\lambda \ll \mu$, med Radon-Nikodymovimi odvodi pa velja zveza

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\mu}.$$

3-26. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor in naj bosta dani ekvivalentni σ -končni meri μ in ν na $(X, \mathcal{A})$. Dokaži, da velja

$$\frac{d\mu}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu} = 1$$

skoraj povsod na X .

L^p -prostori

3-27. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni prostor in $f : X \rightarrow (0, \infty)$ funkcija, ki za nek $p < \infty$ zadošča $\|f\|_p = 1$. Dokaži, da velja $\int_X \ln f d\mu \leq 0$.

3-28. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni prostor in f, g taki nenegativni merljivi funkciji v $L^1(\mu)$, da velja $f(x)g(x) \geq 1$ za vsak $x \in X$. Na dva načina dokaži, da je

$$\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq 1.$$

3-29. Naj bo $f \in L^1([0, 1], m)$ taka realna funkcija, da velja $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Dokaži, da velja

$$\int_0^1 \ln(1 + e^{f(x)}) dx \geq \ln 2.$$

3-30. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ verjetnostni prostor in $f \in L^1(\mu)$ nenegativna merljiva funkcija. Dokaži, da velja

$$e^{-\|f\|_1} \leq \int_X e^{-f(x)} d\mu(x).$$

3-31. Naj za vsako omejeno merljivo funkcijo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\varphi\left(\int_0^1 f dx\right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f) dx.$$

Dokaži, da je φ konveksna.

3-32. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s končno neničelno mero in $f \in L^1(\mu)$ realna funkcija. Naj bo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dokaži, da velja

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu\right) \leq \frac{1}{\mu(X)} \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Naj bo $f : [0, 1/\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da velja $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx = 1$.
Dokaži, da velja

$$\frac{\ln 3}{\sqrt{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \ln(1 + 2f(x)^2) dx.$$

3-33. Dokaži neenakost Minkowskega za $1 < p < \infty$ s pomočjo Hölderjeve neenakosti.

3-34. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedoma zaporedji v $L^p(\mu)$ in $L^q(\mu)$ za $1 \leq p \leq \infty$. Če zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira v prostoru $L^p(\mu)$ proti funkciji f , zaporedje $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pa konvergira v prostoru $L^q(\mu)$ proti funkciji g , dokaži, da zaporedje $\{f_n g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira v prostoru $L^1(\mu)$ proti funkciji fg .

3-35. Naj bo $1 \leq p < \infty$ in $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\mu)$ zaporedje merljivih funkcij, ki konvergira v prostoru $L^p(\mu)$ proti funkciji f . Dokaži, da velja

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{\|f_n - f\|_p}{\epsilon^{\frac{1}{p}}}.$$

Dokaži, da zaporedje $\{f_n\}_n$ konvergira po meri proti funkciji f .

3-36. Naj bo $1 \leq p \leq q < \infty$.

(a) Dokaži, da je $l^p \subseteq l^q$ in za vsak $f \in l^p$ velja $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

(b) Ali trditev iz (a) velja tudi v primeru $q = \infty$?

3-37. Naj bo μ končna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in $1 \leq p < q < \infty$.

(a) Dokaži, da je $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

(b) Če je $f \in L^q(\mu)$ poljubna funkcija, pokaži, da velja

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}}.$$

(c) Če je μ verjetnostna mera, dokaži, da je vložitev $\iota : L^q(\mu) \rightarrow L^p(\mu)$ kontrakcija.

3-38. Naj bo k poljubno naravno število in $1 \leq p < \infty$. Merljiv prostor $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ opremimo z mero μ , ki je definirana kot

$$\mu(\{n\}) = \frac{1}{n^k}.$$

Določi vsa nenegativna realna števila t , da bo funkcija f , ki je definirana s predpisom $f(n) = n^t$, element prostora $L^p(\mu)$.

3-39. Naj bo μ pozitivna mera na merljivem prostoru $(X, \mathcal{A})$ in naj bodo $f_i \in L^{p_i}(\mu)$ merljive funkcije za $p_i \geq 1$. Če je $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, dokaži, da je $f_1 \cdots f_n \in L^1(\mu)$ in velja

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

3-40. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $1 \leq p < \infty$. Za funkcijo $\varphi \in L^\infty(\mu)$ definiramo preslikavo M_φ na $L^p(\mu)$ s predpisom $M_\varphi f = f\varphi$.

(a) Dokaži, da je M_φ omejena linearna preslikava na prostoru $L^p(\mu)$ z normo največ $\|\varphi\|_\infty$.

(b) Če je mera μ σ -končna, dokaži, da je $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|$.

(c) Če je mera μ σ -končna, dokaži, da je preslikava $T : L^\infty(\mu) \rightarrow \mathcal{B}(L^p(\mu))$, definirana s predpisom $T : \varphi \mapsto M_\varphi$, izometrična vložitev.

3-41. Naj bo $\varphi : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ linearna preslikava na realnem prostoru $L^p(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Če φ slika skoraj povsod nenegativne funkcije v nenegativna števila, pokaži, da je φ zvezna.

3-42. Naj bo k zvezna funkcija na pravokotniku $[a, b] \times [a, b]$. Dokaži, da je integralski operator $T : L^p[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, definiran s predpisom

$$(Tf)(x) = \int_{[c, d]} k(x, y) f(y) dm(y)$$

omejen linearni operator, katerega zaloga vrednosti je vsebovana v prostoru zveznih funkcij na intervalu $[a, b]$.

3-43. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in $p \in [1, \infty]$. Dokaži, da je

$$L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^1(\mu) + L^\infty(\mu).$$

3-44. Naj bo $X = \{0, 1\}$ in μ mera na $\mathcal{P}(X)$, definirana z $\mu(\{0\}) = 1$ in $\mu(\{1\}) = \infty$.

(a) Določi prostora $L^1(\mu)$ in $L^\infty(\mu)$.

(b) Za $1 < p < \infty$ določi prostora $L^p(\mu)$ in $L^q(\mu)$.

(c) Ali sta prostora $L^1(\mu)$ in $L^\infty(\mu)$ izomorfna v algebraičnem smislu?

ODGOVORI

1. Merljive množice	42
2. Integral	43
3. Kompleksne mere	46

1. Merljive množice

1-3. Ne.

1-8. $\mathcal{B}_X = \{E \subseteq X : \text{ena od množic } E \text{ in } E^c \text{ je števna}\}.$

1-9. Diskretni metrični prostori.

1-15. (b) 2^n za nek $n \in \mathbb{N}$.

1-19. Kardinalnost Borelove σ -algebre na $\mathbb{R}$ je kontinuum.

1-26. (a) Trditev velja.

(b) Trditev ne velja; $A = [-1, 0)$ in $B = (0, 1]$.

1-28. 1

1-37. $\zeta(A \cup B) = \zeta(A)$

1-46. Množice z ničelno Lebesgueovo mero imajo prazno notranjost.

1-47. Ne.

1-50. (b) Ne.

1-51. (b) $f(x) = Ae^x + B$ ($B \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$), $\mu_f([0, 1]) = A(e - 1).$

1-52. (a) $f(b^+) - f(a)$ **(b)** $f(a^+) - f(a)$ **(c)** $f(b^+) - f(a^+)$ **(d)** $f(b) - f(a^+)$

2. Integral

2-6. (b) $f = 3\chi_U - \chi_{U^c}$.

2-13. Merljive preslikave so natanko konstantne funkcije.

2-14. (b) Naj bo $X = \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ σ -algebra vseh podmnožic realne osi, ki so bodisi števne bodisi imajo števen komplement. Iskana funkcija je $f(x) = x$.

2-16. (b) Iskana σ -algebra ima za generatorje ravno vse množice oblike $f_i^{-1}(B)$ za $B \in \mathcal{B}_i$, $i \in I$.

(c) Iskana σ -algebra je σ -algebra vseh simetričnih množic v $\mathbb{R}$, ki so števne ali pa ne njihov komplement števen.

2-19. (a) Funkcija f je enaka skoraj povsod funkciji $\liminf_{k \rightarrow \infty} \chi_{E_{n_k}}$ za neko podzaporedje $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ v $\mathbb{N}$.

(b) V splošnem ne.

2-26. (a) da **(b)** ne **(c)** ne

2-27. Ne.

2-31. (c) V splošnem ne.

2-32. V obeh primerih sta potrebna in zadostna pogoja enaka, t.j., $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2-36. $f(x_0)$

2-37. $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$

2-39. (a) $\frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\pi^2}{8}$ **(d)** $\frac{1}{2}$

2-40. $\arcsin(b) - \arcsin(a)$

2-41. $\mu(E)$

2-42. $L_1 = \infty$, $L_2 = \int_X f d\mu$, da.

2-45. (b) V splošnem trditev ne velja.

2-46. 1

2-47. (a) $F(t) = \chi_{\{0\}}$, $G(t) = 0$.

(b) Funkcija F ni zvezna, je pa Borelovo merljiva glede na Borelovo σ -algebro na $[0, \infty)$.

(c) Ne.

2-49. (b) Ne; $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $f(n) = \chi_n$.

2-50. Ne.

$$\mathbf{2-51.} \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

2-54. $f = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_{n_k}}$ za neko podzaporedje $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ naravnih števil.

2-59. (c) da (d) ne

2-61. (a) 1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

2-62. 2

2-65. 0

2-66. Ne.

2-69. (a) 0 (b) ne

2-70. (b) ne

2-75. $\ln 2$.

2-76. $\frac{\ln 2}{2}$.

2-79. $-\frac{\pi^2}{6}$.

2-87. $\frac{e-1}{2}$.

2-89. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

2-91. $\frac{1}{2} \ln(1 + a^2)$.

2-92. $\frac{\pi}{2}(a - 1)$.

2-93. (a) $\pi(\sqrt{b} - \sqrt{a})$ (b) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$ (c) $\ln \frac{b+1}{a+1}$ (d) $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$

2-94. $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(0)) \ln \frac{b}{a}$.

2-95. (a) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (b) $\frac{\pi^2}{4}$ (c) $\frac{1}{4} \ln \frac{s^2+4}{s^2}$

2-96. $\frac{\pi}{2}$.

2-98. $\pi \ln 2$

2-101. (a) $\mu \times \nu(E) = |E_{x_1}|$

(b) Iskane funkcije so natanko tiste funkcije f , za katere velja $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_1, n)| < \infty$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_1, n)$.

2-102. (b) $\int_X f d\mu$

2-106. (b) $\left(\int_X f dm \right)^2$

2-108. (b) $\|f\|_p^p$

3. Kompleksne mere

3-1. Ne.

3-2. Potreben in zadosten pogoj je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$.

$$\|\mu\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

3-3. (a) Če je $a_n = 0$, potem je $b_n = 0$.

(b) $a_n b_n = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

3-9. Ne.

3-11. (a) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ in $a_n \in \mathbb{R}$.

(b) $P = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$ in $N = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\}$.

(c) $a_n \neq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

3-12. $\mu_1 = f^+ \mu$ in $\mu_2 = f^- \mu$.

3-15. (b) Ne. Naj bo $X = \{0, 1\}$ in $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ter $\mu(\{0\}) = 2$ in $\mu(\{1\}) = -1$.

3-17. (a) $|\lambda|(E) = \sum_{k \in E} 2^{-|k|}$, $\|\lambda\| = 3$.

(b) $\lambda_a(E) = \sum_{k \in E \cap \mathbb{N}} e^{ik} 2^{-|k|}$, $\lambda_s(E) = \sum_{k \in E \cap \mathbb{N}^c} e^{ik} 2^{-|k|}$

(c) Za predstavnika ekvivalenčnega razreda vzamemo

$$\frac{d\lambda_a}{d\mu}(x) = \begin{cases} \frac{e^{in} n^2}{2^n} & : n \in \mathbb{N} \\ 0 & : n \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

3-18. (a) Mera μ je σ -končna. Naj bo $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$. Tedaj je

$$\nu_a(E) = \sum_{n \in E \cap A} b_n, \quad \nu_s(E) = \sum_{n \in E \cap A^c} b_n,$$

(b) Za predstavnika ekvivalenčnega razreda vzamemo

$$\frac{d\lambda_a}{d\mu}(x) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_n} & : n \in A \\ 0 & : n \in A^c \end{cases}.$$

3-19. (b) $\mu(E \cap F) = 0$ **(c)** $\frac{d(\lambda_1 + \lambda_2)}{dm} = \alpha \chi_{E_1} + \beta \chi_{E_2}$

3-20. (a) Ne

3-23. (a) Ne

3-36. (b) Da.

3-38. $t < \frac{k-1}{p}$

3-44. (a) Prostor $L^\infty(\mu)$ je enak množici vseh funkcij iz $\{0, 1\}$ v $\mathbb{F}$, $L^1(\mu)$ pa je enak množici vseh funkcij iz $\{0, 1\}$ v $\mathbb{F}$, ki slikajo 1 v 0.

(b) Prostora sta enaka množici vseh funkcij, ki slikajo 1 v 0.

(c) Ne, saj njuni dimenziji nista enaki.

NASVETI

1. Merljive množice	50
2. Integral	52
3. Kompleksne mere	55

1. Merljive množice

- 1-8.** Borelova σ -algebra $\mathcal{B}_X$ je generirana z družino vseh zaprtih množic.
- 1-10.** Dokaži, da so generatorji σ -algebre $\mathcal{B}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{X_n}$ vsebovani v Borelovi σ -algebri topološkega produkta $X_1 \times \cdots \times X_n$.
- 1-14.** Dokaži, da je $\mathcal{B}$ σ -algebra.
- 1-15. (a)** Poišči merljivo množico, katera nima pravih merljivih podmnožic. Nato nadaljuj isti postopek na njenem komplementu.
- 1-16. (a)** Definiraj $E_1 = X$ in konstruiraj E_n induktivno na naslednji način. Če so množice $E_1, \dots, E_n$ že skonstruirane, poišči tako množico $C \in \mathcal{A}$, da je $\emptyset \subsetneq E_n \cap C \subsetneq E_n$. Sedaj si oglej družini $\mathcal{A} \cap E_n \cap C$ in $\mathcal{A} \cap (E_n \setminus C)$.
- (b)** Poišči injektivno preslikavo $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{A}$.
- 1-17. (a)** Če $X \neq A$, potem ima $X \setminus A$ prvi element.
- (b)** Izberi neštevno dobro urejeno množico X . Če X ne izpolnjuje pogojev iz naloge, potem obstaja $x \in X$, da I_x ni števna. Množica vseh takih x ima prvi element.
- 1-18.** Dokaži, da je $\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{E}_\alpha$ σ -algebra, ki vsebuje $\mathcal{F}$.
- 1-19.** Borelova σ -algebra na $\mathbb{R}$ vsebuje vsaj kontinuum odprtih intervalov. Za dokaz, da je kardinalnost Borelove σ -algebre natanko kontinuum si pomagaj z nalogo 1-??.
- 1-25.** Pomagaj si z nalogo 1-??.
- 1-27.** Dokaži, da za poljuben $k \in \mathbb{N}$ velja $\mu\left(\bigcup_{n=1}^k E_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$.
- 1-28.** Dokaži, da za poljuben $k \in \mathbb{N}$ velja $\mu\left(\bigcap_{n=1}^k E_n\right) = 1$.
- 1-29. (c)** Koliko je $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$?
- 1-33. (b)** Predpostavi nasprotno, t.j.,
- $$s := \sup\{\mu(E) : \mu(E) < \infty\} < \infty$$
- in poišči množico $E \in \mathcal{A}$ z $\mu(E) = s$.
- 1-34.** Za vsak $0 < \delta < 1$ obstaja taka množica E_n z $\mu(E_n) > 1 - \delta$.

- 1-35.** Naj bo H presek vseh kompaktnih množic z mero 1. Pokaži, da je mera množice H enaka 1.
- 1-37.** Upoštevaj definicijo zunanje mere.
- 1-38.** Upoštevaj definicijo ζ -merljivosti množice E za množici A in $A \cup E$.
- 1-39.** Poišči ζ -merljivo množico E_n z $\zeta(A \setminus E_n) < \frac{1}{n}$ in si oglej množico $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
- 1-45.** Množica, ki ni gosta, ne seka neke odprte množice.
- 1-46.** Kakšna je Lebesgueova mera odprtih množic?
- 1-47.** Navzgor oceni mero množice A .
- 1-48.** Racionalna števila razvrsti v zaporedje. Iskana množica je števna unija primernih odprtih intervalov, ki imajo središča v racionalnih številih.
- 1-49. (a)** Omejene množice so vsebovane v omejenih intervalih.
- (b)** Oglej si funkcijo $f(x) = m((-\infty, x] \cap K)$.
- 1-50. (a)** Brez izgube splošnosti predpostavi $h = 0$ in si oglej množico
- $$\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$
- 1-51. (b)** Lebesgue-Stieltjesovi meri μ_f in μ_g sta enaki natanko takrat, ko je $f - g$ konstantna funkcija.
- 1-52.** Funkcija je zvezna v točki x_0 natanko takrat, ko se njena leva limita in njena desna limita ujemata v točki x_0 .
- 1-53.** Ob predpostavki, da je ena od množic A in B kompaktna, dokaži, da je $A + B$ zaprta množica.
- 1-55. (a)** Vsako množico z ničelno mero lahko pokrijemo s števno unijo odprtih intervalov, katerih mere se seštevajo pod ϵ .
- (b)** Množico tipa F_σ zapiši kot števno unijo zaprtih množic, zaprto množico pa zapiši kot števno unijo kompaktnih množic.
- (c)** Množica je Lebesgueovo merljiva natanko takrat, ko je unija množice z ničelno mero in množice tipa F_σ .

2. Integral

- 2-8.** Množica $\{x \in X : f(x) > c \geq g(x)\}$ je števna unija množic z ničelno mero.
- 2-9.** Funkcija f je limita zaporedja merljivih funkcij.
- 2-11.** Pokaži, da je družina $\mathcal{B}' = \{E \subseteq Y : f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}\}$ σ -algebra.
- 2-12.** Pokaži, da je $\mathcal{A}' = \{E \subseteq X : f(E) \in \mathcal{B}_Y\}$ σ -algebra, ki vsebuje vse odprte množice prostora X .
- 2-14. (a)** Vsaka množica je unija svojih singletonov.
- 2-17.** Upoštevaj definicijo odvoda funkcije.
- 2-18.** Funkcijo F zapiši kot produkt funkcij, ki so merljive glede na produktno σ -algebro.
- 2-20. (a)** Konvergentna zaporedja so natanko Cauchyjeva zaporedja. Upoštevaj Cauchyjev pogoj za pozitivna racionalna števila ϵ .
- 2-21.** Pokaži, da je množica $f^{-1}((a, \infty))$ merljiva za vsak $a \in \mathbb{R}$.
- 2-22.** Izračunaj $G(t) - G(s)$ za $t > s$.
- 2-23.** Kompleksno merljivo funkcijo zapiši kot linearno kombinacijo nenegativnih merljivih funkcij, nenegativne merljive funkcije pa aproksimiraj z naraščajočim zaporedjem stopničastih funkcij. Torej, najprej dokaži trditev v primeru karakteristične funkcije.
- 2-24.** Trditev najprej dokaži v primeru, ko je f karakteristična funkcija.
- 2-25.** Upoštevaj prejšnjo nalogo.
- 2-29.** Uporabi izrek Jegorova.
- 2-30.** Edina množica z mero manjšo od 1 je prazna.
- 2-34.** Prostor X zapiši kot števno unijo množic s končno mero. Na množicah s končno mero si lahko pomagaš z izrekom Jegorova.
- 2-35.** Za $\epsilon > 0$ definiraj
- $$U_n = \{x \in X : 0 \leq f(x) - f_n(x) < \epsilon\}.$$
- Kakšno je zaporedje množic $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?
- 2-38.** Upoštevaj definicijo Lebesgueovega integrala nenegativne merljive funkcije.
- 2-39. (b)** Vpelji novo spremenljivko $t = nx$.

2-41. Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci.

2-42. Lebesgueov izrek o monotoni konvergenci.

2-44. Za $t > 0$ definiraj $E_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$.

2-45. (a) Definiraj $g_n = f_1 - f_n$.

(b) V splošnem je odgovor ne; ogledaj si zaporedje funkcij $f_n = \chi_{[n, \infty)}$.

2-46. Uporabi padajočo različico Lebesgueovega izreka o monotoni konvergenci.

2-47. Za $t > 0$ velja

$$0 \leq F(t) \leq G(t) \leq \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^t)^n}.$$

2-48. Pomagaj si s Fatoujevo lemo.

2-49. (a) Uporabi Fatoujevo lemo za zaporedje funkcij $g - f_n$.

2-52. Vsako konvergentno zaporedje v L^1 z limito f ima podzaporedje, ki konvergira proti f skoraj povsod.

2-54. Kaj lahko poveš o funkciji f v primeru konvergence skoraj povsod?

2-55. Pomagaj si s Fatoujevo lemo.

2-57. Zakaj se lahko omejiš na primer realne funkcije? Zakaj se lahko omejiš na nenegativne funkcije?

2-66. Pomagaj si z Lebesgueovim izrekom o dominirani konvergenci.

2-68. Definiraj ustrezno zaporedje funkcij na merljivem prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, opremljenim z mero štetja točk.

2-69. Uporabi oba Lebesgueova konvergenčna izreka.

2-70. Ker je mera prostora X končna, so konstantne funkcije integrabilne.

2-72. Kakšno mero ima množica $A = \{x \in X : g(x) \geq \epsilon\}$ za $\epsilon > 0$?

2-73. Izberi poljubno delitev $\mathcal{D}$ intervala $[a, b]$. Definiraj primerni (stopničasti) funkciji $s_{\mathcal{D}}$ in $z_{\mathcal{D}}$, katerih Lebesgueova integrala na $[a, b]$ sta zaporedoma enaka spodnji in zgornji Darbouxovi vsoti funkcije f glede na delitev $\mathcal{D}$. Upoštevaj definicijo Riemannovega integrala (lahko izbereš zaporedje delitev, katerih dolžine največjih delitvenih intervalov konvergirajo proti 0), da dokažeš obstoj merljivih funkcij s iz z , ki sta enaki f skoraj povsod.

- 2-74.** Najprej si oglej primer, ko je funkcija g omejena. V tem primeru naj bo $s := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_X f d\mu$. Pokaži, da obstaja funkcija F , ki je supremum nekega zaporedja iz $\mathcal{F}$ in ustreza $\int_X F d\mu = s$.
- 2-81.** Definiraj $f_n = f(n)\chi_n$ in integriraj funkcijsko vrsto nenegativnih funkcij.
- 2-82.** Pomagaj si z zaporedjem funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definiranih s predpisom $f_n(m) = a_{nm}$.
- 2-84.** Izračunaj $\int_{[0,1]} f dm$.
- 2-93. (a)** Pomagaj si z integralom $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.
- (d)** Integrand zapiši kot razliko dveh ulomkov.
- 2-97.** Pomagaj si s formulami za Γ -funkcijo.
- 2-99.** Pomagaj si s funkcijo $f(n, m) = a_{nm}$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- 2-102. (a)** Praslike merljivih množic so merljive množice. V pomoč naj bo funkcija $F(x, y) = f(x) - y$.
- (b)** Kaj je mera množice po definiciji?
- 2-105.** Fubinijev izrek.
- 2-108. (a)** Funkcija g je monotona.
- (b)** V integralu iz naloge upoštevaj, kaj je $g(t)$ in uporabi Fubinijev izrek.

3. Kompleksne mere

3-5. Najprej dokaži desno neenakost, za dokaz leve neenakosti pa si pomagaj z desno neenakostjo za meri μ_1 in $\mu_2 - \mu_1$.

3-7. Indukcija.

3-8. Naj bo E taka množica z $\lambda(E) \neq 0$. Dokaži, da za kompleksni števili $\lambda(E)$ in $\lambda(E^c)$ velja trikotniška enakost.

3-9. Če bi Borelova kompleksna mera z iskanimi lastnostmi obstajala, potem bi za vsako iracionalno število x veljalo $|\mu|(\{x\}) > 0$. Poišči števno množico E z $|\mu|(E) = \infty$.

3-10. Mera $f d\mu$ je glede na mero μ absolutno zvezna.

3-14. $\lambda^+ \perp \lambda^-$.

3-15. (a) Če je $\lambda(E) < 0$ za nek $E \in \mathcal{A}$, dokaži, da je $\lambda(X) < |\lambda|(X)$.

3-21. S pomočjo Radon-Nikodymovega izreka reduciraj dokaz na pozitivni meri $|\nu|$ in $|\lambda|$.

3-22. Dokaz $\frac{d|\lambda|}{d\mu} \leq |f|$ je direkten. Za dokaz obratne neenakost funkcijo $\phi := \chi_E \cdot \operatorname{sgn} \bar{f}$ aproksimiraj z zaporedjem stopničastih funkcij. Koliko je $\int_X f \phi d\mu$?

3-23. (b) Naj bo $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$. Oglej si preslikavo $T : L^1(\lambda) \rightarrow L^1(\mu)$, definirano s predpisom $f \mapsto fh$.

3-24. Dokaži, da je Radon-Nikodymov odvod $\frac{d\mu}{d|\mu|}$ realna funkcija, ki je skoraj povsod enaka 1 po absolutni vrednosti. Nato si pomagaj z njenim pozitivnim in negativnim delom.

3-27. Uporabi Jensenovo neenakost.

3-32. S pomočjo mere μ definiraj verjetnostno mero na $(X, \mathcal{A})$.

3-33. $(a + b)^p = a(a + b)^{p-1} + b(a + b)^{p-1}$.

3-34. Pomagaj si s Hölderjevo neenakostjo.

3-36. Splošni člen konvergentne vrste konvergira proti 0. Drugi del trditve najprej dokaži v primeru, ko je $\|f\|_p \leq 1$.

3-39. Izpelji Youngovo neenakost za n -terico števil in posnemaj dokaz Hölderjeve neenakosti v primeru $n = 2$.

3-42. Upoštevaj, da je funkcija k enakomerno zvezna, nato uporabi Hölderjevo neenakost.

3-42. Če φ ni zvezen, obstaja zaporedje nenegativnih funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z normo 1, da je $\varphi(f_n) \geq n^3$. Oglej si funkcijo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2}$.

3-43. Prostor X razdeli na množico $A = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$ in njen komplement.

Literatura

- [1] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [2] R. Drnovšek, *Rešene naloge iz teorije mere*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **40**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2001.
- [3] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and Their Applications*, J. Wiley and Sons, New York, 1999.
- [4] M. Hladnik, *Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **16**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1985.
- [5] B. Magajna, *Osnove teorije mere*, DMFA - založništvo, 2011.
- [6] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.