Franc Forstnerič

Analiza na mnogoterostih

– Zapiski predavanj –

January 5, 2022

Predgovor

Svet, v katerem živimo, je trirazsežna mnogoterost. Če sledimo ideji fizikov in dodamo čas kot četrto spremenljivko, dobimo štirirazsežno mnogoterost, ki jo običajno imenujemo prostor-čas. Že Einstein je spoznal, da je le-ta raven samo lokalno, globalno pa je ukrivljen zaradi gravitacije; z njegovim študijem se ukvarja splošna teorija relativnosti, kot tudi kvantna fizika in mehanika.

In zakaj bi se ustavili pri dimenziji 4? Lahko dodamo še dimenzije, ki opisujejo kvantna stanja delcev in dobimo 10-dimenzionalno mnogoterost. Kakšna je njena topološka in gladka struktura? Bolje rečeno, katera mnogoterosto najbolj ustreza astrnonomskim in fizikalnim opazovanjem vesolja? Je vesolje končno? Se bo širilo v nedogled ali bo kolapsiralo nazaj vase? Kaj se dogaja z ukrivljenostjo prostor-časa v bližini črnih lukenj, ki so singularnosti prostor-časa? Kako lahko opišemo te dinamične procese z matematičnimi orodji?

Mnoga najzanimivejša vprašanja sodobne matematike in njenih uporab so povezana z globalnimi analitičnih in topoloških lastnosti mnogoterosti. Teorija mnogoterosti je izrazito interdisciplinarno področje matematike in je za moderno geometrijo in topologijo, pa tudi za matematično fiziko, astronomijo, mehaniko ter številna druga področja znanosti prav tako fundamentalne narave kot so realna števila ter evklidski prostori za elementarno matematično analizo in geometrijo.

Eden od prejemnikov Nobelove nagrade za fiziko v letu 2020 je britanski matematik in matematični fizik Roger Penrose, ki je v svojem delu v letu 1965 pokazal, da Einsteinova splošna teorija relativnosti matematično napoveduje obstoj masivnih črnih lukenj. Einstein sam ni verjel, da zares obstajajo, saj bi lahko bili zakoni fizike drugačni v neposredni bližini takih singularnosti. Pred nedavnim pa je bil eksperimentalno potrjen obstoj masivnih črnih lukenj celo v naši galaksiji; največja znana ima maso več od milijona sonc na območju premera dobrih 24 km. Ti fenomeni nakazujejo, da ima mnogoterost prostor-čas singularnosti v svoji metrični in morda tudi topološki strukturi. Kaotičnost se naravno pojavi tudi v dinamičnih sistemih. Študij singularnosti je del teorije mnogoterosti in njihovih posplošitev. Singularnosti kompleksnih mnogoterosti so ena od klasičnih tem kompleksne analize, študij singularnosti gladkih mnogoterosti in preslikav pa je pričel René

Thom v 50tih letih dvajsetega stoletja in ta del analize je znan pod imenom *teorija katastrof*.

Matematično povedano je gladka mnogoterost dimenzije n je Hausdorffov, 2-števen topološki prostor, ki izgleda lokalno v okolici vsake točke tako kot n-dimenzionalni evklidski prostor, ti evklidski kosi pa so zlepljeni skupaj z gladkimi difeomorfizmi. Najpreprostejši primeri so krivulje in ploskve, ter seveda višje razsežne ploskve v evklidskih prostorih. Posebej zanimivi so modelni primeri kot so sfere, projektivni prostori, Grassmanove mnogoterosti, vektorski svežnji nad njimi itn. Če jih opremimo z metrikami, ki omogočajo merjenje dolžin in kotov, dobimo razne modelne prostore konstantne ukrivljenosti.

Pojem mnogoterosti se je naravno razvil iz del slavnih matematikov in fizikov kot so bili Newton, Lagrange, Gauss, Riemann, Klein, Poincaré, Einstein, Cartan, de Rham, Chern in mnogi drugi. Analitične pojme in sredstva kot so odvajanje, integriranje, diferencialne enačbe, vektorska polja, diferencialne forme, Riemannova in hermitska metrika idr. lahko naravno posplošimo na gladke mnogoterosti. Opremljene s temi analitičnimi sredstvi so mnogoterosti neobhodna osnova za raziskave na vrsti področij sodobne matematike kot so diferencialna, analitična in algebraična geometrija, diferencialna topologija, teorija Liejevih grup, dinamika, teorija foliacij, itd. Mnogoterosti so tudi ter nepogrešljivo orodje v fiziki, mehaniki, astronomiji in drugih področjih naravoslovja in tehnike.

Knjiga je uvod v teorijo gladkih mnogoterosti in je primerna za uvodni predmet iz tega področja na magisterskem ali doktorskem študiju matematike. Predpostavlja se poznavanje osnov matematične analize in topologije v obsegu predmetov na študijskem programu 1. stopnje Matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Več o teoriji mnogoterosti lahko bralec najde v virih, navedenih v bibliografiji.

Ljubljana, Januar 2021 *Franc Forstnerič*

Vsebina

Poglavje 1
Mnogoterosti: osnovne konstrukcije in primeri

V tem uvodnem poglavju bomo spoznali pojem topološke in gladke mnogoterosti, njihove osnovne lastnosti, preslikave med njimi, konstrukcije novih mnogoterosti iz danih ter nekaj najpomembnejših primerov. Bolj poglobljeno analizo lahko najdemo v vrsti monografij, med njimi Abraham, Marsden in Ratiu [2], Boothby [7], Lee [30, 31], Milnor [33], Narasimhan [37] (slednja obravnava tudi kompleksne mnogoterosti), Warner [42] in drugih. Od zgodovinsko pomembnih virov omenimo de Rhamovo monografijo [8] ter Whitneyeva fundamentalna dela [44, 45, 46]. Knjižica [23] Guillemina in Pollacka podaja elementaren uvod v diferencialno topologijo. Osnove teorije holomorfnih funkcij in kompleksnih mnogoterosti lahko najdemo npr. v Gunning in Rossi [24], Hörmander [27], Narasimhan [37] in drugih. Za teorijo Riemannovih ploskev glej npr. Ahlfors in Sario [4], Donaldson [10], Farkas in Kra [12], Forster [14] in druge.

1.1 Topološke mnogoterosti

1.1.1 Mnogoterosti brez roba, osnovni primeri

Naj bo $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ nenegativno naravno število. Modelna n-dimenzionalna mnogoterost (brez roba) je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1 *Naj bo $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$. Topološki prostor X je n-*razsežna topološka mnogoterost*, $n = \dim X$, če ima naslednje lastnosti.*

(a) *X je Hausdorffov prostor.*

(b) *X je* lokalno evklidski *dimenzije n: za vsako točko $p \in X$ obstajata odprta okolica $U \subset X$ in homeomorfizem $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na neko odprto množico v $\mathbb{R}^n$.*

(c) *X je 2-števen, kar pomeni, da ima števno bazo topologije.*

Iz definicije sledi, da je 0-razsežna mnogoterost končna ali števna množica z diskretno topologijo. Dimenzija mnogoterosti je enolično določena, kar sledi iz naslednjega izreka o invarianci odprtih množic.

Izrek 1.2 (Brouwer 1911) *1. Če je neprazna odprta množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna neki odprti množici $V \subset \mathbb{R}^k$, potem je $k = n$.*

2. Če je neprazna odprta množica $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna neki množici $V \subset \mathbb{R}^n$, potem je V odprta v $\mathbb{R}^n$.

Vsak homeomorfizem $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ kot v točki (b) se imenuje *lokalna karta* na X, inverzna preslikava $\phi^{-1} : U' = \phi(U) \to U$ pa je *lokalna parametrizacija* podmnožice $U \subset X$. Družina $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ lokalnih kart na topološki mnogoterosti X, za katero velja $\bigcup_{j\in J} U_j = X$, se imenuje *topološki atlas* na X.

Ogledali si bomo nekaj osnovnih primerov mnogoterosti.

Primer 1.3 Modelna n-dimenzionalna mnogoterost je evklidski prostor $\mathbb{R}^n$. Vsaka odprta podmnožica $X \subset \mathbb{R}^n$ je mnogoterost; inkluzija $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ je lokalna (in tudi globalna) karta na X.

Primer 1.4 *Sfera dimenzije $n \in \mathbb{N}$:*

$$S^n = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = 1 \right\}. \tag{1.1}$$

Za vsak $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označimo z $U_j^{\pm}$ odprti hemisferi

$$U_j^+ = \{x \in S^n : x_j > 0\}, \qquad U_j^- = \{x \in S^n : x_j < 0\}.$$

Naj bo $\pi_j : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ koordinatna projekcija vzdolž smeri x_j:

$$\pi_j(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

(Strešica na x_j pomeni, da smo to spremenljivko izpustili.) Zožitev projekcije π_j na množici $U_j^{\pm}$ podaja lokalni karti

$$\phi_j^{\pm} = \pi_j\big|_{U_j \pm} : U_j^{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Očitno je $\phi_j^{\pm}(U_j^{\pm})$ enotna krogla

$$\mathbb{B}(0;1) = \mathbb{B}^n(0;1) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y|^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 < 1 \right\}.$$

Inverz $(\phi_j^{\pm})^{-1} : \mathbb{B}(0;1) \to U_j^{\pm}$ je enak

$$(y_1,\dots,y_n) \longmapsto \left(y_1,\dots,y_j,\pm\sqrt{1-\|y\|^2},y_{j+1},\dots,y_n\right).$$

Ker je $\bigcup_{j=0}^n U_j^\pm = S^n$, je tako dobljena družina atlas na S^n.

Primer 1.5 *Sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ s stereografsko projekcijo.* Naj bodo $(x_1,\dots,x_n,u)$ koordinate na $\mathbb{R}^{n+1}$. Označimo z $N=(0,\dots,0,1)$ in $S=(0,\dots,0,-1)$ severni in južni pol sfere. Stereografska projekcija iz N oziroma S na hiperravnino $\{u=0\}\cong\mathbb{R}^n$ nam da karti

$$\phi : S^n\setminus\{N\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \qquad \psi : S^n\setminus\{S\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n,$$

podani z naslednjima formulama:

$$\phi(x_1,\dots,x_n,u) \;=\; \frac{1}{1-u}(x_1,\dots,x_n), \qquad \psi(x_1,\dots,x_n,u) \;=\; \frac{1}{1+u}(x_1,\dots,x_n).$$

Torej imamo na sferi S^n atlas z dvema kartama.

Naloga: preveri, da je unija tega atlasa ter tistega iz prejšnjega primera (primer 1.4) spet atlas na S^n.

Primer 1.6 (Riemannova sfera) Posebej si oglejmo 2-sfero $S^2\subset\mathbb{R}^3_{(x,y,u)}$. Ravnino $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ s koordinatama (x,y) identificirajmo s kompleksno ravnino

$$\mathbb{C} \;=\; \{z=x+\mathrm{i}y : x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Lokalni karti na sferi $S^2=\{(z,u):|z|^2+u^2=1\}$ iz primera 1.5 sta

$$\phi(z,u) \;=\; \frac{z}{1-u}, \qquad \psi(z,u) \;=\; \frac{z}{1+u}.$$

Prva je stereografska projekcija sfere na ravnino iz severnega pola $N=(0,0,1)$, druga pa iz južnega pola $S=(0,0,-1)$. Odtod sledi $\overline{\psi}(z,u)=\frac{\bar z}{1+u}$ in

$$\phi(z,u)\cdot\overline{\psi}(z,u) \;=\; \frac{z\bar z}{1-u^2} \;=\; 1,$$

ker je $|z|^2+u^2=1$. Če pišemo $\zeta=\overline{\psi}(z,u)\in\mathbb{C}$, je $(z,u)=\overline{\psi}^{-1}(\zeta)$ in iz zgornje enačbe sledi $\phi(\overline{\psi}^{-1}(\zeta))\zeta=1$. Prehodna preslikava med kartama ϕ in $\overline{\psi}$ je torej enaka

$$\phi\circ\overline{\psi}^{-1}(\zeta) \;=\; \frac{1}{\zeta}, \qquad \zeta\in\mathbb{C}^* \;=\; \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Ker je prehodna preslikava biholomorfna, karti $(S^2\setminus\{N\},\phi)$, $(S^2\setminus\{S\},\overline{\psi})$ definirata *kompleksni atlas* na S^2 (glej razdelek 1.2.6). Sfera S^2, opremljena s tem kompleksnim atlasom, se imenuje *Riemannova sfera*. To je najpreprostejša kompaktna Riemannova ploskev.

Primer 1.7 (Hiperploskve v evklidskem prostoru) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Množica

$$X_c \;=\; \{x \in D : f(x) = c\} \;=\; f^{-1}(c)$$

se imenuje *nivojnica* funkcije f. Primer nivojnic so sfere:

$$S^n_r \;=\; \left\{ x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^{n} x_j^2 = r^2 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Izrek o implicitni funciji (glej razdelek 1.6) pove, da je nivojnica X_c podmnogoterost kodimenzije 1 (hiperploskev), če je število c regularna vrednost f, to je, X_c ne vsebuje nobene kritične točke f. Po Sardovem izreku 4.5 to velja za skoraj vsako število; natančneje, množica kritičnih vrednosti gladke funkcije ima mero nič.

1.1.2 Mnogoterosti z robom

Sedaj bomo uvedli še pojem mnogoterosti z robom. Modelni prostor je v tem primeru zaprta zgornji polprostor:

$$\mathbb{H}^n \;=\; \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\big\}. \tag{1.2}$$

Njegov *rob* je hiperravnina

$$\partial \mathbb{H}^n \;=\; \{x \in \mathbb{H} : x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Definicija 1.8 *Topološki prostor X je* topološka n-dimenzionalna mnogoterost z robom, *če je X Hausdorffov, 2-števen in ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in homeomorfizem $\phi : U \to U'$ na neko odprto množico $U' \subset \mathbb{H}^n$.*

Točke $p \in X$ mnogoterosti z robom klasificiramo na *notranje* in *robne* točke. Naj bo $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ lokalna karta na X v neki okolici p. Imamo naslednji dve možnosti:

1. primer: $\phi(p) \in \mathring{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{H}^n : x_n > 0\}$. Če okolico U točke p primerno zmanjšamo, velja $\phi(U) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n$, zato je $\phi(U)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Taki točki $p \in X$ pravimo *notranja točka* mnogoterosti X.

2. primer: $\phi(p) \in \partial \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} : x_n = 0\}$. Taki točki pravimo *robna točka* mnogoterosti X.

Klasifikacija točk na notranje in robne je neodvisna od izbora lokalne karte, kar sledi iz Brouwerjevega izreka (glej izrek 1.2). Odprta okolica robne točke $q \in \partial \mathbb{H}^n$ v $\mathbb{H}^n$ namreč ni odprta v ambientnem prostoru $\mathbb{R}^n$.

Naj bosta $\phi : U \to U' \subset \mathbb{H}^n$ in $\psi : U \to V' \subset \mathbb{H}^n$ dve karti na mnogoterosti z robom X okrog iste točke $p \in X$. Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$\theta \;=\; \phi \circ \psi^{-1} : V' \xrightarrow{\cong} U'.$$

Iz Brouwerjevega izreka sledi, da θ preslika $V' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ na $U' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ ter $V' \cap \partial\mathbb{H}^n$ na $U' \cap \partial\mathbb{H}^n$. (Če je ϕ difeomorfizem, je to očitna posledica izreka o inverzni preslikavi.) Če je točka $p \in X$ notranja glede na ψ, je torej notranja tudi glede na ϕ, in če je p robna glede na ψ, je robna tudi glede na ϕ.

Množico vseh notranjih točk mnogoterosti X označimo z $\mathring{X}$ in jo imenujemo *notranjost mnogoterosti*, množico vseh njenih robnih točk pa z ∂X in jo imenujemo *rob mnogoterosti* X. Pogosto se rob mnogoterosti označuje tudi z bX (iz angleške besede *boundary*).

Naj bo $p \in \partial X$ robna točka in (U, ϕ) lokalna karta s $p \in U$. Njena zožitev

$$\phi|_{U \cap \partial X} : U \cap \partial X \longrightarrow U' \cap \partial\mathbb{H}^n$$

je lokalna karta na ∂X z vrednostmi v $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Odtod sledi

Posledica 1.9 *Če je X topološka mnogoterost dimenzije n z robom, potem je njen rob ∂X topološka mnogoterost dimenzije $n-1$ brez roba.*

Primer 1.10 Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gladka funkcija in $c \in \mathbb{R}$ neka njena *regularna vrednost*. To pomeni, da je diferencial $df_x \neq 0$ neizrojen v poljubni točki x na nivojnici $f(x) = c$. Tedaj je množica

$$X \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$$

n-razsežna mnogoterost z robom $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$. (Glej izrek o implicitni funkciji, razdelek 1.6.)

1.1.3 Topološke lastnosti mnogoterosti

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj bistvenih topoloških lastnosti mnogoterosti.

Izrek 1.11 *Vsaka topološka mnogoterost je:*

(a) lokalno povezana s potmi. Če je mnogoterost povezana, je tudi povezanan s potmi;
(b) lokalno kompaktna (vsaka točka ima kompaktno okolico);
(c) števno kompaktna (unija števne družine kompaktnih množic);
(d) normalen in T_4 topološki prostor;
(e) metrizabilna (topologija na X je inducirana z metriko);
(f) parakompaktna.

Dokaz Lastnosti (a) in (b) sta očitni posledici definicije.

Lastnost (c) sledi iz (b) ter 2-števnosti, saj ima X števno bazo odprtih množic $\{V_i : i \in \mathscr{I}\}$, tako da je $\overline{V}_i$ kompakt. Množice $K_j = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_j$ sestavljajo naraščajoče zaporedje kompaktov, ki izčrpajo X:

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \ = \ X.$$

S prehodom na podzaporedje lahko dosežemo, da velja $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ za vsak $j = 1,2,\ldots$; takemu zaporedju pravimo *normalno izčrpanje* mnogoterosti X.

Lastnost (d) sledi iz dejstva, da je vsak lokalno kompakten in števno kompakten T_1 prostor *normalen*, to je, vsak par disjunktnih zaprtih podmnožic v X lahko ločimo s parom odprtih okolic. (Po Urysohnovi lemi lahko vsak tak par ločimo tudi z zvezno funkcijo.) Prostor je T_4, če je Hausdorffov in normalen (ekvivalentno, če je T_1 in normalen).

Lastnost (e) sledi iz (d) in naslednjega *Urysohnovega metrizacijskega izreka* (glej npr. Kelley [28, str. 125]).

Izrek 1.12 *Vsak regularen (torej tudi vsak normalen) 2-števen Hausdorffov topološki prostor je homeomorfen podprostoru v Hilbertovi kocki $H = [0,1]^\infty$ (t.j. kartezični produkt števne družine kopij intervala $[0,1] \subset \mathbb{R}$).*

Funkcija $d : H \times H \to \mathbb{R}_+$, definirana s predpisom

$$d\big((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)\big) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}|x_j - y_j|,$$

je metrika na $H = [0,1]^\infty$. Njena zožitev na podmnožico X je metrika na X.

Topološki prostor X se imenuje *parakompakten*, če za vsako odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_i\}$ obstaja neko finejše (včrtano) lokalno končno pokritje $\mathscr{V} = \{V_j\}$. To pomeni:

- za vsak j obstaja $i = i(j)$, tako da je $V_j \subseteq U_i$, in
- vsaka točka $p \in X$ ima okolico $U \subset X$, za katero je presek $U \cap V_j$ neprazen za največ končno različnih indeksov j.

Za dokaz implikacije (e) $\Rightarrow$ (f) glej npr. Kelley [28, str. 160]. Več o separacijskih lastnostih lahko bralec najde tudi na

`https://en.wikipedia.org/wiki/Separation_axiom`

Opomba 1.13 *Za lokalno evklidske Hausdorffove topološke prostore so naslednje lastnosti med seboj ekvivalentne:*

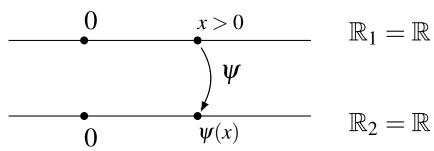
- 2-*števnost,*
- *števna kompaktnost,*
- *metrizabilnost,*
- *parakompaktnost.*

Več o topoloških mnogoterostih lahko najdemo v monografiji J. Lee [30] kot tudi v mnogih drugih virih.

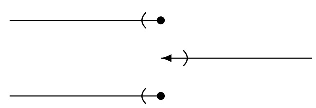
1.1.4 Posplošene mnogoterosti

Ne-Hausdorffove mnogoterosti. Če iz definicije mnogoterosti izpustimo Hausdorffovo lastnost, dobimo t.i. *ne-Hausdorffovo mnogoterost*; to je topološki prostor, ki je lokalno evklidski in 2-števen. Primeri se naravno pojavijo v teoriji foliacij in drugih področjih.

Oglejmo si preprost primer. Naj bo $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ neka zvezna strogo naraščajoča funkcija, $\psi(0) = 0$. Lahko vzamemo na primer $\psi(x) = x$.



Definiramo ekvivalenčno relacijo z naslednjim predpisom: če je $x \in \mathbb{R}_1$ in $y \in \mathbb{R}_2$, potem je $x \sim y$ natanko tedaj, ko je $x > 0$ in $y = \psi(x) > 0$. Kvocientni prostor $X = (\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2)/\sim$ je ne-Hausdorffova enorazsežna mnogoterost, ki jo ponazarja naslednja ilustracija. Različni točki nad 0 nimata disjunktnih okolic.



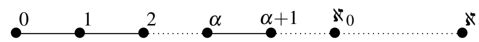
Primere ne-Hausdorffovih mnogoterosti najdemo tudi v prostorih zarodkov zveznih funkcij. Naj bo X topološka mnogoterost. *Zarodek funkcije* v točki $x \in X$ je določen s parom (U, f), kjer je $U \subset X$ odprta množica, ki vsebuje točko x in je $f : U \to \mathbb{R}$ funkcija. Dva para (U, f) in (V, g) sta ekvivalentna (oziroma določata isti zarodek) v točki x natanko tedaj, ko obstaja okolica $x \in W \subset U \cap V$, tako da je $f|_W = g|_W$. Zarodek funkcije f v točki x označimo $[f]_x$.

Oglejmo si naslednji par gladkih funkcij na $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \\
g(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Očitno velja $[f]_x = [g]_x$ natanko tedaj, ko je $x < 0$. Množica vseh zarodkov $\{[f]_x, [g]_x : x \in \mathbb{R}\}$ je ne-Hausdorffova 1-dimenzionalna mnogoterost.

Ne-parakompaktne mnogoterosti. Iz definicije mnogoterosti lahko izpustimo tudi aksiom 2-števnosti. Primer take mnogoterosti je *dolga premica*, ki jo dobimo takole. Vzamemo vsa ordinalna števila do števila $\aleph$ (slednji predstavlja množico vseh realnih števil $\mathbb{R}$). Za vsako ordinalno število α obstaja njegov naslednik $\alpha+1$. Med njiju vstavimo interval $[\alpha, \alpha+1]$, homeomorfen intervalu $[0,1]$.



Unija vseh intervalov $[\alpha, \alpha+1]$ po vseh ordinalnih številih do $\aleph$ je enodimenzionalna mnogoterost, ki ni 2-števna.

Seveda lahko nadaljujemo tudi do višjih ordinalnih števil in dobimo dolgo premico, katere (najmanjša) baza topologije je poljubne kardinalnosti.

1.2 Gladke in kompleksne mnogoterosti

V tem razdelku bomo uvedli pojem gladkih, realno analitičnih in kompleksnih mnogoterosti. Najprej si oglejmo ustrezne razrede funkcij in preslikav.

1.2.1 Gladke funkcije in preslikave

Naj bo D neprazna odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Za vsako število $r \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ označimo s $\mathscr{C}^r(D)$ prostor vseh r-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D; $\mathscr{C}^0(D) = \mathscr{C}(D)$ je prostor vseh zveznih funkcij na D. Očitno velja

$$\mathscr{C}^0(D) \supset \mathscr{C}^1(D) \supset \mathscr{C}^2(D) \supset \ldots \supset \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathscr{C}^r(D) \;=\; \mathscr{C}^\infty(D),$$

pri čemer so vse inkluzije stroge.

Funkcija f na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je *realno analitična*, če ima vsaka točka $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ okolico $U \subset \mathbb{R}^n$, na kateri je f predstavljena z vsoto neke konvergentne potenčne vrste:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n}(x_1-a_1)^{k_1}\cdots(x_n-a_n)^{k_n} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^n} c_k(x-a)^k.$$

Seveda je to ravno Taylorjeva vrsta funkcije f v točki a.

$\mathscr{C}^\omega(D)$ označuje prostor vseh realno analitičnih funkcij. Velja $\mathscr{C}^\omega(D) \subsetneq \mathscr{C}^\infty(D)$.

Vsi navedeni prostori so neskončno razsežni realni vektorski prostori (vsota funkcij ter produkt s skalarjem) ter algebre (produkt funkcij). Pomebno je tudi, da je kompozicija dveh $\mathscr{C}^r$ preslikav spet preslikava razreda $\mathscr{C}^r$.

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^n$. Preslikava $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ je razreda $\mathscr{C}^r$ za $r \in \{1, 2, \ldots, \infty, \omega\}$, če so vse njene komponentne funkcije $f_1, \ldots, f_m$ tega razreda. *Jacobijeva matrika* preslikave f je $m \times n$ matrika

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

katere elementi so parcialni odvodi komponent f_i po spremenljivkah x_j. Če je $n = m$, se determinanta $\det Jf$ Jacobijeve matrike imenuje *Jacobijeva determinanta*.

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^n$. Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$ se imenuje *difeomorfizem* (ali natančneje $\mathscr{C}^r$ *difeomorfizem*) na svojo sliko $D' = f(D) \subset \mathbb{R}^n$, če je bijektivna in je inverzna preslikava $f^{-1} : D' \to D$ tudi razreda $\mathscr{C}^r$. Množico vseh $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmov $D \to D'$ označimo z $\mathrm{Diff}^r(D, D')$.

Po *izreku o inverzni preslikavi* je homeomorfizem $f : D \to D'$ razreda $\mathscr{C}^r$ tudi $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem natanko tedaj, ko je $\det Jf(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$. Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$, ki ni nujno injektivna in zadošča pogoju $\det Jf(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$, se imenuje *lokalni difeomorfizem*.

1.2.2 Holomorfne funkcije in preslikave

Modelna n-dimenzionalna kompleksna mnogoterost je kompleksen evklidski prostor $\mathbb{C}^n$, to je kartezični produkt n kopij kompleksne ravnine $\mathbb{C}$. Naj bodo $z = (z_1, \ldots, z_n)$ kompleksne koordinate na $\mathbb{C}^n$:

$$z_j = x_j + \mathrm{i} y_j, \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Za vsako diferenciabilno kompleksno funkcijo $f = u + \mathrm{i}v : D \to \mathbb{C}$ na domeni $D \subset \mathbb{C}^n$ je diferencial v poljubni točki $a \in D$,

$$df_a \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)\, dy_j,$$

realno linearna preslikava $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Razcepimo ga na vsoto $\mathbb{C}$-linearnega dela ∂f in $\mathbb{C}$-antilinearnega dela $\overline{\partial} f$:

$$df \;=\; \partial f + \overline{\partial} f \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j. \tag{1.3}$$

Pri tem je $dz_j = dx_j + \mathrm{i}\, dy_j$, $d\bar{z}_j = dx_j - \mathrm{i} dy_j$ in

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right). \tag{1.4}$$

Definicija 1.14 *Diferenciabilna funkcija* $f : D \to \mathbb{C}$ *na domeni* $D \subset \mathbb{C}^n$ *je* holomorfna*, če zadošča naslednjim ekvivalentnim lastnostim v poljubni točki* $a \in D$*:*

- *diferencial* $df_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *je* $\mathbb{C}$*-linearna preslikava.*
- $df = \partial f$.
- $\overline{\partial} f = 0$.

V primeru $n = 1$ je diferencial df_a kompleksno linearen natanko tedaj, ko je f *kompleksno odvedljiva* v točki a, to je, ko obstaja njen kompleksni odvod

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Diferencial je tedaj enak $df_a(h) = f'(a)h$, $h \in \mathbb{C}$. Pišemo

$$df_a = f'(a)\,dz = f'(a)(dx + \mathrm{i}\,dy).$$

V poljubni dimenziji je pogoj $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) = 0$ ekvivalenten temu, da je funkcija f parcialno kompleksno odvedljiva na spremenljivko z_j v tej točki; torej da je funkcija

$$\zeta \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, \zeta, a_{j+1}, \ldots)$$

kompleksno odvedljiva pri $\zeta = a_j$.
V splošnem je funkcija $f(z_1, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko velja

$$\overline{\partial} f = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Pišimo $f = u + \mathrm{i}v$, kjer sta u in v realni funkciji. Enačba $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ je ekvivalentna Cauchy-Riemannovemu sistemu

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{1.5}$$

Najpreprostejši primeri holomorfnih funkcij na (odprtih podmnožicah) $\mathbb{C}^n$ so polinomi v $z_1, \ldots, z_n$ (holomorfni polinomi) ter racionalne funkcije $\frac{P}{Q}$, kjer sta P, Q polinoma; slednja je holomorfna na množici $Q \neq 0$.
Po izreku Hartogsa je funkcija $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ holomorfna natanko tedaj, ko je *separatno holomorfna* v smislu, da je za vsako točko $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ in za vsak $j = 1, \ldots, n$ funkcija

$$\zeta \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

holomorfna na množici $\{\zeta \in \mathbb{C} : (a_1, \ldots, a_{j-1}, \zeta, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}$. Netrivialno je videti, da je vsaka separatno holomorfna funkcija zvezna. (Če predpostavimo diferenciabilnost, je seveda funkcija avtomatično zvezna.) Iz separatne holomorfnosti ter zveznosti dobimo s pomočjo n-kratne uporabe običajne Cauchyjeve integralne formule naslednjo *Cauchyjevo integralno formulo* na vsakem polidisku

$$P(a,r) \;=\; \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \quad r = (r_1, \ldots, r_n) \in (0, \infty)^n,$$

z zaprtjem $\overline{P(a,r)} \subset D$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) \;=\; \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

Ta formula velja, če je f zvezna na zaprtem polidisku $\overline{P(a,r)}$ in holomorfna na odprtem polidisku $P(a,r)$.

Z razvojem n-ternega *Cauchyjevega jedra*

$$C(z, \zeta) \;=\; \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}$$

v geometrijsko vrsto okrog točke a in člensko integracijo dobimo razvoj holomorfne funkcije v konvergentno potenčno vrsto na poljubnem polidisku $P(a,r) \subset D$:

$$f(z) \;=\; \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1, \ldots, k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \cdots (z_n - a_n)^{k_n} \;=\; \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} c_k (z - a)^k.$$

Pomembno je, da zgornja vrsta ne vsebuje nobenih členov oblike $\overline{z_j - a_j}$.

Označimo z $\mathscr{O}(D)$ algebro vseh holomorfnih funkcij na domeni $D \subset \mathbb{C}^n$. Standardna oznaka $\mathscr{O}$ je po japonskem matematiku z imenom *Kiyoshi Oka*, enem od pionirjev kompleksne analize v več spremenljivkah. Algebra $\mathscr{O}(D)$ ima sorodne lastnosti kot v primeru $D \subset \mathbb{C}$ (to je, holomorfne funkcije ene spremenljivke), so pa tudi nekatere pomembne razlike. Ena od njih je fenomen analitičnega nadaljevanja. Za poljuben $n > 1$ imamo pare domen $D \subsetneq D'$ v $\mathbb{C}^n$ z lastnostjo, da je vsaka holomorfna funkcija na D zožitev neke holomorfne funkcije na D'; skratka, zožitvena preslikava $\mathscr{O}(D') \ni f \mapsto f|_D \in \mathscr{O}(D)$ je surjetivna.

Če je D domena v $\mathbb{C}^n$, je zvezna preslikava $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{C}^m$ *holomorfna*, če so vse njene komponentne funkcije $f_1, \ldots, f_m$ holomorfne. *Kompleksna Jacobijeva matrika* preslikave f je $m \times n$ matrika

$$J_{\mathbb{C}} f(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z) \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

parcialnih odvodov komponent f_i po kompleksnih spremenljivkah z_j. Če je $n = m$, se determinanta kompleksne Jacobijeve matrike $\det J_{\mathbb{C}} f$ imenuje *kompleksna Jacobijeva determinanta*.

Naloga 1.15 Naj bo D domena v $\mathbb{C}^n$ in $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{C}^n$ holomorfna preslikava. Če identificiramo $\mathbb{C}^n$ z $\mathbb{R}^{2n}$ na standarden način, tako da kompleksni koordinati $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j$, priredimo realne koordinate $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ na $\mathbb{R}^{2n}$, lahko f identiciramo s preslikavo $F = (F_1, \ldots, F_{2n})$. Pokaži, da je

$$\det JF(z) \;=\; |\det J_{\mathbb{C}} f(z)|^2, \qquad z \in D,$$

kjer je $JF(z)$ realna $2n \times 2n$ Jacobijeva matrika preslikave F v točki $z = x + \mathrm{i}y$ in je $J_{\mathbb{C}} f(z) = (\partial f_i / \partial z_j)$ kompleksna Jacobijeva matrika preslikave f. $\square$

Preslikava $f : D \to \mathbb{C}^n$ z domene $D \subset \mathbb{C}^n$ se imenuje *biholomorfna* na svojo sliko $f(D) = D' \subset \mathbb{C}^n$, če je njen inverz $f^{-1} : D' \to D$ tudi holomorfna preslikava. Po izreku o inverzni preslikavi je inverz f^{-1} holomorfen natanko tedaj, ko je kompleksna Jacobijeva determinanta $J_{\mathbb{C}} f(z)$ različna od 0 v vsaki točki $z \in D$. V tem primeru velja naslednji močnejši rezultat:

Izrek 1.16 *Injektivna holomorfna preslikava $f : D \to \mathbb{C}^n$ z domene $D \subset \mathbb{C}^n$ je biholomorfna na svojo sliko.*

Za gladke ali realno analitične preslikave analog tega izreka ne velja, kar pokaže primer funkcije $f(x) = x^3$, katere inverz $\sqrt[3]{x}$ ni odvedljiva funkcija pri $x = 0$.
Holomorfna (ne nujno injektivna) preslikava $f : D \to \mathbb{C}^n$ z domene $D \subset \mathbb{C}^n$ se imenuje *lokalno biholomorfna*, če je $J_{\mathbb{C}} f(z) \neq 0$ za vsak $z \in D$. Torej ima vsaka točka $z \in D$ okolico $U \subset D$, tako da je $f|_U : U \to f(U)$ biholomorfna. Biholomorfna preslikava domene D same nase se imenuje *holomorfen avtomorfizem* domene D; množico vseh holomorfnih avtomorfizmov označimo z $\mathrm{Aut}(D)$.

1.2.3 Gladke mnogoterosti brez roba

Naj bo X topološka mnogoterost brez roba in $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ atlas na X. Pišimo $U_{ij} := U_i \cap U_j$.

Definicija 1.17 *Topološki atlas $\mathscr{U} = \{(U_j, \phi_j) : j \in J\}$ na topološki mnogoterosti X se imenuje $\mathscr{C}^r$-atlas za nek $r \in \{1, \ldots, \infty, \omega\}$, če je za vsak par indeksov $i, j \in J$ prehodna preslikava*

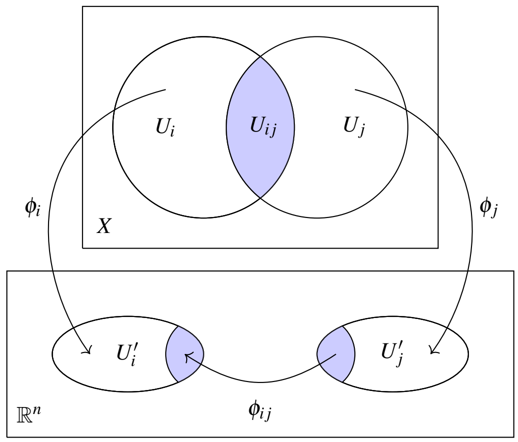
$$\phi_{ij} \;=\; \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_{ij}) \longrightarrow \phi_i(U_{ij})$$

difeomorfizem razreda $\mathscr{C}^r$.

Če velja pogoj v definiciji za nek par kart (U_i, ϕ_i), (U_j, ϕ_j), potem pravimo, da sta ti dve karti med seboj *$\mathscr{C}^r$-kompatibilni* (ali skladni). V primeru $U_{ij} = \varnothing$ je pogoj na prazno izpolnjen. Družina prehodnih preslikav očitno zadošča naslednjim trem pogojem na ustreznih domenah:

- $\phi_{ii} = \mathrm{Id}$;
- $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} = \mathrm{Id}$ (ekvivalentno, $\phi_{ij}^{-1} = \phi_{ji}$);
- $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = \mathrm{Id}$ (ekvivalentno, $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$).

Družina $\{\phi_{ij}\}$ s temi lastnostmi se imenuje *1-kocikel difeomorfizmov*.



Definicija 1.18 *Dva $\mathscr{C}^r$ atlasa $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ ter $\mathscr{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ na topološki mnogoterosti X sta $\mathscr{C}^r$* ekvivalentna *(ali $\mathscr{C}^r$* kompatibilna*), če je njuna unija $\mathscr{U} \cup \mathscr{V}$ spet $\mathscr{C}^r$ atlas.*

Očitno sta atlasa $\mathscr{U}$ in $\mathscr{V}$ ekvivalentna natanko tedaj, ko je vsaka karta $(U_i, \phi_i) \in \mathscr{U}$ kompatibilna z vsako karto $(V_j, \psi_j) \in \mathscr{V}$. Ni težko videti, da je $\mathscr{C}^r$-ekvivalenca ekvivalenčna relacija na množici vseh $\mathscr{C}^r$ atlasov na dani mnogoterosti X.

Definicija 1.19 *Mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ je topološka mnogoterost X skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda $\mathscr{C}^r$-atlasov. Če je $r = \infty$, se X imenuje* gladka mnogoterost.

Ekvivalentno, $\mathscr{C}^r$ struktura na X je določena z izborom maksimalnega $\mathscr{C}^r$-atlasa na X. Tak atlas je unija vseh $\mathscr{C}^r$ atlasov v izbranem ekvivalenčnem razredu.

Naloga 1.20 Naj bo $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ atlas na n-sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definiran s stereografsko projekcijo. (Glej primer 1.5 na str. 3.) Pokaži, da ta atlas definira na S^n isto realno analitično strukturo kot atlas $\{(U_j^\pm, \phi_j^\pm), j = 0, \dots, n\}$ iz primera 1.4 na str. 2.

1.2.4 Gladke mnogoterosti z robom

Definicijo 1.17 lahko uporabimo tudi za atlase na topoloških mnogoterostih z robom. Tako dobimo pojem $\mathscr{C}^r$ *mnogoterosti z robom*.

Prehodna preslikava ϕ_{ij} med poljubnima dvema kartama v danem $\mathscr{C}^r$ atlasu je difeomorfizem med odprtimi podmnožicami v zaprtem polprostoru

$$\mathbb{H}^n \;=\; \{y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n : y_n \geq 0\}.$$

Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je difeomorfizem odprta preslikava, kar pomeni, da je slika odprte množice v $\mathbb{R}^n$ spet odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Torej ϕ_{ij} preslika notranjost $\mathring{V} = V\cap\{y_n>0\}$ v notranjost $\phi_{ij}(V)\cap\{y_n>0\}$ ter rob $V\cap\{y_n=0\}$ v rob $\phi_{ij}(V)\cap\{y_n=0\}$. (To velja tudi v primeru homeomorfizmov, kot smo videli v podrazdelku 1.1.2 z uporabo Brouwerjevega izreka o invarianci odprtih množic.)

Naj bo $\mathscr{U}=\{(U_i,\phi_i)\}$ nek $\mathscr{C}^r$-atlas na mnogoterosti z robom $(X^n,\partial X)$. Družina vseh kart na robu ∂X oblike

$$(U_i\cap\partial X, \phi_i|_{U_i\cap\partial X}), \quad (U_i,\phi_i)\in\mathscr{U},$$

kjer je

$$\phi_i|_{U_i\cap\partial X} : \underbrace{U_i\cap\partial X}_{\text{odprta v } \partial X} \longrightarrow \underbrace{\phi_i(U_i)}_{\subset\mathbb{H}^n}\cap\underbrace{\{y_n=0\}}_{=\mathbb{R}^{n-1}}$$

je $\mathscr{C}^r$ atlas na ∂X, ki definira na ∂X strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti dimenzije $n-1$. Zapišimo to ugotovitev.

Izrek 1.21 *Če je X n-razsežna mnogoterost z robom razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty,\omega\}$, potem je njen rob ∂X $(n-1)$-razsežna mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ brez roba.*

Primer 1.22 Naj bo $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ gladka funkcija in

$$X \;=\; \{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x)\leq 0\}\neq\varnothing.$$

Če je 0 regularna vrednost funkcije ρ, kar pomeni da je $d\rho(x)\neq 0$ za vsak $x\in\rho^{-1}(0)$, potem je X n-dimenzionalna mnogoterost (zaprta domena v $\mathbb{R}^n$) z gladkim robom

$$\partial X \;=\; \{x\in\mathbb{R}^n : \rho(x)=0\}.$$

Lokalne karte v robnih točkah $x\in\partial X$ dobimo z izrekom o implicitni funkciji. □

Analog zgornjega primera velja, če ambientni prostor $\mathbb{R}^n$ nadomestimo s poljubno gladko n-razsežno mnogoterostjo. V obratni smeri velja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali, dasiravno dokaz ni posebej težak. Pojem difeomorfizma mnogoterosti je uveden v razdelku 1.4.

Izrek 1.23 *Vsaka kompaktna mnogoterost z robom razreda $\mathscr{C}^r$ $(r\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty,\omega\})$ je $\mathscr{C}^r$ difeomorfna neki domeni s $\mathscr{C}^r$ robom v mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ brez roba.*

1.2.5 Orientabilne mnogoterosti

Orientabilne mnogoterosti so zelo pomemben razred mnogoterosti, še posebej v teoriji integracije diferencialnih form, ki ga bomo obravnavali v poglavju 6. Pojem orientabilnosti lahko definiramo na topoloških mnogoterostih. Mi se bomo omejeli na gladke mnogoterosti, kjer je definicija preprostejša.

Definicija 1.24 *Atlas* $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ *razreda* $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 1)$ *na mnogoterosti* X *je* orientiran*, če vse prehodne preslikave* $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ *ohranjajo orientacijo, to je, Jacobijeva determinanta* $\det(J\phi_{ij}) > 0$ *je pozitivna v vsaki točki.*

Mnogoterost X *je* orientabilna*, če ima orientiran atlas; v nasprotnem primeru je* neorientabilna*.*

Orientirana mnogoterost *je orientabilna mnogoterost skupaj z izborom orientacije, ki jo določa nek orientiran atlas.*

Če je mnogoterost X povezana in orientabilna, potem ima natanko dve orientaciji. Če je $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ orientiran atlas na X, dobimo orientiran atlas $\mathscr{V} = \{(U_i, \psi_i)\}$ z nasprotno orientacijo npr. tako, da v vsaki karti $\phi_i = (\phi_{i,1}, \ldots, \phi_{i,n})$ iz atlasa $\mathscr{U}$ spremenimo znak n-te komponente, torej vzamemo $\psi_i = (\phi_{i,1}, \ldots, \phi_{i,n-1}, -\phi_{i,n})$. Prehodna preslikava med ϕ_i in ψ_i je tedaj $\phi_i \circ \psi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ z Jacobijevko -1 v vsaki točki.

Najpreprostejša primera neorientabilne mnogoterosti sta Möbiusov trak in projektivna ravnina. Prvega dobimo npr. tako, da v kvadratu $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ identificiramo vsako točko $(-1, y)$ s točko $(+1, -y)$ za vsak $y \in [-1, +1]$. To pomeni, da zlepimo levo stranico kvadrata z desno stranico v nasprotni smeti. Dobljeni trak ima samo eno stran in njegov rob je sklenjena krivulja (krožnica), sestavljena iz spodnje in zgornje stranice kvadrata, ki sta med seboj staknjeni v krajiščih.

Drug osnovni primer neorientabilne mnogoterosti (ploskve) je realna projektivna ravnina $\mathbb{RP}^2$, ki jo lahko predstavimo kot kvocientni prostor 2-sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ pri identifikaciji točke $x \in S^2$ z njej antipodno točko $-x$. (Topološko dobimo $\mathbb{RP}^2$ tudi tako, da nalepimo na Möbiusov trak disk vzdolž njegove robne krivulje.)

Podobno dobimo realen projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$ z identifikacijo antipodnih točk na sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (Za $n = 1$ je $\mathbb{RP}^1$ krožnica S^1.)

Izkaže se, da je realen projektivni n-prostor $\mathbb{RP}^n$ orientabilen za lihe vrednosti n in neorientabilen za sode vrednosti n.

Tretji primer neorientabilne ploskve je *Kleinova steklenica* K, ki jo dobimo tako, da v kvadratu $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ zlepimo levo in desno stranico v nasprotni smeri (kot pri Möbiusovem traku), spodno in zgornjo stranico pa zlepimo v isti smeri, torej identificiramo $(x, -1)$ z $(x, +1)$ za vsak $x \in [-1, 1]$. Topološko gledano je to isto kot da zlepimo dva Möbiusova trakova vzdolž njunih robnih krivulj.

Projektivne ravnine $\mathbb{RP}^2$ in Kleinove steklenice, kot tudi ostalih kompaktnih neorientabilnih ploskev, ne moremo predstaviti kot vložene ploskve (brez samopresečišč) v $\mathbb{R}^3$, lahko pa jih na tak način predstavimo v $\mathbb{R}^4$. Po drugi strani lahko vsako orientabilno ploskev vložimo v $\mathbb{R}^3$.

Pojma orientabilnosti in orientiranosti lahko uvedemo tudi za topološke mnogoterosti s tem, da opredelimo, kdaj homeomorfizem $\phi : U \to \phi(U)$ neke odprte povezane množice $U \subset \mathbb{R}^n$ na svojo sliko ohranja orientacijo. Možna je povsem homološka definicija. Na primer, če je M povezana sklenjena topološka n-mnogoterost, je M orientabilna natanko tedaj, ko je njena n-ta homološka grupa $H_n(M,\mathbb{Z})$ izomorfna grupi $\mathbb{Z}$; orientacija na M ustreza izbiri generatorja te grupe. Za podrobnosti in definicijo orientabilnosti nekompaktnih topoloških mnogoterosti glej npr. Hatcher [26].

Pomemben je naslednji rezultat. Krovne prostore bomo obravnavali v razdelku 1.8.

Izrek 1.25 *Vsaka neorientabilna povezana mnogoterost M razreda $\mathscr{C}^r$ ima dvolisten $\mathscr{C}^r$ krov $\pi : \widetilde{M} \to M$, katerega totalni prostor $\widetilde{M}$ je orientabilna mnogoterost.*

1.2.6 Kompleksne mnogoterosti

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ z

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \rightsquigarrow (x_1 + \mathrm{i}y_1, \ldots, x_n + \mathrm{i}y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Kompleksna struktura na topološki mnogoterosti X^{2n} je podana z atlasom

$$\mathscr{U} \;=\; \{(U_i, \phi_i) : i \in \mathscr{I}\}, \qquad \phi_i : U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^{2n} \;=\; \mathbb{C}^n,$$

tako da so vse prehodne preslikave $\phi_{ij} : \phi_j(U_{ij}) \to \phi_i(U_{ij})$ biholomorfne.

Definicija 1.26 *Kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je topološka mnogoterost X realne dimenzije $2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture (ekvivalentno, z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X).*

Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X$, torej je

$$\dim_{\mathbb{R}} X \;=\; 2 \dim_{\mathbb{C}} X.$$

Kompleksna mnogoterost z atlasom, ki ima za prehodne preslikave racionalne funkcije, se imenuje *kompleksno algebraična mnogoterost*.

Iz naloge 1.15 vidimo, da vsaka biholomorfna preslikava ohranja orientacijo, zato je vsaka kompleksna mnogoterost orientabilna. (Glej definicijo 1.24 za pojem orientabilnosti in orientacije mnogoterosti.)

1.3 Primeri in konstrukcije mnogoterosti

1.3.1 Riemannove ploskve

Riemannova ploskev je ploskev, torej 2-razsežna mnogoterost, skupaj z izborom kompleksne strukture. Drugače povedano, Riemannova ploskev je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1. Najpreprostejši primeri so domene v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$.

Najpreprostejša kompaktna Riemannova ploskev je *Riemannova sfera* (glej primer 1.6 na str. 3). To je topološka 2-sfera $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (kompaktifikacija ravnine $\mathbb{C}$ z eno točko), opremljena s kompleksno strukturo, ki jo dobimo npr. s pomočjo stereografske projekcije enotne sfere v $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$ v primeru 1.6.

Riemann–Koebejev izrek pove, da je vsaka povezana in enostavno povezana Riemannova ploskev biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev S^2 (Riemannova sfera), $\mathbb{C}$, ali $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (Glej izrek 1.111 na str. 61.)

Vsaka Riemannova ploskev X je holomorfen kvocient ene od zgornjih treh ploskev po neki diskretni grupi holomorfnih avtomorfizmov. (Pojem kvocientne mnogoterosti po diskretni grupi bomo obravnavali v razdelku **??**.) Velika večina Riemannovih ploskev je kvocient diska Δ.

1.3.2 Kartezični produkt mnogoterosti

Če sta X^n in Y^m mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$, ima kartezični produkt $X \times Y$ naravno strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterost dimenzije $n+m$, ki jo dobimo iz kartezičnih produktov kart na obeh mnogoterostih.

Izberimo $\mathscr{C}^r$ atlas $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X in $\mathscr{C}^r$ atlas $\mathscr{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ na Y. *Produktni atlas* na $X \times Y$ je $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}$, kjer je preslikava

$$\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

definirana s predpisom

$$(\phi_i \times \psi_j)(x,y) \;=\; (\phi_i(x), \psi_j(y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;=\; \mathbb{R}^{n+m}.$$

Očitno je $\phi_i \times \psi_j$ homeomorfizem na svojo sliko. Prehodne preslikave so oblike

$$(u,v) \mapsto (\phi_{i,i'}(u), \psi_{j,j'}(v)),$$

torej so $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmi. Kartezični produkt $X \times Y$ dveh $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti, opremljen s produktnim atlasom, je torej $\mathscr{C}^r$ mnogoterost.

Enako vidimo, da je produkt $X \times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti spet kompleksna mnogoterost in velja

$$\dim_{\mathbb{C}} X \times Y \;=\; \dim_{\mathbb{C}} X + \dim_{\mathbb{C}} Y.$$

Primer 1.27 Produkt n kopij krožnice je n-dimenzionalni torus $\mathbb{T}^n = S^1 \times \ldots \times S^1$.

1.3.3 Kvocientne mnogoterosti

Za motivacijo si ponovno oglejmo krožnico S^1. Ta je izomorfna kvocientnemu prostoru $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ množice realnih števil po podgrupi vseh celih števil. Če si S^1 predstavljamo kot množico vseh kompleksnih števil z normo ena, lahko kvocientno projekcijo $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ podamo s preslikavo

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, \qquad \pi(t) \;=\; e^{2\pi i t}, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Naj bo X topološki prostor in $\sim$ neka ekvivalenčna relacija na X. Množica $X/\!\sim$, katere elementi so ekvivalenčni razredi relacije $\sim$, se imenuje *kvocientni prostor* prostora X glede na $\sim$. Označimo s $\pi : X \to X/\!\sim$ kvocientno projekcijo, ki elementu $x \in X$ priredi njegov ekvivalenčni razred

$$[x] \;=\; \{y \in X : x \sim y\} \in X/\!\sim .$$

Topologijo na $X/\!\sim$ definiramo z zahtevo, da je množica $U \subset X/\!\sim$ odprta natanko tedaj, ko je njena praslika $\pi^{-1}(U) \subset X$ odprta. To je najmočnejša topologija na $X/\!\sim$, v kateri je projekcija π zvezna preslikava.

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & \pi^{-1}(U) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ X/\!\sim & \supset & U \end{array}$$

Naslednji trditev je očitna posledica definicije kvocientne topologije.

Trditev 1.28 *Kvocientna projekcija π je odprta preslikava natanko tedaj, ko je $\sim$* odprta relacija *v naslednjem smislu: za vsako odprto množico $V \subset X$ je množica $\pi^{-1}(\pi(V)) = \{x \in X : x \sim y \text{ za nek } y \in V\}$ odprta.*

Naslednja trditev karakterizira Hausdorffovo lastnost kvocientnega prostora z zaprtostjo grafa ekvivalenčne relacije.

Trditev 1.29 *Naj bo $\sim$ odprta ekvivalenčna relacija na Hausdorffovem topološkem prostoru X. Kvocientni prostor $X/\!\sim$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je graf relacije*

$$\mathscr{R} = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\}$$

zaprta množica v $X \times X$. Taka relacija se imenuje zaprta.

Dokaz Denimo, da je $\mathscr{R}$ zaprta podmnožica v $X \times X$. Naj bosta $x, y \in X$ elementa, ki določata različna ekvivalenčna razreda $[x] \neq [y]$ v $X/\sim$. Torej $(x,y) \notin \mathscr{R}$. Ker je množica $\mathscr{R}$ zaprta v $X \times X$, obstaja odprta (produktna) okolica $U \times V \subset X \times X$ točke (x,y), tako da $(U \times V) \cap \mathscr{R} = \varnothing$. To pomeni, da za poljuben par $x' \in U,\ y' \in V$ velja $x' \not\sim y'$. To pomeni, da sta projekciji $\pi(U),\ \pi(V) \subset X/\sim$ disjunktni podmnožici. Ker je projekcija $\pi : X \to X/\sim$ odprta preslikava, sta $\pi(U)$ in $\pi(V)$ disjunktni odprti okolici točk $[x], [y]$ v $X/\sim$. To ravno pomeni, da je prostor $X/\sim$ s kvocientno topologijo Hausdorffov prostor.

Dokaz v obratni smeri prepustimo bralcu. □

V nadaljevanju nas bodo zanimale ekvivalenčne relacije $\sim$ na mnogoterosti X, ki so hkrati odprte in zaprte. Torej je kvocientna projekcija $\pi : X \to X/\sim$ odprta preslikava ter je $X/\sim$ Hausdorffov 2-števen topološki prostor. Zanimali nas bodo primeri, ko je $X/\sim$ spet mnogoterost. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

1.3.4 Projektivni prostori

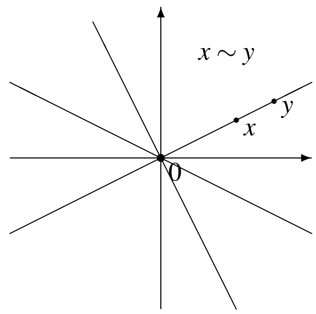
Za poljuben končno razsežen realen ali kompleksen vektorski prostor V dimenzije $n+1 > 1$ definiramo projektivizacijo $\mathbb{P}(V)$ kot množico vseh enodimenzionalnih vektorskih podprostorov prostora V. Konkretno je V linearno izomorfen enemu od prostorov $\mathbb{R}^{n+1}$ oz. $\mathbb{C}^{n+1}$ in

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \text{množica vseh realnih premic skozi 0 v } \mathbb{R}^{n+1}, \\ \mathbb{CP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \text{množica vseh kompleksnih premic skozi 0 v } \mathbb{C}^{n+1}. \end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^{n+1}_* = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo s predpisom

$$x \sim y \iff y = tx \text{ za nek } t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Torej je $x \sim y$ natanko tedaj, da sta vektorja x in y kolinearna.



Očitno je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Kvocientni prostor se imenuje *realen n-razsežen projektivni prostor* $\mathbb{RP}^n$:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+1}_* \\ \Big\downarrow \pi \\ \mathbb{RP}^n \;=\; \mathbb{R}^{n+1}_*/\sim \end{array}$$

Za vsak vektor $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_*$ označimo njegovo sliko s

$$\pi(x) \;=\; [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{RP}^n.$$

Po definicije relacije $\sim$ velja

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \;=\; [y_0 : y_1 : \cdots : y_n] \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}^* \ni: y_j = t x_j \ \ \forall j = 0,1,\ldots,n. \quad (1.6)$$

To so *homogene koordinate* na $\mathbb{RP}^n$. Podobno definiramo kompleksne homogene koordinate $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ na kompleksnem projektivnem prostoru $\mathbb{CP}^n$.

Trditev 1.30 *Kvocientna projekcija $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ je odprta in $\mathbb{RP}^n$ je kompakten Hausdorffov. Isto velja za projekcijo $\pi : \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$.*

Dokaz Naj bo U odprta množica v $\mathbb{R}^{n+1}_*$. Potem je množica

$$\pi^{-1}(\pi(U)) \;=\; \bigcup_{t \in \mathbb{R}_*} tU$$

(to je stožec nad U) odprta, saj je unija odprtih množic tU ($t \in \mathbb{R}_*$). Iz trditve 1.28 sledi, da je projekcija $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ odprta preslikava.
Graf relacije $\sim$ je množica

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_* \times \mathbb{R}^{n+1}_* : \sum_{j,k=0,\ldots,n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 = 0 \right\},$$

ki je zaprta, saj je ničelna množica zvezne funkcije (polinoma). Torej je projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffov po trditvi 1.29.

Naj bo S^n enotna sfera v $\mathbb{R}^{n+1}$. Vsaka premica skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n+1}$ seka sfero S^n v paru antipodnih točk $\pm x$ in zato velja $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x, -x\}$. Torej je

$$\mathbb{RP}^n \;=\; \pi(S^n) \;=\; S^n/_{x\sim -x}.$$

Ker je sfera kompaktna in je $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ zvezna surjektivna preslikava, je tudi projektiven prostor $\mathbb{RP}^n$ kompakten. Vsako vlakno projekcije vsebuje dve točki, zato lahko vlakno abstraktno identificiramo z grupo $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook] & S^n \arrow[d, "\pi"', "\text{2-listna projekcija}"] \\ & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \quad .$$

Analogni zaključki veljajo za kompleksen projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$. Naj bo $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ enotna sfera v $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$. Vsaka kompleksna premica

$$\mathbb{C}z \;=\; \{tz : t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

skozi poljubno točko $z \in S^{2n+1}$ seka sfero S^{2n+1} v krožnici

$$\mathbb{C}z \cap S^{2n+1} \;=\; \left\{e^{\mathrm{i}t}z : t \in \mathbb{R}\right\} \cong S^1.$$

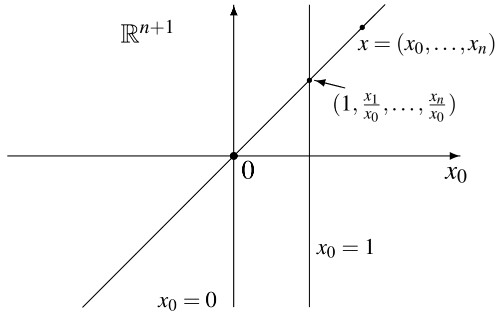
Te krožnice so paroma disjunktne in sestavljajo foliacijo sfere.
Zožitev projekcije $\pi : \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$ na sfero je *Hopfova fibracija* $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$, ki je realno analitičen svežen z vlaknom S^1 (angl. *circle bundle*):

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] & S^{2n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

S tem je trditev 1.30 dokazana. (Več o svežnjih najdemo v razdeku 1.9.) $\square$

Sedaj bomo opisali konstrukcijo realno analitičnega atlasa na $\mathbb{RP}^n$ ter kompleksnega atlasa na $\mathbb{CP}^n$. Za vsak $j = 0,1,\ldots,n$ definiramo

$$U_j \;=\; \{x = (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_* : x_j \neq 0\}, \qquad V_j \;=\; \pi(U_j) \subset \mathbb{RP}^n.$$



Definiramo preslikavo $\phi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$\phi_j([x]) = \phi_j([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) \stackrel{def}{=} \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right).$$

Iz (1.6) sledi, da je ϕ_j dobro definirana, saj so razmerja x_i/x_j neodvisna od izbire homogenega predstavnika elementa v $\mathbb{RP}^n$. Očitno je ϕ_j bijekcija in lahko je preveriti, da je homeomorfizem na $\mathbb{R}^n$. Njen inverz je

$$\phi_j^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1 : \dots : y_j : 1 : y_{j+1} : \dots : y_n] \in V_j.$$

Za vsak par indeksov $0 \le i < j \le n$ je prehodna preslikava med ϕ_i in ϕ_j enaka

$$\phi_{ij}(y) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{1}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\right).$$

Odtod vidimo, da je $\{(V_j, \phi_j) : j = 0, 1, \dots, n\}$ realno analitičen atlas na $\mathbb{RP}^n$ oz. holomorfen atlas na $\mathbb{CP}^n$.
Posebej si oglejmo atlas na $\mathbb{CP}^1$. Ta sestoji iz dveh kart:

$$\phi_0([z : w]) = \frac{w}{z} \in \mathbb{C} \ (z \neq 0), \qquad \phi_1([z : w]) = \frac{z}{w} \ (w \neq 0).$$

Prehodna preslikava je torej $\phi \circ \psi^{-1}(\zeta) = 1/\zeta$. To pomeni, da je $\mathbb{CP}^1$ Riemannova sfera. Dokazali smo naslednjo trditev.

Trditev 1.31 *Realen projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ z atlasom $\{(V_j, \phi_j) : j = 0, 1, \dots, n\}$ je kompaktna realno analitična mnogoterost dimenzije n.*
Kompleksen projektivni prostor $\mathbb{CP}^n$ s tem atlasom je kompaktna kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n. Prostor $\mathbb{CP}^1$ je Riemannova sfera.

Projektivni podprostori. Projektivni prostor $\mathbb{P}^n$ vsebuje veliko linearno vloženih kopij prostora $\mathbb{P}^k$ za $1 \le k < n$; to velja tako za realne kot za kompleksne projektivne prostore. Dejansko, vsak $(k+1)$-razsežen linearen podprostor $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ inducira komutativen diagram

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \setminus \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\Sigma) \cong \mathbb{CP}^k & \hookrightarrow & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

Kompleksne premice skozi 0 v Σ so točke v $\mathbb{P}(\Sigma) \cong \mathbb{CP}^k$.

Če je $k = n-1$, je Σ hiperravnina v $\mathbb{C}^{n+1}$, podana z netrivialno linearno enačbo $a_0 z_0 + \ldots + a_n z_n = 0$, torej je $a_j \neq 0$ za nek j. Prirejena projektivna hiperravnina v $\mathbb{CP}^n$ je

$$\mathbb{P}(\Sigma) \;=\; \left\{ [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Definicija je neodvisna od predstavnika ekvivalenčnega razreda, saj se multiplikativen faktor $t \in \mathbb{C}^*$ krajša.

Projektivno zaprtje. Na preprostem primeru bomo opisali pojem *projektivnega zaprtja*. Vzemimo neko afino linearno hiperravnino $L \subset \mathbb{C}^n$:

$$L \;=\; \left\{ (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \zeta_j = 0 \right\}. \tag{1.7}$$

Prostor $\mathbb{C}^n$ vložimo na standarden način kot podmnožico v $\mathbb{CP}^n$:

$$\mathbb{C}^n \;=\; \left\{ [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : z_0 \neq 0 \right\},$$

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \cong \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0} \right) \;=\; (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Zanima nas, kaj je zaprtje $\overline{L} \subset \mathbb{CP}^n$. Enačbo (1.7) homogeniziramo (oz. projektiviziramo) tako, da vstavimo izraze

$$\zeta_j \;=\; \frac{z_j}{z_0}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

v enačbo za L in pomnožimo z z_0. Tako dobimo

$$\overline{L} \;=\; \left\{ [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : \sum_{j=0}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Presek $\overline{L}$ s hiperravnino v neskončnosti $H = \{z_0 = 0\} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ je enak

$$\overline{L} \cap H \;=\; \left\{ [0 : z_1 : \ldots : z_n] : \sum_{j=1}^{n} a_j z_j = 0 \right\}.$$

Torej je $\overline{L} \cap H$ hiperravnina v $H = \mathbb{CP}^{n-1}$, izomorfna prostoru $\mathbb{CP}^{n-2}$.

Konstrukcijo projektivizacije lahko posplošimo takole. Če je

$$L \;=\; \big\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n : P(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=0\big\},$$

kjer je P polinom stopnje d (ne nujno homogen), pišemo $\zeta_j=\frac{z_j}{z_0}$ in vstavimo v P:

$$\widetilde{P}(z_0,\ldots,z_n) \;=\; z_0^d\, P\left(\frac{z_j}{z_0},\ldots,\frac{z_n}{z_0}\right).$$

Homogen polinom $\widetilde{P}$ stopnje d se imenuje *homogenizacija* polinoma P. Množica

$$\overline{L} \;=\; \big\{[z_0:\ldots:z_n]\in\mathbb{CP}^n : \widetilde{P}(z_0,\ldots,z_n)=0\big\}$$

je topološko zaprtje množice $L\subset\mathbb{C}^n$ v projektivnem prostoru $\mathbb{CP}^n$ in se imenuje *projektivizacija L*.

Algebraične množice v projektivnem prostoru. Če je $P(z_0,\ldots,z_n)\not\equiv 0$ homogen polinom stopnje $d\in\mathbb{N}$, potem je množica

$$A_P \;=\; \big\{[z_0:\ldots:z_n]\in\mathbb{CP}^n : P(z_0,\ldots,z_n)=0\big\}$$

projektivno algebraična hiperploskev stopnje d. Lahko opazujemo tudi množice, definirane z več homogenimi polinomskimi enačbami:

$$A_{P_1}\cap A_{P_2}\cap\ldots\cap A_{P_k} \;\ldots\; \text{projektivno algebraična podmnožica v } \mathbb{CP}^n. \tag{1.8}$$

Poljubna *projektivno algebraična množica* $\mathbb{CP}^n$ je končna unija $A=A_1\cup\cdots\cup A_k$ množic A_j oblike (1.8).

Primer 1.32 Množica

$$C \;=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : x^2=y^3\big\}$$

je afino algebraična kompleksna krivulja v $\mathbb{C}^2$ s singularnostjo v $(0,0)$. Če pišemo $x=z/\zeta$ in $y=w/\zeta$ ter vstavimo v enačbo za C, dobimo enačbo za projektivno zaprtje C v projektivni ravnini $\mathbb{CP}^2$:

$$\overline{C} \;=\; \big\{[\zeta:z:w]\in\mathbb{CP}^2 : z^2\zeta=w^3\big\}.$$

Njen presek s premico v neskončnosti je

$$\overline{C}\cap\{\zeta=0\} \;=\; \big\{[0:z:0]\big\}=\big\{[0:1:0]\big\}.$$

Presečno število krivulje $\overline{C}$ s premico v neskončnosti $H=\{\zeta=0\}$ v točki $[0:1:0]$ je enako 3; pravimo tudi, da je to trojna presečna točka.

Opomba 1.33 *Lokalno presečno število* dveh kompleksnih krivulj v $\mathbb{C}^2$ (ali v poljubni kompleksni ploskvi) izračunamo tako, da lokalno definicijsko funkcijo ene krivulje (v našem primeru npr. funkcijo ζ, ki definira projektivno premico $\{\zeta=0\}=H$) zožimo na drugo krivuljo (v našem primeru $\overline{C}$) in jo izrazimo v lokalni karti na drugi krivulji, v kateri presečni točki ustreza izhodišče. Presečno število je tedaj red ničle zožene funkcije v izhodišču. Iz definicije sledi, da je lokalno presečno število dveh kompleksnih krivulj vselej pozitivno.

V zgornjem primeru je primerna lokalna koordinata na $\overline{C}$ funkcija w (saj presečni točki ustreza $w=0$), zvezo med ζ in w (v lokalni karti $\{z=1\}$ na $\mathbb{CP}^2$) pa nam podaja enačba $\zeta = w^3$. Red ničle funkcije ζ pri $w=0$ je enak 3 in to je presečno število med $\overline{C}$ in H v točki $[0:1:0]$.

Globalno presečno število dveh krivulj je definirano kot vsota lokalnih presečnih števil v vseh presečnih točkah. Za krivulje v kompaktni komleksni ploskvi (kot npr. $\mathbb{CP}^2$) je to vselej nenegativno (končno) celo število. Krivulje v odprtih ploskvah (kot npr. $\mathbb{C}^2$) pa se lahko sekajo v števni diskretni množici točk in v tem primeru globalnega presečnega števila ni mogoče smiselno definirati.

Naloga 1.34 *Dokaži, da je presečno število vsake kompleksne krivulje stopnje d v $\mathbb{CP}^2$ s katerokoli projektivno premico $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ enako d, torej stopnji krivulje.*

Nekaj več o presečni teoriji podmnogoterosti bomo povedali v razdelku 4.3. Ta tema je celovito obravnavana v monografiji Fultona [19].

1.3.5 Grassmanove mnogoterosti

Grassmanove mnogoterosti $G_k(\mathbb{R}^n)$ in $G_k(\mathbb{C}^n)$ za $k=1,\ldots,n-1$ so naravne posplošitve realnih oziroma kompleksnih projektivnih prostorov.

Naj bo $1 \le k < n$. Označimo z $V_k(\mathbb{R}^n)$ množico vseh urejenih k-teric $X=(x^1,\ldots,x^k)$ linearno neodvisnih vektorjev $x^1,\ldots,x^k \in \mathbb{R}^n$. Tako k-terico imenujemo *k-ogrodje* v $\mathbb{R}^n$. Očitno lahko $V_k(\mathbb{R}^n)$ identificiramo z množico vseh $n\times k$ matrik maksimalnega ranga k; slednja je odprta podmnožica v $\mathbb{R}^{nk}$.

Vsako k-ogrodje $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$ določa linearno lupino $\mathrm{Lin}(X) \subset \mathbb{R}^n$, ki je k-razsežen vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Na množici $V_k(\mathbb{R}^n)$ uvedemo ekvivalenčno relacijo

$$X \sim Y \iff \mathrm{Lin}(X) = \mathrm{Lin}(Y).$$

Elementa $X,Y \in V_k(\mathbb{R}^n)$ sta ekvivalentna ($X\sim Y$) natanko tedaj, ko obstaja matrika $A \in GL_k(\mathbb{R})$, tako da je $X\cdot A = Y$ (matrični produkt).

Nadalje zlahka vidimo, da je relacija $\sim$ odprta in zaprta. Naj bo

$$\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n) = V_k(\mathbb{R}^n)/\sim \tag{1.9}$$

kvocientna projekcija. Torej je $G_k(\mathbb{R}^n)$ množica vseh k-dimenzionalnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$. V posebnem je

$$G_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}^{n-1}.$$

Iz trditve 1.29 sledi, da je kvocientna topologija na $G_k(\mathbb{R}^n)$ Hausdorffova.

Na $G_k(\mathbb{R}^n)$ obstaja struktura realno analitične (natančneje, realno algebraične) mnogoterosti, tako da je projekcija π (1.9) realno analitična. Konstrukcija je podobna kot pri projektivnih prostorih. Izberemo multiindeks $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ z $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Naj bo $U_I \subset V_k(\mathbb{R}^n)$ množica vseh matrik $X \in V_k(\mathbb{R}^n)$ z neizrojenim $k \times k$ minorjem X_I, sestavljenim iz vrstic $i_1, \ldots, i_k$ matrike X. Naj bo $J = I^c = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ komplementarni multiindeks. Matrika $X(X_I)^{-1}$ očitno zadošča pogoju $(X(X_I)^{-1})_I = I^{k\times k}$ (identična $k \times k$ matrika), njen $(n-k)\times k$ minor $(X(X_I)^{-1})_J$ pa določa lokalno karto ϕ_I na odprti množici $\pi(U_I) = V_I \subset G_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\phi_I : V_I \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{(n-k)\times k}, \qquad \phi_I([X]) \; = \; (X(X_I)^{-1})_J. \tag{1.10}$$

Lahko je videti, da je $\phi_I([X])$ res odvisna le od ekvivalečnega razreda elementa X: če je $X \sim Y$, je $Y = XA$ za neko $A \in GL_k(\mathbb{R})$, zato je

$$Y(Y_I)^{-1} \; = \; (XA)(XA)_I^{-1} \; = \; XAA^{-1}(X_I)^{-1} \; = \; X(X_I)^{-1}.$$

Prehodne preslikave med kartami so podane z racionalnimi funkcijami. Očitno je

$$\dim G_k(\mathbb{R}^n) \; = \; k(n-k).$$

Preslikava $\Lambda \to \Lambda^\perp$, ki priredi podprostoru $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ njegov ortogonalni komplement, inducira realno analitičen izomorfizem

$$G_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} G_{n-k}(\mathbb{R}^n).$$

V posebnem je torej projektivni prostor $\mathbb{RP}^{n-1} = G_1(\mathbb{R}^n)$ izomorfen Grassmanovi mnogoterosti $G_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ vseh hiperravnin v $\mathbb{R}^n$ skozi izhodišče.

Če uporabimo isto konstrukcijo na $\mathbb{C}$-linearno neodvisnih k-tericah kompleksnih vektorjev $Z = (z^1, \ldots, z^k) \in (\mathbb{C}^n)^k$, dobimo *kompleksno Grassmanovo mnogoterost* $G_k(\mathbb{C}^n)$ vseh k-razsežnih $\mathbb{C}$-linearnih podprostorov evklidskega prostora $\mathbb{C}^n$. V tem primeru so prehodne preslikave med kartami (1.10) kompleksno racionalne, zato je $G_k(\mathbb{C}^n)$ kompleksno algebraična mnogoterost kompleksne dimenzije $k(n-k)$.

1.4 Gladke funkcije in gladke preslikave mnogoterosti

Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{1, 2, \ldots, \infty, \omega, \mathscr{O}\}$.

Definicija 1.35 *Zvezna funkcija f na mnogoterosti X je gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v točki $p \in X$ (realno analitična v primeru $r = \omega$; holomorfna v primeru $r = \mathscr{O}$), če je za neko lokalno karto (U, ϕ) na X (iz atlasa, ki določa dano $\mathscr{C}^r$ strukturo na X), $p \in U$, funkcija*

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Funkcija f je razreda $\mathscr{C}^r$ na X, če je $\mathscr{C}^r$ v vsaki točki $p \in X$.

V primeru, ko je X kompleksna mnogoterost dimenzije n, nadomestimo $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$; funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ je holomorfna, če je za vsako lokalno holomorfno karto (U, ϕ) na X funkcija $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{C}$ holomorfna.

$$\begin{tikzcd} p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R} \\ \phi(p) \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f\circ\phi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Lema 1.36 *Pogoj v definiciji 1.35 je neodvisen od izbire lokalne karte v danem $\mathscr{C}^r$ atlasu.*

Dokaz Naj bo (V, ψ) neka druga lokalna karta na X, $p \in V$. Tedaj je

$$f \circ \psi^{-1} \;=\; f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \psi^{-1} \;=\; (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}).$$

Ker je $\phi \circ \psi^{-1}$ prehodna preslikava v $\mathscr{C}^r$ atlasu, je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Odtod sledi, da je $f \circ \psi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko je $f \circ \phi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$. $\square$

Definicijo gladke funkcije bomo sedaj posplošili na preslikave med mnogoterostmi.

Definicija 1.37 *Naj bosta X, Y dve $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti. Zvezna preslikava $f : X \to Y$ je gladka razreda $\mathscr{C}^r$ v točki $p \in X$, če obstajata lokalni karti (U, ϕ) na X ter (V, ψ) na Y, tako da velja $p \in U$, $f(U) \subset V$ in je preslikava*

$$\tilde{f} \;=\; \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \pi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava je razreda $\mathscr{C}^r$ na X, če je razreda $\mathscr{C}^r$ v vsaki točki iz X.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ U' \arrow[r] & V' \end{tikzcd}$$

Lema 1.38 *Definicija je neodvisna od izbire lokalnih kart na X in Y.*

Dokaz Naj bo (U', ϕ') neka druga karta na X, $p \in U'$, ter (V', ψ') neka druga karta na Y, $f(p) \in V'$. Potem velja (oznako za kompozicijo izpustimo):

$$\psi' f(\phi')^{-1} \;=\; \psi'(\psi^{-1}\psi) f(\phi^{-1}\phi)(\phi')^{-1} \;=\; (\psi'\psi^{-1})(\psi f \phi^{-1})(\phi(\phi')^{-1}).$$

Preslikava $\psi'\psi^{-1}$ je prehodna preslikava med dvema kartama na Y, torej je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Podobno je zadnja preslikava $\phi(\phi')^{-1}$ na desni prehodna preslikava med dvema kartama na X in zato $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. Odtod sledi, da je preslikava $\psi f \phi^{-1}$ razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko je $\psi' f(\phi')^{-1} \in \mathscr{C}^r$ razreda $\mathscr{C}^r$. $\square$

Definicija 1.39 *$\mathscr{C}^r$-difeomorfizem $f : X \to Y$ je bijektivna preslikava (homeomorfizem) med $\mathscr{C}^r$-mnogoterostima, ki je $\mathscr{C}^r$ ter je njen inverz f^{-1} tudi $\mathscr{C}^r$.*

Opomba 1.40 *Iz definicij sledi, da je vsaka lokalna karta (U,ϕ) na $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti X $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Trditev 1.41 *Kompozicija gladkih $\mathscr{C}^r$-preslikav mnogoterosti je spet $\mathscr{C}^r$-preslikava. Prav tako je kompozicija holomorfnih preslikav med kompleksnimi mnogoterostmi spet holomorfna preslikava.*

Dokaz Oglejmo si naslednji diagram preslikav:

$$\begin{tikzcd}
p \in U \subset X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, "\phi"] & f(p) \in V \subset Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\psi"] & g(f(p)) \in W \subset Z \arrow[d, "\theta"] \\
0 \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, bend left, "\psi f \phi^{-1}", "\mathscr{C}^r"'] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{C}^r", "(\theta g \psi^{-1})(\psi f \phi^{-1}) = \theta(gf)\phi^{-1}"'] & 0 \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r, bend left, "\theta g \psi^{-1}", "\mathscr{C}^r"'] & 0 \in \theta(W) \subset \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

Kompoziciji $g \circ f$ pripada v paru lokalnih kart (U,ϕ) na X in (W,θ) na Z preslikava $\theta \circ g \circ f \circ \phi^{-1}$, ki je kompozicija $\mathscr{C}^r$ preslikav $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ter $\theta \circ g \circ \psi^{-1}$:

$$(\theta \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \;=\; \theta \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1}.$$

Zato tudi sama razreda $\mathscr{C}^r$. Iz definicije sledi, da je $g \circ f$ razreda $\mathscr{C}^r$.

Dokaz za kompleksen primer je analogen iz sledi iz dejstva, da je kompozicija holomorfnih preslikav med odprtimi podmnožicami kompleksnih evklidskih prostorov spet holomorfna preslikava. $\square$

Opomba 1.42 *Iz trditve 1.41 sledi, da mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ ($r \in \{0,1,\ldots,\infty,\omega\}$) kot objekti ter preslikave razreda $\mathscr{C}^r$ kot morfizmi sestavljajo kategorijo. Prav tako kompleksne mnogoterosti kot objekti ter holomorfne preslikave kot morfizmi sestavljajo kategorijo.*

Opomba 1.43 *Če sta X in Y $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti, sta avtomatično tudi $\mathscr{C}^k$ mnogoterosti za vsak $k < r$. Torej lahko govorimo o $\mathscr{C}^k$ preslikavah $X \to Y$ za vsak $k \leq r$. Ne moremo pa smiselno definirati pojma $\mathscr{C}^k$-preslikave za $k > r$.*

V nadaljevanju bomo uporabljali naslednje oznake:

- $\mathscr{C}^r(X,Y)$ je množica vseh $\mathscr{C}^r$-preslikav $X \to Y$.
- $\mathscr{C}^r(X) \stackrel{def}{=} \mathscr{C}^r(X,\mathbb{R})$ je algebra vseh $\mathscr{C}^r$ funkcij na X.
- $\mathscr{O}(X,Y)$ je množica vseh holomorfnih preslikav $X \to Y$ kompleksnih mnogoterosti in $\mathscr{O}(X) = \mathscr{O}(X,\mathbb{C})$ je množica vseh holomorfnih funkcij na X.

Iz definicij sledi, da vse lokalne lastnosti gladkih preslikav med evklidskimi prostori, ki se ohranjajo pri kompozicij z difeomorfizmi, veljajo tudi za preslikave mnogoterosti. Npr., definiramo lahko rang preslikave v točki.

Definicija 1.44 *Naj bo $f : X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^1$. Izberimo lokalno karto (U,ϕ) na X in lokalno karto (V,ψ) na Y, tako da velja $p \in U$ in $f(U) \subset V$. Potem je* rang preslikave *f v točki p število*

$$\mathrm{rang}_p f \;=\; \mathrm{rang}_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \in \mathbb{Z}_+.$$

Definicija ranga je neodvisna od izbire para lokalnih kart, saj so prehodne preslikave med kartami difeomorfizmi, ki ohranjajo rang.

Primer 1.45 Oglejmo si preslikave v projektivne prostore:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{RP}^N, \qquad f(x) \;=\; [f_0(x) : \cdots : f_N(x)].$$

Ta preslikava je dobro definirana na množici $\{x \in X \,:\, f_j(x) \neq 0 \text{ za vsaj en } j\}$. Predpostavimo, da je ta množica kar enaka X.

Kdaj je f razreda $\mathscr{C}^r$?

Preverimo v lokalnih kartah na $\mathbb{RP}^N$. Recimo, da je $f_j(a) \neq 0$ za nek $a \in X$. Torej velja isto v neki okolici $a \in U \subset X$. Sedaj vzamemo na $\mathbb{RP}^N$ lokalno karto

$$\psi\big([y_0 : \ldots : y_N]\big) \;=\; \left(\frac{y_0}{y_j}, \ldots, \frac{y_N}{y_j}\right) \in \mathbb{R}^n,$$

kjer smo na desni izpustili komponento $\frac{y_j}{y_j} = 1$:

$$(\psi \circ f)(x) \;=\; \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)}, \ldots, \frac{f_N(x)}{f_j(x)}\right) \in \mathbb{R}^N, \qquad x \in U.$$

Odtod vidimo: Če so vse komponente f_j $\mathscr{C}^r$-funkcije na X, potem je preslikava $f : X \to \mathbb{RP}^N$ razreda $\mathscr{C}^r$.

Podobno vidimo, da je za kompleksno mnogoterost X preslikava

$$X \ni z \longmapsto [f_0(z) : f_1(z) : \ldots : f_N(z)] \in \mathbb{CP}^N$$

holomorfna, če so vse njene komponente f_j holomorfne funkcije in je v vsaki točki vsaj ena od komponent različna od nič.

Primer 1.46 *Meromorfna funkcija* na domeni $D \subset \mathbb{C}$ (ali, splošneje, na poljubni Riemannovi ploskvi) je holomorfna funkcija $f : D \setminus \{a_j\} \to \mathbb{C}$ na komplementu neke diskretne množice točk $\{a_j\} \subset D$, ki ima v vsaki točki a_j pol ali odpravljivo singularnost. (Če je D kompaktna Riemannova ploskev, je množica $\{a_j\}$ končna.) Lokalno v okolici pola a_j je

$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}, \qquad g \text{ holomorfna v okolici točke } a_j,\;\; n_j \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Brez izgube splošnosti lahko vzamemo, da je $g(a_j) \neq 0$ in je n_j stopnja pola. Meromorfni funkciji f priredimo preslikavo $\tilde{f} : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ v Riemannovo sfero s predpisom

$$\tilde{f}(z) \;=\; \begin{cases} f(z) & \text{če je } z \neq a_j \text{ za vsak } j, \\ \infty & \text{če je } z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

Ker velja $\lim_{z\to a_j} |f(z)| = \infty$, je $\tilde{f}$ zvezna preslikava $D \to \mathbb{CP}^1$. Če identificiramo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ s $\mathbb{CP}^1$ tako, da $\mathbb{C}$ identificiramo z $\{[1 : z] \in \mathbb{CP}^1 : z \in \mathbb{C}\}$ in ∞ s točko $[0 : 1]$, potem lahko $\tilde{f}$ zapišemo v obliki

$$\tilde{f}(z) \;=\; \begin{cases} [1 : f(z)], & z \neq a_j \text{ za vsak } j, \\ [0 : 1], & z = a_j \text{ za nek } j. \end{cases}$$

Trdimo, da je $\tilde{f}$ holomorfna preslikava. V okolici točke a_j uporabimo predstavitev (1.11) in dobimo

$$\tilde{f}(z) \;=\; \left[1 : \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}\right] \;=\; [(z-a_j)^{n_j} : g(z)] \in \mathbb{CP}^1.$$

Sedaj pogledamo $\tilde{f}$ v drugi holomorfni karti $\psi([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$ na $\mathbb{CP}^1$:

$$(\psi \circ \tilde{f})(z) \;=\; \frac{(z-a_j)^{n_j}}{g(z)} \quad \text{holomorfna v okolici točke } a_j.$$

V točki $z = a_j$ ima $\psi \circ \tilde{f}$ ničlo reda n_j. Zato je $f : D \to \mathbb{CP}^1$ holomorfna.

Obratno, vsaka holomorfna preslikava $D \to \mathbb{CP}^1$, ki ni konstantno enaka vrednosti $\infty = [0 : 1] \in \mathbb{CP}^1$, določa meromorfno funkcijo na D.

Npr., vsaka meromorfna funkcija na $\mathbb{C}$, ki je periodična glede na neko mrežo (diskretno abelovo podgrupo) $\Gamma \subset \mathbb{C}$, inducira holomorfno preslikavo $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{CP}^1$. Grupa Γ ima lahko bodisi en generator (npr., $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$) bodisi dva generatorja (npr., $\mathbb{Z} + \mathrm{i}\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$). Kvocient $X = \mathbb{C}/\Gamma$ je v prvem primeru enak $\mathbb{C}^*$, v drugem primeru pa je (kompleksni) torus. Tovrstne primere kvocientnih mnogoterosti bomo natančneje obravnavali v razdelku 1.8.

Primer 1.47 Naj bo

$$F \;=\; (P_0, P_1, \ldots, P_N) : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{N+1}$$

holomorfna preslikava, katere komponente P_j so homogeni polinomi stopnje d (vsi iste stopnje!). Torej je $F(tz) = t^d F(z)$ za vsak $t \in \mathbb{C}$. Predpostavimo, da velja $F(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. (To lahko velja samo v primeru, ko je $n \leq N$.) Torej F preslika vsako kompleksno premico v $\mathbb{C}^{n+1}$ skozi izhodišče $z = 0$ v neko kompleksno premico skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{N+1}$. Zato F enolično določa preslikavo $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^N$, tako da komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1}_* \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C}^{N+1}_* \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^N \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Naloga 1.48 *Preveri, da je f holomorfna preslikava, ki je v vsakem paru standardnih lokalnih kart na obeh projektivnih prostorih podana z racionalno preslikavo v spremenljivkah $z = (z_0, z_1 \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.*

V splošnem je množica $A = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : F(z) = 0\}$ kompleksni stožec (unija kompleksnih premic v $\mathbb{C}^{n+1}$ skozi izhodišče) in velja $0 \in A$. Naj bo $\widetilde{A} = \pi(A_*) \subset \mathbb{CP}^n$. Dobimo komutativen diagram holomorfnih preslikav

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1} \setminus A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C}^{N+1}_* \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \setminus \widetilde{A} \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^N \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Množica A se imenuje *množica nedoločenosti* preslikave $\pi \circ F : \mathbb{C}^{n+1} \setminus A \to \mathbb{CP}^n$, njena projekcija $\widetilde{A} \subset \mathbb{CP}^n$ pa je množica nedoločenosti preslikave f. Preslikave te vrste se imenujejo *meromorfne*, saj so v lokalnih koordinatah na projektivnih prostorih podane z meromorfnimi (racionalnimi) funkcijami.

Primer 1.49 Preslikava

$$F : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$$

je holomorfna na $\mathbb{C}^2_*$, v izhodišču $(0,0)$ pa ima točko nedoločenosti. V lokalni karti na $\mathbb{CP}^1$, podani z $\phi([z_1 : z_2]) = z_2/z_1$, je $\phi \circ F(z_1, z_2) = z_2/z_1$. Praslika poljubne točke $\zeta \in \mathbb{CP}^1$ je torej kompleksna premica v $\mathbb{C}^2$ z enačbo $z_2 = \zeta z_1$. Točki $\zeta = \infty$ ustreza premica $z_1 = 0$.

Oglejmo si poseben primer, ko je F linearna preslikava $F(z) = Az$, kjer je A kompleksna matrika dimenzije $(N+1) \times (n+1)$. Tedaj je F homogena preslikava stopnje 1 in pogoj $F^{-1}(0) = 0$ je izpolnjen natanko tedaj, ko ima matrika A maksimalni rang n. Prirejena preslikava $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^N$ v diagramu (1.12) je linearna vložitev projektivnih prostorov; v primeru $n = N$ je to linearen avtomorfizem prostora $\mathbb{CP}^n$. Grupa vseh linearnih avtomorfizmov $\mathbb{CP}^n$ se imenuje *projektivna linearna grupa*,

$$PGL_n(\mathbb{C}) \;=\; GL_{n+1}(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \;=\; GL_{n+1}(\mathbb{C})/\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}^*\},$$

kjer I označuje identično matriko.

1.5 Gladke particije enote

Eno od pomembnih orodij pri delu z mnogoterostmi je obstoj gladke particije enote, ki jo podaja izrek 1.50.

Naj bosta $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ in $\mathscr{V} = \{V_i\}$ dve odprti pokritji mnogoterosti X. Pravimo, da je pokritje $\mathscr{V}$ *finejše* od pokritja $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ (ali da je *včrtano* pokritju $\mathscr{U}$), če za vsak indeks i obstaja indeks $\alpha = \alpha(i)$, tako da je $V_i \subset U_\alpha$. Pokritje $\mathscr{V}$ je *lokalno končno*, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki jo seka največ končno mnogo elementov V_i pokritja. V tem primeru iz lokalne kompaktnosti X sledi, da tudi vsako kompaktno množico prostora X seka največ končno členov pokritja.

Izrek 1.50 (Gladke particije enote) *Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{0,1,2,\ldots,\infty\}$. Za vsako odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ mnogoterosti X obstaja finejše lokalno končno pokritje $\mathscr{V} = \{V_i\}$ in funkcije $\psi_i : X \to [0,1]$ razreda $\mathscr{C}^r(X)$, tako da je* $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset V_i$ *za vsak i ter $\sum_i \psi_i(x) = 1$ za vsak $x \in X$. Če je dano začetno pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ lokalno končno, potem trditev velja za $\mathscr{V} = \mathscr{U}$ (to je, funkcije v particiji enote lahko indeksiramo z isto indeksno množico).*

Opomba 1.51 Iz principa identičnosti za realno analitične (in holomorfne) funkcije sledi, da ne obstaja netrivialna $\mathscr{C}^\omega$ funkcija s kompaktnim nosilcem na nekompaktni realno analitični mnogoterosti. Zato ni particij enote iz realno analitičnih funkcij. To je vir mnogih pomembnih razlik v tehnikah, ki se uporabljajo po eni strani na gladkih mnogoterostih in po drugi strani na realno analitičnih in kompleksnih mnogoterostih. $\square$

Dokaz Oglejmo si funkcijo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definirano s predpisom

$$h(x) \;=\; \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{če je } x > 0, \\ 0, & \text{če je } x \le 0. \end{cases}$$

Dobro je znano, da je $h \ge 0$ gladka funkcija razreda $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Izven točke 0 je celo realno analitična, v točki 0 pa velja $\lim_{x\to 0} h^{(k)}(x) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Očitno je pozitivna na $x > 0$. Sedaj definirajmo funkcijo

$$g(x) \;=\; h(x+1)h(-x+1) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Iz lastnosti h sledi, da je $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ in njen nosilec je enak $\operatorname{supp}(g) = [-1,+1]$.

Naj bodo $x = (x_1, \dots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Označimo

$$|x|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Za vsak $\delta > 0$ je funkcija $g_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, definirana s predpisom

$$g_\delta(x) \;=\; g(|x|^2/\delta^2) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.14}$$

gladka na $\mathbb{R}^n$ in njen nosilec je zaprta krogla polmera δ s središčem v $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{supp}(g_\delta) \;=\; \overline{\mathbb{B}}^n(\delta) \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \delta\}.$$

Naj bo X mnogoterost dimenzije n in razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$. Kompaktna množica $K \subset X$ se imenuje (zaprta) *koordinatna krogla*, če obstaja karta (U, ϕ) na X (iz maksimalnega $\mathscr{C}^r$ atlasa na X), kjer je U neka odprta okolica množice K, tako da je $\phi(K) = \overline{\mathbb{B}}^n(\delta)$ za nek $\delta > 0$. Notranjost $\mathring{K}$ se imenuje *odprta koordinatna krogla*, saj jo ϕ preslika na odprto kroglo $\mathbb{B}^n(\delta)$. Naj bo g_δ funkcija (1.14). Funkcija $g_\delta \circ \phi \geq 0$ je tedaj gladka na U in $\mathrm{supp}(g_\delta) = K$. Zato lahko g_δ razširimo do gladke funkcije razreda $\mathscr{C}^r$ na X, ki je enaka 0 na $X \setminus U$.

Izberimo normalno izčrpanje X z naraščajočim zaporedjem kompaktov:

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k \;=\; X, \qquad L_k \subset \mathring{L}_{k+1} \text{ za vsak } k \in \mathbb{N}.$$

Če je X kompaktna, vzamemo $X = L_1$, ostalih množic pa ne bomo potrebovali.

Pokritje $\mathscr{V} = \{V_i\}$ in funkcije ψ_i v izreku bomo konstruirali induktivno.

V prvem koraku izberemo za vsako točko $x \in L_1$ neko karto (V_x, ϕ_x) na X, tako da je $\overline{V}_x \subset \mathring{L}_2$, $\phi_x(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ in je V_x vsebovana v eni od množic pokritja $\mathscr{U}$. Izberimo $\delta_x > 0$ dovolj majhen, da je $\overline{\mathbb{B}}^n(\delta_x) \subset \phi_x(V_x)$. Množica $W_x = \phi_x^{-1}(\mathbb{B}^n(\delta_x))$ je tedaj odprta koordinatna krogla, ki zadošča $\overline{W}_x \subset V_x$. Funkcija $g_x = g_{\delta_x} \circ \phi_x \geq 0$ je razreda $\mathscr{C}^r$ na V_x in $\mathrm{supp}(g_x) = \overline{W}_x$. Kot zgoraj jo razširimo do $\mathscr{C}^r$ funkcije na X, ki je enaka 0 na $X \setminus V_x$. Ker je množica L_1 kompaktna, končno mnogo tako dobljenih koordinatnih krogel W_x pokriva L_1; označimo jih z $W_1, \dots, W_{i_1}$, pripadajoče večje koordinatne okolice z $V_1, \dots, V_{i_1}$ (kjer je $\overline{W}_i \subset V_i$), dobljene funkcije pa z $g_1, \dots, g_{i_1} \in \mathscr{C}^r(X)$, $\mathrm{supp}(g_i) = \overline{W}_i$.

Če je mnogoterost X kompaktna in $L_1 = X$, smo postopek zaključili in gremo na zaključek dokaza.

Denimo sedaj, da X ni kompaktna. Tedaj v drugem koraku ponovimo isti postopek za kompaktno množico $\overline{L_2 \setminus L_1}$ ter dobimo končno družino koordinatnih krogel $W_{i_1+1} \subset V_{i_1+1}, \dots, W_{i_2} \subset V_{i_2}$ in nenegativnih funkcij $g_{i_1+1}, \dots, g_{i_2} \in \mathscr{C}^r(X)$ za nek $i_2 > i_1$, tako da za vsak $i = i_1 + 1, \dots, i_2$ velja $\mathrm{supp}(g_i) = \overline{W}_i$ in V_i leži v eni od množic pokritja $\mathscr{U}$ ter v množici $\mathring{L}_3$. Postopek induktivno ponavljamo. V k-tem koraku za nek $k \geq 3$ dodamo obstoječi družini (W_i, V_i, g_i) za $i = 1, \dots, i_{k-1}$ končno družino takih trojic za indekse $i = i_{k-1}+1,\dots,i_k$, tako da je vsaka množica V_i vsebovana v eni od množic $U_\alpha \in \mathscr{U}$ in velja

$$V_i \subset \mathring{L}_{k+1} \setminus L_{k-2}, \qquad \overline{L_k \setminus L_{k-1}} \subset \bigcup_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} W_i.$$

Naj bo $\{(W_i,V_i,g_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tako dobljena družina. (V primeru $X = L_1$ je to končna družina iz prvega koraka.) Iz konstrukcije je očitno, da je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i = X$ in je družina $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ lokalno končna. Funkcija $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ je pozitivna in razreda $\mathscr{C}^r(X)$. (Ker je družina nosilcev $\mathrm{supp}(g_i)$ lokalno konča, je na vsaki kompaktni množici $K \subset X$ le končno mnogo členov vrste različnih od nič, zato vrsta konvergira v $\mathscr{C}^r(X)$ topologiji na kompaktih v X.) Funkcije $\psi_i = g_i/g \in \mathscr{C}^r(X)$ tedaj zadoščajo pogoju $\mathrm{supp}(\psi_i) = \overline{W}_i$ in $\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i = 1$. Izrek je s tem dokazan. $\square$

Posledica 1.52 *Naj bosta E in F zaprti disjunktni podmnožici $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X. Tedaj obstaja $\mathscr{C}^r$ funkcija $\chi : X \to [0,1]$, ki je enaka 0 na E in je enaka 1 na F.*

Dokaz Izberimo pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ mnogoterosti X, tako da vsaka množica U_α seka kvečjemu eno od množic E,F. Naj bo $\{(V_i,\psi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ prirejena particija enote kot v izreku 1.50. Funkcija $\chi = \sum_i' \psi_i \in \mathscr{C}^r(X)$, kjer je vsota po tistih indeksih i, za katere je $V_i \cap E \neq \varnothing$, očitno zadošča posledici. $\square$

1.6 Podmnogoterosti

Modeli gladkih podmnogoterosti so gladke krivulje in ploskve v evklidskem prostoru. Pojem podmnogoterosti bomo sedaj definirali za podmnožice v poljubni gladki ali kompleksni mnogoterosti.

Definicija 1.53 *Naj bo X mnogoterost dimenzije m in razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty,\omega\}$. Podmnožica $N \subset X$ se imenuje $\mathscr{C}^r$* podmnogoterost *dimenzije $n \in \{0,1,\dots,m\}$ (brez roba), če za vsako točko $p \in N$ obstaja odprta okolica $U \subset X$ in lokalna karta $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ (v maksimalnem atlasu, ki določa $\mathscr{C}^r$ strukturo na X), tako da velja*

$$\phi(N \cap U) \;=\; (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'. \tag{1.15}$$

Povsem analogno definiramo pojem kompleksne podmnogoterosti.

Vsaka lokalna karta (U,ϕ) na X, ki zadošča pogoju (1.15), se imenuje *odlikovana karta* glede na N.

Očitno je $0 \le \dim N \le \dim X$. Oglejmo si najprej mejna primera $\dim N = \dim X$ in $\dim N = 0$. V prvem primeru iz definicij podmnogoterosti ter povezanosti sledi naslednja trditev.

Trditev 1.54 *Naj bo X mnogoterost brez roba. Neprazna podmnožica $N \subset X$ je podmnogoterost (brez roba) dimenzije* $\dim N = \dim X$ *natanko tedaj, ko je N odprta podmnožica množice X. Zaprta podmnožica $N \subset X$ je podmnogoterost dimenzije* $\dim N = \dim X$ *natanko tedaj, ko je N unija (nekaterih) povezanih komponent mnogoterosti X.*

Drug ekstremen primer so podmnogoterosti dimenzije nič.

Trditev 1.55 *Podmnožica $N \subset X$ je podmnogoterost dimenzije* $\dim N = 0$ *natako tedaj, ko je N diskretna podmnožica X, to je, za vsako točko $p \in N$ obstaja odprta okolica $p \in U \subset X$, tako da je $U \cap N = \{p\}$.*

Podmnogoterost ni nujno zaprta v ambientni mnogoterosti, velja pa naslednje.

Trditev 1.56 *Če je N podmnogoterost mnogoterosti X, potem obstaja odprta podmnožica $U \subset X$, tako da je $N \subset U$ in je N zaprta v U.*

Dokaz Naj bo $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ množica vseh lokalnih kart (iz maksimalnega atlasa na X), ki so odlikovane za podmnogoterost N, torej je $N \cap U_i \neq \varnothing$ in velja pogoj (1.15). Odprta množica $U = \bigcup_{i \in I} U_i \subset X$ tedaj očitno zadošča trditvi. $\square$

V nadaljevanju bomo obravnavali podmnogoterosti $N \subset X$ dimenzije $n = \dim N < \dim X = m$. Označimo s $\pi : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ $(n + d = m)$ koordinatno projekcijo $\pi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$. Vsaki odlikovani karti (U, ϕ) (torej taki, ki zadošča pogoju (1.15)) priredimo lokalno karto na N:

$$(N \cap U, \pi \circ \phi|_{N \cap U}), \qquad \pi \circ \phi|_{N \cap U} : N \cap U \to (\pi \circ \phi)(N \cap U) \subset \mathbb{R}^n. \qquad (1.16)$$

Množica tako dobljenih kart sestavlja atlas $\mathscr{U}'$ na N. Prehodne preslikave med kartami v tem atlasu so zožitve prehodnih preslikav med kartami atlasa $\mathscr{U}$ in so zato razreda $\mathscr{C}^r$. Torej atlas $\mathscr{U}'$ določa na N strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti; imenujemo jo *podmnogoterostna struktura*. Število

$$\mathrm{codim}(N, X) \ = \ \dim X - \dim N$$

se imenuje *kodimenzija* podmnogoterosti N v mnogoterosti X. Podmnogoterost kodimenzije 1 se imenuje *hiperploskev*. Iz definicij očitno sledi naslednja trditev.

Trditev 1.57 *Naj bosta X in Y dve $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti in naj bo $N \subset Y$ podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti Y. Zvezna preslikava $f : X \to N$ je razreda $\mathscr{C}^r$ (kot preslikava v mnogoterost N s podmnogoterostno strukturo) natanko tedaj, ko je razreda $\mathscr{C}^r$ kot preslikava v ambientno mnogoterost Y.*

Z uporabo definicije ter particije enote (glej izrek 1.50) je lahko dokazati naslednje.

Trditev 1.58 (Razširitve gladkih funkcij s podmnogoterosti) *Naj bo N zaprta $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti X za nek $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Tedaj za vsako funkcijo*

$f \in \mathscr{C}^r(N)$ obstaja funkcija $F \in \mathscr{C}^r(X)$, tako da je $F|_N = f$. Funkcijo F lahko izberemo tako, da ima nosilec vsebovan v poljubni odprti okolici $U \subset X$ podmnogoterosti N.

Dokaz Predpostaviti smemo, da je mnogoterost X povezana. Če je $\dim N = \dim X$, sledi $N = X$ in ni česa dokazovati. Recimo sedaj, da je $\dim N = n < \dim X = m$. Naj bo $\pi : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ koordinatna projekcija $\pi(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_n)$. Podmnogoterost N pokrijemo s končno ali števno družino odlikovanih lokalnih $\mathscr{C}^r$ kart (U_i,ϕ_i), ki zadoščajo pogoju (1.15) in $\overline{U}_i \subset U$. Naj bo $\phi_i(U_i) = U_i' \subset \mathbb{R}^m$. Brez izgube splošnosti lahko vzamemo, da je družina $\{U_i\}_{i\ge 1}$ lokalno končna in velja

$$\pi(U_i') \;=\; \pi(U_i' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})) \subset \mathbb{R}^n.$$

(Slednje velja npr., če so U_i' krogle s središči v $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.) Na vsaki množici U_i lahko tedaj definiramo projekcijo $\pi_i : U_i \to U_i \cap N$ razreda $\mathscr{C}^r$ s predpisom

$$\phi_i \circ \pi_i \;=\; \pi \circ \phi_i.$$

Dobljenemu odprtemu pokritju $\{U_i\}_{i\ge 1}$ podmnogoterosti N pridružimo še odprto množico $U_0 = X \setminus N$ in s tem dobimo odprto lokalno končno pokritje $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\ge 0}$ mnogoterosti X. Naj bo $\{\psi_i\}_{i\ge 0}$ particija enote razreda $\mathscr{C}^r$ na X včrtana pokritju $\mathscr{U}$, torej je $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$ za vsak i in $\sum_{i\ge 0} \psi_i \equiv 1$ na X (glej izrek 1.50). Odtod sledi $\sum_{i\ge 1} \psi_i|_N \equiv 1$. Tedaj je funkcija

$$F \;=\; \sum_{i\ge 1} \psi_i \cdot f \circ \pi_i : X \to \mathbb{R}$$

dobro definirana, razreda $\mathscr{C}^r$ ter velja $\operatorname{supp}(F) \subset U$. (Funkcija $f \circ \pi_i$ je definirana le na množici U_i, a ker je $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset U_i$, lahko produkt $\psi_i \cdot f \circ \pi_i$ razširimo do $\mathscr{C}^r$ funkcije na X tako, da jo razširimo kot ničelno funkcijo na $X \setminus \operatorname{supp}(\psi_i)$.) $\square$

Opomba 1.59 Analogen razširitveni izrek v splošnem ne velja za preslikave med mnogoterostmi zaradi topoloških obstrukcij. Npr., če je

$$X \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, \quad Y \;=\; \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}, \quad N \;=\; \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

se vložitev $f : N \hookrightarrow Y$, $f(z) = z$, ne da razširiti do zvezne preslikave $F : X \to Y$, saj je f homotopna konstantni preslikavi v krogu X, ne pa tudi v kolobarju Y.

Vselej pa velja naslednji lokalni razširitveni izrek.

Izrek 1.60 *Če je $N \subset X$ (ne nujno zaprta) $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X in je $f : N \to Y$ $\mathscr{C}^r$ preslikava ($r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$), potem lahko f razširimo do $\mathscr{C}^r$ preslikave $F : U \to Y$ na neki odprti okolici $U \subset X$ podmnogoterosti N.*

To je najlažje videti z uporaba izreka 2.69 o obstoju cevastih okolic podmnogoterosti. V bistvu to pomeni obstoj gladke projekcije $\pi : U \to N$ neke odprte okolice $U \subset X$ podmnogoterosti N na N, tako da je N zaprta v U (glej trditev 1.56) in je $\pi|_N$ identiteta na N. Razširitev tedaj dobimo s predpisom $F = f \circ \pi : U \to Y$.

Primer 1.61 Če je $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in je $f = (f_1, \ldots, f_d) : U \to \mathbb{R}^d$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$, potem je njen graf

$$G_f \;=\; \big\{(x, f(x)) : x \in U\big\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$$

podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$. Preslikava

$$\phi : U \times \mathbb{R}^d \to U \times \mathbb{R}^d, \qquad \phi(x,y) = (x, y - f(x)),$$

je difeomorfizem, ki graf G_f preslika na $U \times \{0\}^d$, torej ga globalno izravna.

Analogno je graf holomorfne preslikave $f = (f_1, \ldots, f_d) : U \to \mathbb{C}^d$ na domeni $U \subset \mathbb{C}^n$ kompleksna podmnogoterost kompleksne kodimenzije d v $U \times \mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$.

Podmnogoterosti lahko lokalno, včasih pa tudi globalno, predstavimo kot nivojnice gladkih preslikav. Pri tem igra odločilno vlogo naslednji klasični izrek.

Izrek 1.62 (Izrek o implicitni funkciji) *Naj bo $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Če je f funkcija razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$ in je $df_p \neq 0$, lahko nivojnico $Z = f^{-1}(f(p))$ v okolici točke p predstavimo kot graf $\mathscr{C}^r$ funkcije $m-1$ spremenljivk; torej je Z lokalna $\mathscr{C}^r$ hiperploskev v okolici točke p.*

Splošneje, če je $f = (f_1, \ldots, f_d) : U \to \mathbb{R}^d$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ v neki okolici točke $p \in \mathbb{R}^m$ in ima diferencial df_p v točki p maksimalen rang d, potem lahko nivojnico $Z = f^{-1}(f(p))$ lokalno v okolici točke p predstavimo kot graf neke $\mathscr{C}^r$ preslikave $g = (g_1, \ldots, g_d)$ nad domeno v $\mathbb{R}^{m-d}$. Torej je Z podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ in kodimenzije d (ter dimenzije $m-d$) v neki okolici točke p.

Natančneje: Če je f funkcija razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m$ za nek $r \geq 1$ in je $\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \neq 0$, potem lahko v neki okolici točke p nivojnico $\{f = f(p)\}$ predstavimo kot graf

$$x_m \;=\; g(x_1, \ldots, x_{m-1})$$

neke $\mathscr{C}^r$ funkcije g, definirane v okolici točke $(p_1, \ldots, p_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Koordinatna projekcija $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_{m-1})$ zato podaja lokalno karto razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici p na nivojnici $Z = \{f^{-1}(f(p))\}$.

Analogen izrek velja za holomorfne preslikave. Ker je izrek o implicitni funkciji lokalne narave, velja tudi za funkcije in preslikave na mnogoterostih.

Primer 1.63 Sfera S^n_r s središčem 0 in polmerom $r > 0$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ je podana z enačbo

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \;=\; x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \;=\; r^2.$$

Ker je diferencial df_p enak 0 samo v izhodišču $p = 0$, je S^n_r realno analitična hiperploskev v $\mathbb{R}^{n+1}$ za vsak $\rho > 0$.

Podobno dobimo *kompleksno sfero* $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ kot nivojnico zgornje funkcije, pri čemer spremenljivke $x_0, \dots, x_n$ zavzamejo poljubne kompleksne vrednosti.

Primer 1.64 Če je X gladka mnogoterost dimenzije m z robom, je njen rob ∂X gladka podmnogoterost dimenzije $m-1$. Npr., enotna sfera $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ je rob zaprte enotne krogle

$$\overline{\mathbb{B}}^{m+1} \;=\; \left\{(x_0, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_0^2 + \dots + x_m^2 \le 1\right\}.$$

Naloga 1.65 Pokaži, da za vsako zaprto množico $E \subset \mathbb{R}^n$ obstaja nenegativna gladka funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, da je $\{f = 0\} = E$. Torej nivojnica $f^{-1}(0)$ gladke funkcije v splošnem ni mnogoterost. V tem primeru pogoji izreka o implicitni funkciji niso izpolnjeni.

Izrek o implicitni funkciji je preprosta posledica izreka o inverzni preslikavi. V posebnem primeru $d = 1$ je redukcija naslednja. Preslikava

$$F(x_1, \dots, x_m) \;=\; (x_1, \dots, x_{m-1}, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^m$$

je razreda $\mathscr{C}^r$ v okolici točke p. Njen diferencial dF je podan z Jacobijevo matriko

$$JF \;=\; \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I_{m-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \partial f/\partial x_1 & \dots & \partial f/\partial x_{m-1} & \partial f/\partial x_m \end{array}\right]$$

Ker je $\det JF = \frac{\partial f}{\partial x_m} \neq 0$, je po izreku o inverzni preslikavi F obrnljiva v točki p. Torej lahko enačbo $F(x) = y$ enolično rešimo kot $x = G(y)$ za y v okolici $F(p)$. S primerjavo koordinat dobimo naslednje enačbe za komponente preslikave G:

$$x_1 \;=\; y_1,\; \dots,\; x_{m-1} \;=\; y_{m-1},\;\; x_m \;=\; g_m(x_1, \dots, x_{m-1}, y_m).$$

Ker je nivojnica $Z = \{f = f(p)\}$ določena z enačbo $y_m = f(p)$, iz zgornjih enačb sledi, da je Z lokalno predstavljena z grafom

$$x_m \;=\; g_m(x_1, \dots, x_{m-1}, f(p)).$$

Ker je izrek o implicitni funkciji lokalen, velja za preslikave med gladkimi mnogoterostmi preko prehoda na lokalne karte. Velja torej naslednja trditev.

Trditev 1.66 *Naj bosta X in Y mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \ge 1)$ in $f : X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$. Denimo, da za neko točko $y_0 \in Y$ velja*

$$\mathrm{rang}_x f \;=\; \dim Y \quad \textit{za vsako točko } x \in f^{-1}(y_0).$$

Potem je množica $f^{-1}(y_0)$ podmnogoterost X razreda $\mathscr{C}^r$ in kodimenzije $\dim Y$*; torej*

$$\dim X \;=\; \dim f^{-1}(y_0) + \dim Y.$$

Definicija 1.67 *Število $c \in \mathbb{R}$ je* regularna vrednost *funkcije $f \in \mathscr{C}^r(X)$ $(r \geq 1)$, če je f ranga 1 v vsaki točki $p \in f^{-1}(c)$. (Vsaka vrednost $c \in \mathbb{R} \setminus f(X)$ izven zaloge vrednosti je po definiciji regularna vrednost fnkcije f.) Vrednost $c \in f(X)$, ki ni regularna vrednost, se imenuje* kritična vrednost.

Splošneje, naj bo $f : X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Točka $y \in Y$ je regularna vrednost *preslikave f, če ima f rang $d = \dim Y$ v vsaki točki $x \in f^{-1}(y)$.*

Iz definicije sledi, da je število c kritična vrednost funkcije f natanko tedaj, ko nivojnica $f^{-1}(c)$ vsebuje vsaj eno *kritično točko*, to je točko p, v kateri ima f rang nič. V takih točkah nivojnica ni nujno mnogoterost, kot prikaže naslednji primer.

Primer 1.68 Oglejmo si ravninsko krivuljo, podano z enačbo

$$C \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\right\}.$$

Ekvivalentno: $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Lahko jo parametriziramo s $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) \;=\; t^3, \quad y(t) \;=\; t^2.$$

V točki $(0,0)$ krivulja C ni $\mathscr{C}^1$ podmnogoterost, je pa topološka podmnogoterost.

Naloga: Oglej si nivojnice $x^2 - y^3 = c$ za $c \neq 0$ in pokaži, da so realno analitične podmnogoterosti $\mathbb{R}^2$ dimenzije 1 (krivulje).

Izrek o implicitni funkciji je poseben primer naslednjega izreka o rangu.

Izrek 1.69 (Izrek o rangu preslikave) *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena in $f : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Če je rang*

$$k \;=\; \operatorname{rang} df_x \;=\; \operatorname{rang}_x f \in \{0,1,\ldots,\min\{m,n\}\}$$

konstanten (neodvisen od x) v neki okolici točke $p \in D$, potem obstajata $\mathscr{C}^r$ karti (U,ϕ) na $\mathbb{R}^n$ in (V,ψ) na $\mathbb{R}^m$, tako da je $p \in U \subset D$, $\phi : U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^n$, $\phi(p) = 0$, $f(U) \subset V$, $\psi : V \xrightarrow{\cong} V' \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = 0$, in je preslikava $\tilde{f} = \psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : U' \to V'$ enaka

$$\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0), \quad x = (x_1,\ldots,x_n) \in U'.$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ U' \arrow[r, "\tilde{f}"] & V' \end{tikzcd}$$

Torej je $\tilde{f} = \iota \circ \pi$, pri čemer je

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad \pi(x_1,\dots,x_n) \;=\; (x_1,\dots,x_k) \quad \text{(koordinatna projekcija)},$$

$$\iota : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \iota(x_1,\dots,x_k) \;=\; (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0) \quad \text{(vložitev)}.$$

Izrek o rangu se dokaže podobno kot izrek o implicitni funkciji z redukcijo na izrek o inverzni preslikavi. Ker je izrek lokalen, se direktno posploši na mnogoterosti.

Lokalni difeomorfizmi, imerzije, submerzije:

1. $k = m = n \Longrightarrow \tilde f = \mathrm{Id}$. Preslikava f je *lokalni difeomorfizem*.
2. $k = n \le m \Longrightarrow \tilde f(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)$; f se imenuje *imerzija*.
3. $n \ge m = k \Longrightarrow \tilde f(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_m)$ je projekcija na prvih m koordinat; preslikava f s to lastnostjo se imenuje *submerzija*.

Iz trditve 1.66 in definicije submerzije sledi naslednje.

Posledica 1.70 *Če je $f : X \to Y$ submerzija, je vsako vlakno $f^{-1}(y) \subset X$ $(y \in Y)$ podmnogoterost mnogoterosti X kodimenzije* $\dim Y$ *(in dimenzije* $\dim X - \dim Y$*).*

Do sedaj smo obravnavali le podmnogoterosti brez roba v dani mnogoterosti X. Podmnogoterosti z robom $N \subset X$ uvedemo z manjšo dopolnitvijo definicije s tem, da zahtevamo v vsaki robni točki $p \in \partial N$ obstoj lokalne karte na X, ki lokalno izravna tako N kot tudi ∂N. Spomnimo se (glej (1.2)), da $\mathbb{H}^n$ označuje zaprt polprostor

$$\mathbb{H}^n \;=\; \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \ge 0\big\}, \quad \mathring{\mathbb{H}}^n \;=\; \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\big\}.$$

Definicija 1.71 (Podmnogoterosti z robom) *Naj bo X mnogoterost (brez roba ali z robom) dimenzije m in razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty,\omega\}$. Podmnožica $N \subset X$ se imenuje $\mathscr{C}^r$* podmnogoterost *dimenzije $n \in \{1,\dots,m\}$ z robom, če za vsako točko $p \in N$ obstajata odprta okolica $U \subset X$ in lokalna karta $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ (če je X mnogoterost z robom, je lahko tudi $\phi : U \to U' \subset \mathbb{H}^m$) v maksimalnem atlasu na X, tako da velja*

$$\phi(N \cap U) \;=\; (\mathbb{H}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'. \tag{1.17}$$

Vsaka karta (U,ϕ) s to lastnostjo se imenuje odlikovana glede na N. Upoštevaje lego točke $\phi(p)$ ločimo dve možnosti:

1. $\phi(p) \in (\mathring{\mathbb{H}}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'$. Če okolico U skrčimo okrog p, je

   $$\phi(N \cap U) \;=\; (\mathring{\mathbb{H}}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U' \;=\; (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U'.$$

   Taka karta je torej kot v definiciji (1.17) podmnogoterosti brez roba. V tem primeru se p imenuje notranja točka podmnogoterosti N.
2. $\phi(p) \in (\partial\mathbb{H}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap U' = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}^{m-n+1}) \cap U'$. Točka $p \in N$ s to lastnostjo se imenuje robna točka podmnogoterosti N.

Tako kot v podrazdelku 1.1.2 lahko vidimo, da je vsaka točka $p \in N$ bodisi notranja točka bodisi robna točka podmnogoterosti N. Množico vseh robnih točk označimo z ∂N, točke v $N \setminus \partial N$ pa imenujemo notranje točke. Če izbrane karte postkomponiramo s projekcijo $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kot v (1.16), dobimo $\mathscr{C}^r$ atlas na N, ki določa strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti dimenzije n z robom ∂N. Rob ∂N je tedaj podmnogoterost brez roba dimenzije $n-1$ v X.

Opomba 1.72 Zgoraj definirana pojma notranjosti in roba podmnogoterosti se ne ujemata s topološko notranjostjo in robom, razen v primeru ko je $\dim N = \dim X$. Na primer, če je $X = \mathbb{R}^2$ in $N = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$, potem je topološka notranjost N v X prazna in N je svoj topološki rob. V smislu podmnogoterosti pa je rob enak $\partial N = \{(0,0),(1,0)\}$ in notranjost $N \setminus \partial N = \{(x,0) : 0 < x < 1\}$. Iz tega razloga se v nekaterih virih mnogoterostni rob označuje z bN. Mi bomo uporabljali oznako ∂N, v primeru topološkega roba pa bomo to posebej poudarili.

Primer 1.73 Podmnogoterost $N \subset X$ z robom dimenzije $\dim N = \dim X$ se imenuje *domena z robom* v X. Primer je npr. zaprta krogla v $X = \mathbb{R}^n$:

$$\overline{\mathbb{B}}^n \ = \ \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1\Big\},$$

katere rob (mnogoterostni in topološki) je sfera dimenzije $n-1$:

$$\partial\overline{\mathbb{B}}^n \ = \ \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\Big\} \ = \ S^{n-1}.$$

Splošneje, če je $\rho : X \to \mathbb{R}$ neka $\mathscr{C}^r$ funkcija $(r \ge 1)$ na $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X in je število $c \in \mathbb{R}$ regularna vrednost ρ, potem je zaprta podnivojnica

$$D \ = \ \{x \in X : \rho(x) \le c\}$$

podmnogoterost (zaprta domena) dimenzije $\dim X$ z robom

$$\partial D \ = \ \{x \in X : \rho(x) = c\}.$$

To sledi neposredno iz izreka o implicitni funkciji. Taka funkcija ρ se imenuje *definicijska funkcija* domene D.

Posebno zanimiv primer je, ko sta X in $N \subset X$ mnogoterosti z robom in je $\partial N \subset \partial X$. Tak primer dobimo npr., če je X zaprta domena z gladkim robom v neki večji mnogoterosti X' brez roba (glej primer 1.73) in je $M \subset X'$ zaprta gladka podmnogoterost brez roba, ki seka rob ∂X transverzalno v neprazni množici $M \cap \partial X$. (Pojem transverzalnosti obravnavamo v razdelku 4.2.) Tedaj je $N = M \cap X$ gladka podmnogoterost z robom $\partial N = M \cap \partial X$ in njena notranjost $\mathring{N} = N \setminus \partial N$ je zaprta gladka podmnogoterost brez roba v notranjosti $\mathring{X} = X \setminus \partial X$.

Kot preprost primer vzemimo, da je X zaprta krogla v $\mathbb{R}^n$ in je $M \subset \mathbb{R}^n$ afino linearen podprostor, ki ni tangenten na sfero $\partial X \cong S^{n-1}$ in seka odprto kroglo $\mathring{X}$. Tedaj je $N = M \cap X$ zaprta krogla v podprostoru $M \cong \mathbb{R}^m$ z robom $\partial N = \partial X \cap M$, difeomorfnim $(m-1)$-sferi S^{m-1}.

Primer 1.74 Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ zaprta domena z robom ∂D razreda $\mathscr{C}^r$. Za vsako funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ razreda $\mathscr{C}^r$ je njen graf

$$G_f \; = \; \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ dimenzije 2 (ploskev) z robom $\partial G_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \partial D\}$, ki je enorazsežna $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost (krivulja) v $\mathbb{R}^3$. Vsaka ploskev z robom je lokalno te oblike v nekih lokalnih koordinatah.

1.7 Imerzije in vložitve mnogoterosti

Naj bosta X in Y mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \in \{1,2,\dots,\infty,\omega,\mathscr{O}\}$. Zanima nas, kdaj je slika $f(X) \subset Y$ neke $\mathscr{C}^r$ preslikave $f : X \to Y$ podmnogoterost v Y.

Izrek 1.69 o rangu preslikave pove naslednje.

Trditev 1.75 *Če je X mnogoterost brez roba in je $f : X \to Y$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 1)$ s konstantnim rangom k, ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $f(U) \subset Y$ podmnogoterost dimenzije k in razreda $\mathscr{C}^r$ v Y. V posebnem to velja za vsako imerzijo $f : X \to Y$.*

Podobno, če je X mnogoterost z robom ∂X in je $f : X \to Y$ imerzija, ima vsaka točka $p \in \partial X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $f(U)$ podmnogoterost z robom $f(U \cap \partial X)$ mnogoterosti Y (glej definicijo 1.71).

Torej je vsaka imerzija $f : X \to Y$ *lokalna vložitev* v smislu, da ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$, tako da je $f : U \to Y$ vložitev.

Slika imerzije ni nujno podmnogoterost. Najočitnejši razlog so morebitne dvojne točke (samopresečišča) preslikave f, vendar to ni edini razlog. Zelo komplicirane injektivno imerzirane mnogoterosti, ki niso podmnogoterosti v smislu definicije 1.53, se pojavijo pri študiju dinamičnih sistemov, npr. kot tokovnice vektorskih polj ali kot stabilne in nestabilne mnogoterosti negibnih točk difeomorfizmov. Za vsak par povezanih mnogoterosti X,Y dimenzij $1 \leq \dim X < \dim Y$ obstaja injektivna imerzija $f : X \to Y$, katere slika $f(X)$ je povsod gosta v ambientni mnogoterosti Y; slika $f(X)$ torej ni podmnogoterost v nobeni točki $y \in f(X)$.

Pozitiven odgovor na uvodoma zastavljeno vprašanje podaja naslednji izrek.

Izrek 1.76 (Vložitve mnogoterosti) *Naj bo $f : X \to Y$ injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Slika $f(X) \subset Y$ je $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti Y (v smislu definicije 1.53) natanko tedaj, ko je $f : X \to f(X)$ homemorfizem, pri čemer je $f(X)$ opremljena z relativno topologijo podprostora v Y. Analogen izrek velja za mnogoterosti z robom.*

Definicija 1.77 *Injektivna $\mathscr{C}^r$ imerzija $f : X \to Y$, ki je homemorfizem X na sliko $f(X) \subset Y$ glede na relativno topologiji na $f(X)$, se imenuje $\mathscr{C}^r$* vložitev *X v Y.*

Dokaz Obravnavali bomo primer, ko je X mnogoterost brez roba; dokaz za mnogoterosti z robom je podoben.

Naj bo $f : X \to Y$ injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$. Označimo $n = \dim X$ in $m = \dim Y$; torej je $n \leq m$. Izberimo točko $q \in f(X)$. Tedaj obstaja natanko ena točka $p \in X$, da je $q = f(p)$. Po izreku o rangu (izrek 1.69) obstajajo odprta okolica $U \subset X$ točke p, odprta okolica $V \subset Y$ točke q in lokalna karta $\psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^m$, da je

$$\psi(f(U) \cap V) \; = \; V' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}). \tag{1.18}$$

Predpostavimo sedaj, da je $f : X \to f(X)$ homeomorfizem. Tedaj je množica $f(U)$ odprta v relativni topologiji na $f(X)$. Zato obstaja odprta množica $W \subset Y$, da je

$$f(U) \; = \; f(X) \cap W. \tag{1.19}$$

Množica $V_0 = V \cap W$ je odprta okolica točke $q = f(p)$ v Y. Iz (1.18) in (1.19) sledi

$$f(X) \cap V_0 \; = \; (f(X) \cap W) \cap V \; = \; f(U) \cap V. \tag{1.20}$$

Preslikava $\psi : V_0 \to V_0' := \psi(V_0) \subset \mathbb{R}^m$ je karta na Y. Iz (1.18) in (1.20) sledi

$$\psi(f(X) \cap V_0) \; = \; V_0' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}). \tag{1.21}$$

Ker to velja za poljubno točko $q \in f(X)$, je $f(X)$ podmnogoterost v Y.

Obratno, predpostavimo da je $f(X)$ podmnogoterost in dokažimo, da je preslikava $f : X \to f(X)$ homeomorfizem. Ker je f zvezna in bijektivna na svojo sliko, zadošča dokazati da je odprta preslikava.

Fiksirajmo $p \in X$. Tedaj obstaja okolica $V_0 \subset Y$ točke $q = f(p) \in Y$ in karta $\psi : V_0 \to V_0' \subset \mathbb{R}^m$, ki zadošča pogoju (1.21). Ker je f imerzija, obstaja okolica $p \in U \subset X$, da je $f(U) \subset V_0$ in je $\psi \circ f : U \to (\psi \circ f)(U) =: V'$ difeomorfizem na odprto podmnožico $V' \subset (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}) \cap V_0'$ v podprostoru $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$. Izberimo odprto množico $W' \subset V_0'$, da je $V' = W' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n})$. Ker je $\psi : V_0 \to V_0'$ homeomorfizem, je množica $W = \psi^{-1}(W') \subset Y$ odprta v Y. Iz definicije sledi $f(U) = f(X) \cap W$ (primerjaj z (1.19)). To pomeni, da je množica $f(U)$ odprta v relativni topologiji na $f(X)$. Ker to velja za vsako dovolj majhno odprto okolico $U \subset X$ poljubne točke $p \in X$, je preslikava $f : X \to f(X)$ odprta. $\square$

Naslednja definicija uvaja pomemben pojem *prave preslikave*. To je topološki pogoj, ki med drugim zagotovi, da je preslikava zaprta (to je, slika vsake zaprte množice v domeni je zaprta množica v kodomeni); glej točko (e) v nalogi 1.79. Torej je injektivna zvezna prava preslikava $f : X \to Y$ homeomorfizem X na sliko $f(X) \subset Y$ v relativni topologiji, podedovani iz Y.

Definicija 1.78 *Zvezna preslikava $f : X \to Y$ topoloških prostorov se imenuje* prava*, če je za vsako kompaktno množico $K \subset Y$ praslika $f^{-1}(K) = \{x \in X : f(x) \in K\}$ tudi kompaktna.*

Naloga 1.79 Naj bosta X in Y lokalno kompaktna Hausdorffova topološka prostora (npr. mnogoterosti). Dokaži naslednje trditve.

(a) Če je X kompakten prostor, je vsaka zvezna preslikava $f : X \to Y$ prava.

(b) Preslikava $f : X \to Y$ je prava natanko tedaj, ko je za vsako diskretno množico $A = \{a_j\} \subset X$ njena slika $f(A) = \{f(a_j)\} \subset Y$ diskretna v Y. (Podmnožica $A \subset X$ je diskretna, če je zaprta in je vsaka njena točka izolirana.) V posebnem je preslikava $f : X \to \mathbb{R}^N$ prava natanko tedaj, ko za vsako diskretno množico $A = \{a_j\} \subset X$ velja $\lim_{j\to\infty} |f(a_j)| = +\infty$.

(c) Dokaži, da ima vsaka $\mathscr{C}^r$ mnogoterost X pravo $\mathscr{C}^r$ funkcijo $\rho : X \to [0,+\infty)$, to je funkcijo, za katero je vsaka zaprta podnivojnica $\{x \in X : \rho(x) \le c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ kompaktna. (Navodilo: uporabi normalno izčrpanje X z zaporedjem kompaktov in particijo enote.)

(d) Naj bosta X in Y kompaktni topološki mnogoterosti z robom in naj bo $f : X \to Y$ zvezna preslikava, ki preslika notranjost $\mathring{X} = X \setminus \partial X$ v notranjost $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$. Dokaži, da je preslikava $f : \mathring{X} \to \mathring{Y}$ prava natanko tedaj, ko velja $f(\partial X) \subset \partial Y$, to je, f preslika rob mnogoterosti X v rob mnogoterosti Y.

(e) Vsaka prava preslikava $f : X \to Y$ je *zaprta*, to je, slika $f(E) \subset Y$ poljubne zaprte množice $E \subset X$ je zaprta množica v Y.

(f) **(Lokalizacija pravih preslikav.)** Če je f prava, potem za vsako točko $q \in Y$ in odprto množico $U \subset X$, ki vsebuje prasliko $f^{-1}(q)$, obstaja taka odprta okolica $V \subset Y$ točke q, da je $f^{-1}(V) \subset U$.

Iz točke (e) v nalogi 1.79 in izreka 1.76 sledi naslednja trditev. V drugem delu upoštevamo, da je vsaka zvezna preslikava $f : X \to Y$ z neke kompaktne mnogoterosti X prava.

Posledica 1.80 *Če je $f : X \to Y$ prava injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \ge 1)$, je $f(X) \subset Y$ zaprta $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti Y in $f : X \to f(X)$ je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem. V posebnem, če je X kompaktna mnogoterost in je $f : X \to Y$ injektivna imerzija razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \ge 1)$, je slika $f(X) \subset Y$ kompaktna $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost mnogoterosti Y in $f : X \to f(X)$ je $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem.*

Pojavi se naravno vprašanje, ali lahko vse gladke mnogoterosti predstavimo kot gladke podmnogoterosti kakšnega razreda modelnih mnogoterosti, npr. evklidskih prostorov $\mathbb{R}^N$. Naslednji klasični izrek je dokazal H. Whitney leta 1936.

Izrek 1.81 *Za vsako mnogoterost X razreda $\mathscr{C}^r$ $(r = 1,2,\dots,\infty)$ obstaja prava $\mathscr{C}^r$ vložitev $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ v evklidski prostor dimenzije $N = 2\dim X + 1$.*

Nekoliko kasneje je Whitney z uvedbo danes slavnega *Whitneyevega trika* (glej [45]) pokazal, da obstaja tudi prava $\mathscr{C}^r$ vložitev $X^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ v evklidski prostor dvojne dimenzije, kar je v splošnem najnižja možna vložitvena dimenzija. Bistvo tega trika je, kako odpraviti (izolirane) dvojne točke (samopresečišča) generično izbrane imerzije $X^n \to \mathbb{R}^{2n}$. Znano je tudi, da je dvojna dimenzija v splošnem najnižja možna v Whitneyjevem izreku. Primer je npr. projektivni prosto $\mathbb{RP}^2$ ali Kleinova steklenica, ki ju lahko vložimo v $\mathbb{R}^4$, ne pa v $\mathbb{R}^3$.

Seveda pa je *vložitvena dimenzija* dane mnogoterosti X, to je najmanjše število $N = N(X) \in \mathbb{N}$, za katero lahko X vložimo kot podmnogoterost v $\mathbb{R}^N$, odvisna predvsem od topološke kompleksnosti X.

Naloga 1.82 *Z uporabo lokalnih kart in particije enote dokaži, da ima vsaka kompaktna $\mathscr{C}^r$ mnogoterost X vložitev $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $N \in \mathbb{N}$.*

Whitneyev izrek 1.81 velja tudi v realno analitični kategoriji, vendar ga je dokazal šele leta 1958 Hans Grauert [21] z uporabo kompleksno analitičnih metod.

Analogen izrek v splošnem ne velja v kategoriji kompleksnih mnogoterosti. Eden od očitnih razlogov je, da kompaktna povezana kompleksna mnogoterost nima nobene nekonstantne holomorfne funkcije zaradi principa maksimuma. Iz istega razloga kompleksna mnogoterost X, ki vsebuje kakšno kompaktno kompleksno podmnogoterost pozitivne dimenzije, ne dopušča nobene injektivne holomorfne preslikave $f : X \to \mathbb{C}^N$.

Kompleksna mnogoterost X, ki ima pravo holomorfno vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ v nek kompleksen evklidski prostor, se imenuje *Steinova mnogoterost*. Ta pomemben razred kompleksnih mnogoterosti je v literaturo vpeljal Karl Stein leta 1951. Riemannova ploskev X je Steinova natanko tedaj, ko je odprta (nekompaktna); to sta leta 1949 dokazala Behnke in Stein [6]. Steinova mnogoterost X ima pravo holomorfno vložitev v $\mathbb{C}^{2\dim X+1}$, in celo v $\mathbb{C}^{\left[\frac{3\dim X}{2}\right]+1}$ če je $\dim X \geq 2$; slednji rezultat je optimalen. Dokaz optimalnega vložitvenega izreka, ki sta ga podala leta Eliashberg in Gromov [11], je konceptualno in tehnično zelo zahteven. Med razlogi, da lahko Steinovo n-mnogoterost X vložimo v evklidski prostor dimenzije približno $3n/2+1$ (in ne potrebujemo višje dimenzije $2n$ kot v primeru realnih mnogoterosti), je dejstvo, da ima taka mnogoterost X netrivialno topologijo samo do realne dimenzije n. Natančneje, X je homotopno ekvivalentna CW kompleksu (realne) dimenzije $\leq n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Vsaka odprta Riemannova ploskev ima pravo holomorfno vložitev kot kompleksna krivulja v $\mathbb{C}^3$, ni pa znano, ali ima tudi holomorfno vložitev v $\mathbb{C}^2$. Znano je npr., da lahko vsako domeno v $\mathbb{C}$ oblike $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup D_i$, katere komplement sestoji iz kompaktnih, paroma disjunktnih, enostavno povezanih domen $D_i \subset \mathbb{C}$ z gladkim robom, pravilno holomorfno vložimo v $\mathbb{C}^2$.

Kompaktna kompleksna mnogoterost X se imenuje *projektivno algebraična*, če obstaja holomorfna vložitev $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ v nek kompleksen projektivni prostor. (Ker je X kompaktna, je vsaka preslikava $X \hookrightarrow \mathbb{CP}^N$ prava.) V tem primeru obstaja vložitev v $\mathbb{CP}^N$ z $N = 2\dim_{\mathbb{C}} X + 1$, v splošnem pa ne v $\mathbb{CP}^{2\dim X}$. V posebnem ima vsaka kompaktna Riemannova ploskev holomorfno vložitev v $\mathbb{CP}^3$, velika večina takih krivulj pa ne moremo vložiti v $\mathbb{CP}^2$ (lahko pa jih holomorfno imerziramo v $\mathbb{CP}^2$ s končno mnogo samopresečišči). Projektivne mnogoterosti in splošnejše projektivno algebraične množice s singularnostmi ter algebraične preslikave med njimi (glej razdelek 1.3.4) so osnovni objekti algebraične geometrije.

1.8 Krovne in kvocientne mnogoterosti

V tem razdelku si bomo ogledali pojem krovne projekcije ter zvezo med krovnimi prostori in diskretnimi grupami avtomorfizmov mnogoterosti.

1.8.1 Lokalni homeomorfizmi in krovni prostori

Naslednja trditev pokaže, da lahko gladka strukturo na neki mnogoterosti Y določa natanko eno strukturo gladke mnogoterosti na topološki mnogoterosti X, v kateri je dani lokalni homeomorfizem $\pi : X \to Y$ gladka preslikava.

Trditev 1.83 *Naj bo $\pi : X \to Y$ lokalni homeomorfizem Hausdorffovih 2-števnih prostorov. Če ima Y strukturo $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti, potem obstaja na X natanko določena struktura $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti, tako da je π lokalni $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem.*

Dokaz Naj bo $\mathscr{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ $\mathscr{C}^r$-atlas na Y. Naj bo $U \subset X$ dovolj majhna odprta množica, tako da je $\pi|_U : U \to \pi(U) \subset Y$ homeomorfizem in je $\pi(U) \subset V_j$ za nek j. Kompozicija $\psi_j \circ \pi : U \to \mathbb{R}^n$ je tedaj homeomorfizem na odprto podmnožico $(\psi_j \circ \pi)(U) \subset \mathbb{R}^n$. Par $(U, \psi_j \circ \pi|_U)$ vzamemo za lokalno karto na X. Prostor X lahko pokrijemo s takimi kartami in dobimo atlas $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X. Prehodna preslikava med kartama ϕ_i in ϕ_j je enaka

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} = (\psi_i \circ \pi|_{U_i}) \circ (\psi_j \circ \pi|_{U_j})^{-1} = \psi_i \circ \pi|_{U_i} \circ (\pi|_{U_j})^{-1} \circ \psi_j^{-1} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}.$$

Torej dobimo iste prehodne preslikave kot v atlasu $\mathscr{V}$, zato je $\mathscr{U}$ $\mathscr{C}^r$-atlas. $\square$

Oglejmo si sedaj obratni problem. Naj bo $\pi : X \to Y$ lokalni homeomorfizem. Predpostavimo, da sta X in Y 2-števna Hausdorffova prostora in je π surjektivna. Recimo, da je X opremljena s strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti. Vprašanje je, kdaj obstaja $\mathscr{C}^r$-struktura na Y, tako da je π lokalni $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem.

Recimo, da za neko točko $y \in Y$ obstajata dve točki $x_1 \neq x_2 \in X$, tako da velja $\pi(x_1) = \pi(x_2) = y$. Ker je π lokalni homeomorfizem, obstajajo okolice $x_1 \in U_1 \subset X$, $x_2 \in U_2 \subset X$ in $y \in V \subset Y$, da je $\pi|_{U_j} : U_j \to V$ homeomorfizem za $j = 1,2$. Če sta U_1, U_2 dovolj majhni, potem obstajata $\mathscr{C}^r$ lokalni karti $\phi_j : U_j \xrightarrow{\cong} U'_j \subset \mathbb{R}^n$ za $j = 1,2$. Sedaj dobimo dve lokalni karti na Y:

$$(V, \underbrace{\phi_j \circ (\pi|_{U_j})^{-1}}_{\psi_j}) \quad \text{za } j = 1,2.$$

Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$\begin{aligned}\psi_2 \circ \psi_1^{-1} &= \phi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\phi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1})^{-1} = \phi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \pi|_{U_1} \circ \phi_1^{-1} \\ &= \phi_2 \circ \underbrace{((\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1})}_{U_1 \xrightarrow{\cong} U_2} \circ \phi_1^{-1}.\end{aligned}$$

Če bi vedeli, da je $\pi_{12} \stackrel{def}{=} (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}$ difeomorfizem (v dani $\mathscr{C}^r$-strukturi na X), lahko zaključimo, da sta karti (V, ψ_1) in (V, ψ_2) na Y $\mathscr{C}^r$ kompatibilni.

Poiskali bomo naravne pogoje na projekcijo π, pri katerih je zgornji pogoj izpolnjen. V ta namen si najprej oglejmo posebno pomemben razred preslikav, ki se imenujejo krovne projekcije.

Definicija 1.84 (Krovna projekcija) *Zvezna surjektivna preslikava $\pi : X \to Y$ topoloških prostorov se imenuje (topološka)* krovna projekcija*, če ima vsaka točka $y \in Y$ odprto povezano okolico $V \subset Y$, katere praslika*

$$\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

je disjunktna unija odprtih podmnožic $U_\alpha \subset X$, tako da je za vsak $\alpha \in A$ zožitev

$$\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \xrightarrow{\cong} V$$

homeomorfizem množice U_α na množico V. Tako trojico (X,Y,π) imenujemo krovni prostor *ali* krov*. Prostor X je* totalni prostor*, Y pa je* bazni prostor *krova. Če je totalni prostor X povezan in enostavno povezan, potem se (X,Y,π) imenuje* univerzalni krov *nad Y in $\pi : X \to Y$ je* univerzalna krovna projekcija*.*

Če sta X in Y mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ in je krovna projekcija $\pi : X \to Y$ razreda $\mathscr{C}^r$, se (X,Y,π) imenuje $\mathscr{C}^r$ krov; holomorfen krov v primeru holomorfne preslikave med kompleksnima mnogoterostima.

Krovna projekcija je isto kot sveženj z diskretno topologijo na vlaknu $A \cong \pi^{-1}(y)$. O svežnjih s splošnejšimi vlakni bomo govorili v naslednjem razdelku.

Očitno je vsak krov lokalni homeomorfizem, obratno pa ne velja nujno. Npr., vložitev $(a,b) \hookrightarrow \mathbb{R}$ odprtega intervala v realno os je homeomorfizem na svojo sliko, ni pa krov, saj v krajiščih število praslik na vlaknu poskoči od 0 na 1 ali obratno.

Iz trditve 1.83 vidimo, da za vsak topološki krov $\pi : X \to Y$, katerega bazni prostor Y je $\mathscr{C}^r$ mnogoterost, obstaja natanko določena $\mathscr{C}^r$ struktura na X, v kateri je (X,Y,π) krov razreda $\mathscr{C}^r$. V obratni smeri dokaži naslednjo trditev.

Naloga 1.85 *Dokaži: Če je X kompaktna mnogoterost in je $\pi : X \to Y$ surjektiven lokalni homeomorfizem, potem je π končno listni krov, to je, krov s končnim vlaknom.*

Definicija 1.86 *Naj bo $\pi : X \to Y$ krov. Homeomorfizem $f : X \to X$, ki zadošča pogoju $\pi \circ f = \pi$, se imenuje* krovna translacija *ali* avtomorfizem krova*.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.22}$$

Krova $\pi : X \to Y$ in $\pi' : X' \to Y$ nad isto bazo Y sta izomorfna*, če obstaja homeomorfizem $f : X \to X'$, tako da komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

Tak homeomorfizem f se imenuje izomorfizem prvega krova v drugi krov.

Krov $\pi : X \to Y$ je trivialen, če je izomorfen produktnemu krovu $X \times A \to X$, kjer je A množica z diskretno topologijo.

Pogoj $\pi \circ f = \pi$ v (1.22) pomeni, da za vsako točko $x \in X$ leži njena slika $f(x)$ na istem vlaknu preslikave π, torej $f(x) \in \pi^{-1}(\pi(x))$. Iz definicij sledi, da je krovna translacija na vsaki odprti povezani množici $U_\alpha \subset X$ kot v definiciji 1.84 oblike

$$f|_{U_\alpha} = (\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U_\beta$$

za nek indeks β; torej f permutira povezane komponente množice $\pi^{-1}(V) \subset X$. Odtod sledi, da je f istega razreda gladkosti kot krovna projekcija π. Podobno vidimo, da je izomorfizem krovov istega razreda gladkosti kot oba krova.

Množica $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ vseh krovnih translacij krova π je očitno grupa za kompozicijo, torej je podgrupa grupe vseh homeomorfizmov totalnega prostora X.

Naloga 1.87 *Naj bo X povezana mnogoterost. Če je $f \in \mathrm{Deck}_\pi(X)$ in $f(x_0) = x_0$ za neko točko $x_0 \in X$, potem je f identiteta na X. (Navodilo: pokaži, da je množica $\{x \in X : f(x) = x\}$ odprta in zaprta v X.)*

Analogno dokaži, da je izomorfizem povezanih krovov (1.23) *natanko določen z vrednostjo v poljubni točki $x_0 \in X$.*

Definicija 1.88 *Krov $\pi : X \to Y$ se imenuje* regularen*, če grupa* $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ *krovnih translacij deluje tranzitivno na vsakem vlaknu, to je, poljubni dve točki na istem vlaknu $\pi^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ lahko preslikamo eno v drugo s krovno translacijo.*

Če je $\pi : X \to Y$ regularen krov, potem je očitno

$$Y \cong X/\mathrm{Deck}_\pi(X) = X/\sim,$$

kjer je relacija $\sim$ definirana s pogojem

$$x \sim x' \iff \exists \sigma \in \mathrm{Deck}_\pi(X),\ \sigma(x) = x'.$$

Kvocient Y se v takem primeru imenuje *prostor orbit* grupe $\mathrm{Deck}_\pi(X)$. Ker je vsaka krovna translacija natanko določena z vrednostjo v eni točki, je vlakno $\pi^{-1}(y)$ nad poljubno točko $y \in Y$ izomorfno grupi $\mathrm{Deck}_\pi(X)$.

Primer 1.89 Oglejmo si nekaj osnovnih primerov krovnih projekcij.

(a) $X = \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x+1$, $\mathbb{R}/\langle\sigma\rangle = S^1$ je krožnica. Kvocientna preslikava $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\langle\sigma\rangle$ priredi realnemu številu x njegov ulomljeni del $x - [x] \in [0,1)$, kjer je $[x] \in \mathbb{Z}$ celi del števila x, to je največje celo število $[x] \le x$. Lahko je videti, da je to krovna projekcija s krovno grupo $\mathrm{Deck}_p(\mathbb{R}) = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}$. Če kvocient prestavimo kot enotno krožnico $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, potem je preslikava $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) \ = \ e^{2\pi \mathrm{i} x}$, univerzalna krovna projekcija.

(b) Nadomestimo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$ in opazujmo $\sigma(z) = z+1$ kot translacijo na $\mathbb{C}$. Sedaj je kvocient $\mathbb{C}/\langle\sigma\rangle$ izomorfen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in univerzalna krovna projekcija je $\mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^*$, $p(z) = e^{2\pi i z}$. Tako kot prej je $\mathrm{Deck}_p(\mathbb{C}) = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}$.

(c) Naj bo $p : \mathbb{R} \to S^1$ kot v točki (a). Za vsak $k \in \mathbb{N}$ preslikava $\mathbb{R} \ni x \xmapsto{f_k} kx \in \mathbb{R}$ inducira k-listno krovno projekcijo $g_k : S^1 \to S^1$, tako da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "g_k"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Če S^1 predstavimo z enotno krožnico $S^1 \subset \mathbb{C}$ kot v točki (a), je g_k podana s preslikavo $e^{\mathrm{i}\theta} \mapsto e^{k\mathrm{i}\theta}$, to je zožitev k-te potence $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$ na krožnico. Vlakno $g_k^{-1}(w) = \{z_1, \dots, z_k\}$ so k-ti koreni števila $w = e^{i\theta} \in S^1$:

$$z_j \ = \ e^{\frac{i\theta}{k} + j\frac{2\pi i}{k}}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Grupa krovnih translacij krova $g_k : S^1 \to S^1$ je generirana z rotacijo

$$S^1 \ni e^{\mathrm{i}\theta} \ \xmapsto{\sigma} e^{\mathrm{i}\theta + 2\pi\mathrm{i}/k} \in S^1$$

za kot $\frac{2\pi}{k}$. Torej je $\mathrm{Deck}_{g_k}(S^1) = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

(d) Preslikava $\mathbb{C}^* \ni z \xmapsto{g_k} z^k \in \mathbb{C}^*$ je krovna preslikava s podobnimi lastnostmi kot njena zožitev na krožnico v točki (c). Univerzalna krovna prijekcija $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^*$ je podana s preslikavo $z \mapsto e^{2\pi\mathrm{i} z}$.

(e) Naj bo $\Gamma = \langle\sigma, \tau\rangle \cong \mathbb{Z}^2$ prosta abelova grupa na dveh generatorjih v grupi $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$, generirana s translacijama

$$\sigma(x,y) \ = \ (x+1, y), \qquad \tau(x,y) \ = \ (x, y+1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Kvocient (prostor orbit) je 2-dimenzionalni torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$.

1.8.2 Povsem nezvezna delovanja grup

Sedaj si oglejmo obraten problem. Denimo, da je X mnogoterost, na kateri neka grupa Γ deluje kot grupa homeomorfizmov (oz. difeomorfizmov, če je X gladka). Zanima nas, pod kakšnimi pogoji je kvocientna projekcija $\pi : X \to Y$ na prostor orbit $Y = X/\Gamma$ krovna projekcija. Glavni rezultat razdelka je izrek 1.97.

Najprej definirajmo pojem delovanja grupe na mnogoterosti. Označimo z $\mathrm{Diff}^r(X)$ množico vseh $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmov neke $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti X; to je očitno grupa za kompozicijo. Za $r = 0$ je $\mathrm{Diff}^0(X) = \mathrm{Homeo}(X)$ grupa homeomorfizmov

Definicija 1.90 *Naj bo X $\mathscr{C}^r$-mnogoterost in Γ neka abstraktna grupa z enoto $1 \in \Gamma$. Grupa Γ deluje kot grupa $\mathscr{C}^r$ difeomorfizmov na X, če je vsakemu elementu $g \in \Gamma$ prirejen nek difeomorfizem $\theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X)$, tako da velja*

$$\theta_1 \;=\; \mathrm{Id}_X, \quad \theta_{gg'} \;=\; \theta_g \circ \theta_{g'} \;\; (g, g' \in \Gamma), \quad \theta_{g^{-1}} \;=\; \theta_g^{-1} \;\; (g \in \Gamma).$$

Ekvivalentno,

$$\Gamma \ni g \;\longmapsto\; \theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X) \;\; \textit{je homomorfizem grup.} \tag{1.24}$$

Grupa Γ deluje zvesto *na X, če je homomorfizem* (1.24) *injektiven, torej $\theta_g \neq \mathrm{Id}_X$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$.*

Tako delovanje grupe Γ na X se imenuje *levo delovanje*. *Desno delovanje* definiramo s pogojem $\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g$. Omejili se bomo na leva delovanja.

Če je delovanje zvesto, lahko grupni element $g \in \Gamma$ identificiramo s prirejenim difeomorfizmom $\theta_g \in \mathrm{Diff}^r(X)$; s tem identificiramo Γ z ustrezno podgrupo v $\mathrm{Diff}^r(X)$. V tem primeru bomo uporabljali preprostejšo oznako

$$\theta_g(x) \;=\; g \cdot x, \qquad x \in X,\; g \in \Gamma.$$

Brez izgube splošnosti se omejimo na zvesta delovanja.

Orbita točke $x \in X$ glede na dano grupo $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ je množica

$$\Gamma x \;=\; \{g \cdot x : g \in \Gamma\} \subset X.$$

Relacija

$$x \sim y \;\overset{def}{\Longleftrightarrow}\; \big(\exists g \in \Gamma, \text{ da je } g \cdot x = y\big) \;\Longleftrightarrow\; \Gamma x \;=\; \Gamma y$$

je ekvivalenčna relacija na X, torej je X unija paroma disjunktnih orbit. Kvocientni prostor X/Γ se imenuje *prostor orbit*.

Primer 1.91 Naj bo X *Liejeva grupa*, to je grupa s strukturo gladke mnogoterosti, v kateri sta grupni operaciji produkt in inverz gladki preslikavi. Primeri so npr. $GL_n(\mathbb{R})$, to je grupa vseh obrnljivih $n \times n$ matrik, oz. v kompleksnem primeru $GL_n(\mathbb{C})$, ter njune podgrupe. Če je $\Gamma \subset X$ podgrupa Liejeve grupe X, potem Γ

naravno deluje na X s produktom na levi. Prostor orbit $Y = X/\Gamma$ ima strukturo grupe natanko tedaj, ko je Γ grupa edinka v X, to je, $x\Gamma x^{-1} = \Gamma$ za vsak $x \in X$. Če je kvocientna preslikava $\pi : X \to X/\Gamma$ krovna projekcija, je $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$ ravno grupa krovnih translacij.

Zanima nas, pri kakšnih pogojih na delovanje grupe Γ na mnogoterosti X je prostor orbit $Y = X/\Gamma$ Hausdorffov in je kvocientna projekcija $\pi : X \to Y$ krovna projekcija.

Definicija 1.92 *Naj bo X $\mathscr{C}^r$-mnogoterost in $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ neka grupa $\mathscr{C}^r$-difeomorfizmov ($r \geq 0$). Grupa Γ deluje na X* povsem nezvezno *ali* diskretno*, če velja:*

1. *Vsaka točka $x \in X$ ima odprto okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ razen za neko končno množico elementov $g \in \Gamma$. (Tu je $gU = \{g \cdot x : x \in U\}$.)*
2. *Za vsak par točk $x, x' \in X$, ki nista na isti orbiti ($\Gamma x \neq \Gamma y$), obstajata odprti okolici $x \in U \subset X$, $x' \in U' \subset X$, tako da je $gU \cap U' = \varnothing$ za vse $g \in \Gamma$. (Ekvivalentno, $gU \cap g'U' = \varnothing$ za vsak par $g, g' \in \Gamma$.)*

Če velja

3. *$g \cdot x \neq x$ za vsak $x \in X$ in $g \in \Gamma \setminus \{1\}$,*

potem pravimo, da grupa Γ deluje na X brez negibnih točk.

Očitno je delovanje vsake končne grupe povsem nezvezno.

Točka $x \in X$, za katero je $g \cdot x = x$ za nek $g \in \mathrm{Diff}^r(X)$, se imenuje *negibna točka* ali tudi *fiksna točka* difeomorfizma g. Množica

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma : g \cdot x = x\}$$

je podgrupa grupe Γ, ki se imenuje *izotropna grupa* točke x. Iz pogoja 1. v definiciji 1.92 sledi, da je grupa Γ_x končna. V obratni smeri velja naslednje.

Trditev 1.93 *Če deluje Γ povsem nezvezno na X, potem za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $x \in U \subset X$, tako da velja*

$$gU \cap U \neq \varnothing \iff g \in \Gamma_x.$$

Dokaz Implikacija $\Leftarrow$ očitno velja za vsako okolico U točke x.

Dokažimo sedaj implikacijo $\Rightarrow$. Recimo, da za neko okolico $x \in U \subset X$ elementi $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_k \in \Gamma$ zadoščajo pogoju $g_j(U) \cap U \neq \varnothing$, za vse ostale elemente $g \in \Gamma \setminus \{g_1, \ldots, g_k\}$ pa velja $g(U) \cap U = \varnothing$. Če U zmanjšamo, se množica $\{g_1, \ldots, g_k\}$ kvečjemu zmanjša. Torej lahko izberemo U tako, da za vsako manjšo okolico $x \in U' \subset U$ dobimo isto kolekcijo elementov $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$, ki zadoščajo pogoju $g_j(U') \cap U' \neq \varnothing$. Trdimo, da ti elementi sestavljajo izotropno grupo Γ_x. Izberimo zaporedje vloženih okolic $U' = U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots \supset \bigcap_l U_l = \{x\}$. Za vsak $l \in \mathbb{N}$ in $j \in \{1, \ldots, k\}$ je $g_j(U_l) \cap U_l \neq \varnothing$, torej obstaja točka $x_{j,l} \in U_l$, da je $g_j(x_{j,l}) \in U_l$. Pri $l \to \infty$ velja $x_{j,l} \to x$ in $g_j(x_{j,l}) \to x$, saj se okolice U_l krčijo proti x. Iz zveznosti preslikave g_j sledi $g_j(x) = x$, torej $g_j \in \Gamma_x$ za $j = 1, \ldots, k$. $\square$

Posledica 1.94 *Če Γ deluje na X povsem nezvezno in brez negibnih točk, ima vsaka točka $x \in X$ okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$.*

Naloga 1.95 *Dokaži: Če grupa Γ deluje povsem nezvezno na X, potem je vsaka orbita $\Gamma x = \{g \cdot x : g \in \Gamma\} \subset X$ zaprta diskretna podmnožica v X.*

Vprašanje: Recimo, da Γ deluje na X tako, da so vse njene orbite Γx diskretne v X in je vsaka izotropna grupa Γ_x končna. Ali odtod sledi pogoj 1. v definiciji povsem nezveznega delovanja?

Sedaj bomo pokazali zvezo med povsem nezveznimi delovanji grup in krovnimi projekcijami. V eno smer jo opisuje naslednja trditev, katere elementaren dokaz je prepuščen bralcu.

Trditev 1.96 *Če je $\pi : X \to Y$ krovna projekcija razreda $\mathscr{C}^r$, potem njena grupa krovnih translacij $\mathrm{Deck}_\pi(X) \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ deluje na X povsem nezvezno ter brez negibnih točk.*

V splošnem grupa $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ ne deluje tranzitivno na vlaknih krovne projekcije $\pi : X \to Y$. Če $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ deluje tranzitivno na vlaknih, se krov imenuje *regularen*. V tem primeru sledi, da je Y izomorfna prostoru orbit: $Y = X/\mathrm{Deck}_\pi(X)$.

Naslednji izrek je glavni rezultat tega razdelka.

Izrek 1.97 *Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ ($r \in \{0, 1, \dots, \infty, \omega, \mathscr{O}\}$). Če grupa $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)$ deluje na X povsem nezvezno, je kvocientna projekcija $\pi : X \to Y = X/\Gamma$ odprta preslikava in kvocientna topologija na Y je Hausdorffova. Če je poleg tega delovanje brez negibnih točk, ima Y natanko eno strukturo $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti (do $\mathscr{C}^r$ difeomorfizma), tako da je $X \xrightarrow{\pi} Y$ krovna projekcija razreda $\mathscr{C}^r$ in je $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$ grupa njenih krovnih translacij.*

Dokaz Če je U odprta množica v X, je tudi $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in \Gamma} gU$ odprta množica, kar po definiciji kvocientne topologije pomeni, da je $\pi(U)$ odprta v Y. Torej je π odprta preslikava.

Iz pogoja 2. v definiciji 1.92 sledi, da je kvocientna topologija na $Y = X/\Gamma$ Hausdorffova.

Denimo sedaj, da grupa Γ deluje brez negibnih točk. Po posledici 1.94 ima vsaka točka $x \in X$ odprto povezano okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Torej je $[U] = \pi(U) \subset Y$ okolica točke $\Gamma x = [x] \in Y$, za katero velja

$$\pi^{-1}([U]) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU$$

in so množice gU paroma disjunktne. Za vsak $g \in \Gamma$ je projekcija $\pi : gU \to [U]$ bijektivna, zvezna in odprta, torej homeomorfizem.

Odtod sledi, da je Y lokalno evklidski prostor in je $\pi : X \to Y$ topološka krovna projekcija. Ker je prostor X 2-števen, je tak tudi Y.

Strukturo $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti na Y definiramo na naslednji način. Naj bo $x \in X$. Izberimo odprto povezano okolico $x \in U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \varnothing$ za vsak $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Po potrebi U zmanjšamo, tako da obstaja lokalna karta $\phi : U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ (v danem maksimalnem $\mathscr{C}^r$ atlasu na X). Sedaj vzamemo preslikavo

$$\phi \circ (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \longrightarrow \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

za karto na $\pi(U) \subset Y$. Če sta $\psi = \phi \circ (\pi|_U)^{-1}$ in $\psi' = \phi' \circ (\pi|_{gU})^{-1}$ dve karti te oblike, pri čemer je ϕ' lokalna karta na translatu gU, je prehodna preslikava enaka

$$\psi' \circ \psi^{-1} \;=\; \phi' \circ (\pi|_{gU})^{-1} \circ (\phi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1} \;=\; \phi' \circ \underbrace{(\pi|_{gU})^{-1} \circ \pi|_U}_{g \in \Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(X)} \circ \phi^{-1} \in \mathscr{C}^r.$$

S tem je izrek dokazan. $\square$

Primer 1.98 1. Ciklična grupa $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\} = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ deluje na kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ z generatorjem

$$\sigma(z) \;=\; e^{2\pi i/k} z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

To je rotacija ravnine za k-ti koren enote. Pripadajoča kvocientna projecija je $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^k$. Torej je $\mathbb{C}/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{C}$. Orbita točke z je

$$\{e^{2m\pi i/k} z : m = 0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Edina negibna točka grupe je $0 \in \mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}^*$ deluje grupa $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ povsem nezvezno in brez negibnih točk; $\mathbb{C}^* \ni z \to z^k \in \mathbb{C}^*$ je krovna projekcija.

2. Na $X = \mathbb{C}^2$ deluje ciklična grupa $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(z, w) = (-z, -w)$. Orbita točke (z, w) vsebuje še njej antipodno točko $(-z, -w)$. Edina negibna točka je izhodišče $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Ni težko videti, da so orbite vlakna preslikave

$$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3, \quad f(z, w) \;=\; (z^2, w^2, zw).$$

Torej je slika

$$A \;=\; f(\mathbb{C}^2) \;=\; \big\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_3^2 = z_1 z_2\big\}$$

izomorfna prostoru orbit $\mathbb{C}^2/\Gamma$. To je kompleksna (algebraična) kvadratična hiperploskev v $\mathbb{C}^3$ z edino singularnostjo v izhodišču $0 \in \mathbb{C}^3$. Zožena preslikava $f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to A \setminus \{0\}$ je dvolistna krovna projekcija.

3. Na $X = \mathbb{R}^2$ deluje ciklična grupa $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(x, y) = (-x, y)$, to je zrcaljenje preko y osi. Točke $(0, y)$ $(y \in \mathbb{R})$ so negibne točke delovanja. Kvocient $\mathbb{R}^2/\Gamma = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ je mnogoterost z robom in kvocientno projekcijo realizira preslikava $f(x, y) = (x^2, y)$. Njena zožitev na $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ je trivialna dvolistna krovna projekcija na $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Če opazujemo isto delovanje na $\mathbb{C}^2$, pa je kvocient $\mathbb{C}^2/\Gamma = \mathbb{C}^2$. Projekcija $f(x,y) = (x^2,y)$ je razvejana vzdolž premice $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ in zožitev $f : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ je dvolisten holomorfen krov.

4. $X = \mathbb{C}^2_* = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $\sigma(z) = 2z$. Grupa $\Gamma = \langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}$ deluje na $\mathbb{C}^2_*$ povsem nezvezno in brez negibnih točk. Prostor orbit $Y = \mathbb{C}^2_*/\Gamma$ je kompaktna kompleksna ploskev, ki se imenuje *Hopfova ploskev*. Kvocientna projekcija $\mathbb{C}^2_* \to Y$ je holomorfna krovna projekcija. Fundamentalna domena delovanja je npr. krogelna lupina $A = \{z \in \mathbb{C}^2 : 1 \le |z| \le 2\}$. Identificirata se njeni robni komponenti, to je enotna sfera $S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1\}$ in $2S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = 2\}$, zato je kvocient Y difeomorfen produktu $S^3 \times S^1$.

1.8.3 Dvig preslikave v krovu

Naslednji cilj je dokaz strukturnega izreka, ki povezuje krovne prostore $\pi : Y \to X$ nad dano mnogoterostjo X s podgrupami fundamentalne grupe $\pi_1(X)$. Ti rezultati so predstavljeni v naslednjem razdelku 1.8.4; glej izreka 1.108 in 1.109. V tem pripravljalnem razdelku obravnavamo nekaj osnovnih orodij in rezultatov, ki bodo uporabljeni v dokazu.

Fundamentalna grupa. Naj bo $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ krožnica. Prelikava $\gamma : S^1 \to Y$ se imenuje *zanka* v Y. Ekvivalentno, zanka je pot $\gamma : [0,1] \to Y$, pri kateri se začetna in končna točka ujemata: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Opazujmo zanke v izbrani točki $y_0 \in Y$:

$$\gamma : S^1 \to Y, \qquad \gamma(0) \ = \ \gamma(1) \ = \ y_0.$$

Zanki γ in γ' sta *homotopni*, če obstaja zvezna preslikava $H : S^1 \times [0,1] \to Y$, ki zadošča pogojem

$$H(\cdot,0) \ = \ \gamma, \quad H(\cdot,1) \ = \ \gamma', \quad H(0,s) \ = \ H(1,s) \ = \ y_0 \ (\forall s \in [0,1]).$$

Obstoj homotopije je ekvivalenčna relacija na prostoru vseh zank v točki $y_0 \in Y$. *Fundamentalna grupa* $\pi_1(Y,y_0)$ je množica homotopnih razredov zank v Y, pripetih v točki $y_0 \in Y$. To je grupa (v splošnem nekomutativna) z operacijo *stik poti*:

$$[\gamma][\gamma'] \ = \ [\gamma \cdot \gamma']$$

Stik $\gamma \cdot \gamma'$ dveh zank v točki y_0 je spet zanka v y_0, ki jo dobimo tako, da gremo najprej po prvi zanki γ in zatem še po drugi zanki γ'.

Naloga 1.99 *Preveri, da je homotopski razred stika zank $\gamma \cdot \gamma'$ odvisen le od homotopskih razredov obeh zank γ in γ'. Odtod sledi, da stik poti definira operacijo (produkt) v $\pi_1(Y,y_0)$. Opremljena s to operacijo se $\pi_1(Y,y_0)$ imenuje* fundamentalna grupa *(ali tudi* prva homotopska grupa*) prostora Y v točki y_0.*

Če je Y povezana, potem izbor bazne točke y_0 ni bistven, saj so grupe $\pi_1(Y,y_0)$ za različne $y_0 \in Y$ med seboj izomorfne (niso pa naravno izomorfne). V tem primeru pogosto pišemo kar $\pi_1(Y)$. Izomorfizem $\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y,y_1)$ dobimo tako, da izberemo pot $\lambda : [0,1] \to Y$ z začetno točko $\lambda(0) = y_0$ in končno točko $\lambda(1) = y_1$. Označimo z λ^{-1} obrnjeno pot $\lambda^{-1}(t) = \gamma(1-t)$; očitno je $\lambda^{-1}(0) = y_1$ in $\lambda^{-1}(1) = y_0$. Zanki $\gamma : S^1 \to Y$ v y_0 tedaj priredimo zanko $\gamma' = \lambda^{-1} \cdot \gamma \cdot \lambda$ v y_1 (to je stik poti λ^{-1} of y_1 do y_0, zanke γ v y_0 ter poti λ nazaj od y_0 do y_1). Ni težko videti, da ta operacija inducira izomorfizem $\pi_1(Y,y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y,y_1)$, ki pa je v splošnem odvisen od izbire poti λ. Natančneje, izomorfizem je odvisen od homotopskega razreda poti od y_0 do y_1.

Primer 1.100 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Povezana mnogoterost Y se imenuje *enostavno povezana*, če je njena fundamentalna grupa trivialna: $\pi_1(Y) = 0$. (Včasih pišemo grupno operacijo multiplikativno in trvialno grupo označimo z $\pi_1(Y) = 1$.)

Primer 1.101 $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ za vsak $n \geq 1$; $\pi_1(S^n) = 0$ za vsak $n > 1$.

Vsaka zvezna preslikava $f : X \to Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0)), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]. \tag{1.25}$$

Slika $f_*(\pi_1(X,x_0))$ je podgrupa v $\pi_1(Y, f(x_0))$.

Naj bosta X in Z topološka prostora. Zvezna preslikava $f : Z \times [0,1] \to X$ se imenuje *homotopija preslikav* $Z \to X$; to je družina zveznih preslikav $f_t = f(\cdot,t) : Z \to X$, ki je zvezno odvisna od parametra $t \in [0,1]$.

Pomemben rezultat v teoriji krovnih prostorov je naslednji izrek o dvigu homotopij.

Izrek 1.102 (Dvig homotopije v krovu) *Naj bo $\pi : X \to Y$ krovna projekcija. Naj bo Z topološki prostor in $f : Z \times [0,1] \to Y$ ter $F_0 : Z \to X$ zvezni preslikavi, tako da velja $\pi \circ F_0 = f(\cdot,0)$. Potem obstaja natanko ena zvezna preslikava $F : Z \times [0,1] \to Y$, tako da velja*

$$\pi \circ F \;=\; f, \qquad F(\cdot,0) \;=\; F_0 : Z \to Y.$$

$$\begin{tikzcd}
Z \times \{0\} \arrow[r, "F_0"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "\pi"] \\
Z \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "F"] & Y
\end{tikzcd}$$

Preslikava F v izreku se imenuje *dvig homotopije f* glede na krovno projekcijo π. V posebnem primeru, ko je Z prostor z eno točko, dobimo izrek od dvigu poti:

Posledica 1.103 (Dvig poti v krovu) *Naj bo $\pi : X \to Y$ krovna projekcija. Če je $f : [0,1] \to Y$ pot in $x_0 \in X$ točka v vlaknu $\pi^{-1}(f(0)) \in X$, potem obstaja natanko ena pot $F : [0,1] \to X$, ki zadošča pogojema*

$$F(0) \ = \ x_0, \qquad \pi(F(t)) \ = \ f(t) \ \text{ za vsak } t \in [0,1].$$

Dokaz izreka 1.102 Oglejmo si najprej poseben primer iz posledice 1.103, ko je $Z = \{z_0\}$ prostor z eno točko, torej je $f : [0,1] \to Y$ pot v Y. Ker je zaloga vrednosti $f([0,1]) \subset Y$ kompaktna, lahko izberemo delitev $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$ in odprte povezane množice $V_1, \ldots, V_k \subset Y$, ki zadoščajo pogoju v definiciji 1.84 in

$$f([t_{i-1}, t_i]) \subset V_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{1.26}$$

Naj bo $U_1 \subset X$ tista povezana komponenta množice $\pi^{-1}(V_1)$, ki vsebuje točko x_0. Tedaj je $\pi|_{U_1} : U_1 \to V_1$ homeomorfizem. Definirajmo

$$F(t) \ = \ (\pi|_{U_1})^{-1}(f(t)), \qquad t \in [0, t_1].$$

Potem očitno velja $F(0) = x_0$ in $\pi(F(t)) = f(t)$ za $t \in [0, t_1]$. Naj bo U_2 povezana komponenta množice $\pi^{-1}(V_2)$, ki vsebuje točko $F(t_1)$. Definiramo

$$F(t) \ = \ (\pi|_{U_2})^{-1}(f(t)), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Tedaj se $F(t_1)$ ujema s prej definirano vrednostjo in je $\pi(F(t)) = f(t)$ za $t \in [t_1, t_2]$. Po k korakih dobimo iskani dvig F poti f na celotnem intervalu $[0,1]$. Enoličnost dviga je očitna iz konstrukcije, sledi pa tudi iz dejstva, da je množica točk $t \in [0,1]$, v kateri se dva dviga iste preslikave ujemata, odprta in zaprta.

V splošnem primeru opisani postopek zagotovi za vsako točko $z_0 \in Z$ enolični dvig poti $f(z_0, \cdot) : I \to Y$ v pot $F(z_0, \cdot) : [0,1] \to X$ z začetno točko $F_0(z_0) \in X$. Potrebno je videti, da je pot $F(z_0, \cdot)$ zvezno odvisna od točke $z_0 \in Z$. Fiksirajmo z_0 in izberimo delitev $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = 1$ intervala $[0,1]$ in odprte množice $V_1, \ldots, V_k \subset Y$, ki zadoščajo pogoju v definiciji 1.84 in pogoju (1.26) za pot $f = f(z_0, \cdot) : I \to Y$. Zaradi zveznosti preslikave f velja (1.26) tudi za pot $f(z, \cdot)$ za vse točke $z \in Z$ v neki dovolj majhni okolici $Z_0 \subset Z$ točke z_0. Ker je tudi $F_0 : Z \to X$ zvezna preslikava, lahko okolico Z_0 primerno zmanjšamo, tako da vse točke $F_z(0)$ $(z \in Z_0)$ ležijo v isti povezani komponenti $U_1 \subset X$ množice $\pi^{-1}(V_1)$. Zato lahko definiramo dvig na intervalu $t \in [0, t_1]$ za vse točke $z \in Z_0$ s predpisom

$$F(z,t) \ = \ (\pi|_{U_1})^{-1}(f(z,t)), \qquad t \in [0, t_1], \ \ z \in Z_0.$$

Z istim postopkom nadaljujemo enako kot zgoraj, s tem da okolico Z_0 točke z_0 v vsakem koraku po potrebi skrčimo. V končno mnogo korakih dobimo zvezen dvig $F : Z_0 \times [0,1] \to X$ preslikave $f : Z_0 \times [0,1] \to X$. Ker to velja za vsako točko $z_0 \in Z$, je izrek dokazan. $\square$

Posledica 1.104 (Izrek o monodromiji) *Naj bo $\pi : X \to Y$ krovna projekcija, $y_0, y_1 \in Y$ poljubni točki in $f_s : I = [0,1] \to Y$ $(s \in I)$ homotopija poti z začetno točko $f_s(0) = y_0$ in končno točko $f_s(1) = y_1$ za vsak $s \in I$. Naj bo $F_s : I \to X$ zvezen dvig poti f_s, ki je zvezno odvisen od parametra $s \in I$. Potem sta točki $F_s(0)$ in $F_s(1)$ neodvisni od $s \in I$. Če je $\{f_s\}_{s\in I}$ homotopija zank v točki y_0 in je F_0 zanka v neki točki $x_0 \in X$ nad y_0, potem je $\{F_s\}_{s\in I}$ homotopija zank v x_0.*

Dokaz Preslikava $I \ni s \mapsto F_s(0) \in X$ je zvezna in njena zaloga vrednosti leži v diskretnem vlaknu $\pi^{-1}(y_0)$, zato je konstantna. Isti sklep velja za preslikavo $I \ni s \mapsto F_s(1) \in \pi^{-1}(y_1) \subset X$. $\square$

Opomba 1.105 Izrek o monodromiji velja z istim dokazom v splošnejšem primeru, ko je projekcija $\pi : X \to Y$ lokalni homeomorfizem. Lastnost krovne projekcije je potreba samo za obstoj dviga. Ta izrek igra pomembno vlogo pri enoličnosti analitičnega nadaljevanja holomorfne funkcije vzdolž homotopnih poti.

Izrek 1.106 (Dvig enostavno povezane množice) *Naj bo $h : X \to Y$ krovna projekcija in Z povezana in enostavno povezana mnogoterost. Za vsako zvezno preslikavo $f : Z \to Y$ obstaja zvezna preslikava $F : Z \to X$, ki zadošča $h \circ F = f$. Dvig F je enolično določen z vrednostjo $F(z_0) \in X$ v poljubni točki $z_0 \in Z$.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dokaz Izberimo točko $z_0 \in Z$, označimo $y_0 = f(z_0) \in Y$ in naj bo $x_0 \in X$ točka na vlaknu $h^{-1}(y_0)$. Za poljubno točko $z \in Z$ izberemo pot $\gamma : I = [0,1] \to Z$ z začetno točko $\gamma(0) = z_0$ in končno točko $\gamma(1) = z$. Njena slika $f \circ \gamma : I \to Y$ je pot v Y z začetno točko $y_0 \in Y$ in končno točko $f(z) \in Y$.

Po posledici 1.103 obstaja dvig $\lambda : I \to X$ z začetno točko $\lambda(0) = x_0$. Definiramo $F(z) = \lambda(1) \in X$. Če dokažemo, da je točka $\lambda(1)$ neodvisna od izbire poti γ, potem je F dobro definirana in zadošča izreku.

Ker je prostor Z enostavno povezan, sta poljubni dve poti $\gamma, \gamma' : I \to Z$ med točkama z_0 in z homotopni, torej obstaja homotopija poti $\gamma_s : I \to Z$ $(s \in I)$ z $\gamma_0 = \gamma$ in $\gamma_1 = \gamma'$. Za vsak $s \in I$ naj bo $\lambda_s : I \to X$ dvig poti $f \circ \gamma_s : I \to Y$ z začetno točko $\lambda_s(0) = x_0$ (glej posledico 1.103). Po posledici 1.104 je končna točka $\lambda_s(1) \in X$ neodvisna od $s \in I$. Zato je zgoraj definirana preslikava $F : Z \to X$ neodvisna od izbire poti γ. $\square$

Analogen argument uporabimo za dokaz naslednjega splošnejšega izreka o dvigu.

Izrek 1.107 (Izrek o dvigu preslikave) *Naj bo $h : X \to Y$ krovna projekcija, Z povezana mnogoterost in $f : Z \to Y$ zvezna preslikava. Izberimo točke $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$ in $x_0 \in X$, tako da je $f(z_0) = y_0 = h(x_0)$. Naslednji lastnosti sta ekvivalentni:*

(a) *Obstaja zvezna preslikava $F : Z \to X$, ki zadošča $h \circ F = f$ in $F(z_0) = x_0$. (Torej je F dvig preslikave f z začetno vrednostjo $F(z_0) = x_0$.)*

(b) $f_*(\pi_1(Z,z_0)) \subset h_*(\pi_1(X,x_0))$.

Preslikava F v točki (a), če obstaja, je seveda enolično določena. Implikacija (a)$\Rightarrow$(b) je očitna, saj iz $h \circ F = f$ sledi $h_*(F_*(\pi_1(Z,z_0))) = f_*(\pi_1(Z,z_0))$. Obraten sklep (b)$\Rightarrow$(a) dobimo sledeč dokazu izreka 1.106 in upoštevaje predpostavko, da se vsaka zanka v Y, ki pride iz zanke v Z pripete v z_0 s preslikavo f, dvigne v zanko v X pripeto v x_0.

1.8.4 Obstoj in klasifikacija krovnih prostorov

Najprej bomo konstruirali univerzalni krov nad dano mnogoterostjo X (oz. nad poljubnim topološkim prostorom, ki je povezan s potmi in lokalno povezan s potmi).

Izrek 1.108 *Za vsako povezano mnogoterost X obstaja povezana in enostavno povezana mnogoterost $\widetilde{X}$ ter (univerzalna) krovna projekcija $\pi : \widetilde{X} \to X$. Množica Deck$(\pi)$ krovnih translacij je izomorfna fundamentalni grupi $\pi_1(X)$.*
Univerzalni krov je določen do izomorfizma krovov natančno.

Dokaz Najprej dokažimo enoličnost. Denimo, da sta $\pi : Y \to X$ in $\pi' : Y' \to X$ dve krovni projekciji, kjer sta mnogoterosti Y in Y' povezani in enostavno povezani. Izberimo točko $p \in X$ in par točk $y_0 \in \pi^{-1}(p) \in Y$ ter $y_0' \in (\pi')^{-1}(p) \in Y'$. Po izreku 1.106 obstajata preslikavi $\Phi : Y \to Y'$ in $\Psi : Y' \to Y$, ki zadoščata pogojem

$$\pi' \circ \Phi \;=\; \pi, \quad \Phi(y_0) \;=\; y_0'; \qquad \pi \circ \Psi \;=\; \pi', \quad \Psi(y_0') \;=\; y_0. \tag{1.27}$$

Iz teh pogojev sledi, da preslikava $\Theta = \Psi \circ \Phi : Y \to Y$ zadošča $\pi \circ \Theta = \pi$ in posledično je krovna projekcija. Množica $\{y \in Y : \Theta(y) = y\}$ je odprta in zaprta. Ker je Y povezana in $\Theta(y_0) = y_0$, sledi $\Theta = \mathrm{Id}_Y$. Analogno vidimo, da je $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{Y'}$.
Sedaj bomo podali dokaz obstoja univerzalnega krova.
Izberimo točko $p_0 \in X$. Za vsako točko $p \in X$ naj bo $\widetilde{X}_p$ množica vseh homotopnih razredov poti v X od p_0 do p. Naj bo

$$\widetilde{X} \;=\; \bigsqcup_{p \in X} \widetilde{X}_p$$

disjunktna unija s projekcijo $\pi : \widetilde{X} \to X$, ki preslika $\widetilde{X}_p$ v točko p.
Trdimo, da na $\widetilde{X}$ obstaja struktura topološke mnogoterosti, tako da je $\pi : \widetilde{X} \to X$ univerzalna krovna projekcija in je $\widetilde{X}$ povezana ter enostavno povezana. Za dokaz izberimo poljubno točko $q \in X$ in neko povezano in enostavno povezano odprto okolico $U \subset X$ točke q. Izberimo pot $\lambda : [0,1] \to X$ od $\lambda(0) = p_0$ do $\lambda(1) = q$. Za vsak $t \in [0,1]$ označimo z $\lambda_t : [0,1] \to X$ pot

$$\lambda_t(s) \;=\; \lambda(st), \qquad s \in [0,1].$$

Očitno je λ_t pot od $\lambda_t(0) = p_0$ do $\lambda_t(1) = \lambda(t)$; torej je preslikava

$$[0,1] \ni t \longmapsto [\lambda_t] \in \widetilde{X}$$

dvig poti λ v totalni prostor $\widetilde{X}$. Opazujmo sedaj množico poti

$$\widetilde{V}_\lambda = \{\lambda\sigma : \sigma \text{ je pot v } U \text{ in } \sigma(0) = q\}.$$

Ker je U enostavno povezana, sta poljubni dve poti σ, σ' v U od q do poljubne točke $p \in U$ homotopni, torej sta tudi poti $\lambda\sigma$ in $\lambda\sigma'$ homotopni. Odtod sledi, da se množica

$$V_\lambda = \{[\lambda\sigma] \in \widetilde{X} : \sigma \text{ je pot v } U \text{ in } \sigma(0) = q\}$$

s projekcijo π preslika bijektivno na U. Za dve različni poti λ, λ' v X od p_0 do q velja $V_\lambda = V_{\lambda'}$, če sta poti λ, λ' homotopni, in $V_\lambda \cap V_{\lambda'} = \varnothing$ sicer. Poleg tega lahko vsako pot λ v X od p_0 do $p \in U$ predstavimo v obliki $\lambda\sigma$, kjer je λ pot od p_0 do q in je σ pot v U od q do p. Odtod sledi, da je $\pi^{-1}(U)$ enaka disjunktni uniji množic V_{λ_j} za paroma nehomotopne poti λ_j od p_0 do q.

Topologijo na $\widetilde{X}$ definiramo z zahtevo, da je vsaka bijekcija $\pi : V_\lambda \to U$ homeomorfizem. Torej je $\pi : \widetilde{X} \to X$ krovna projekcija, ki je trivialna nad vsako od množic $U \subset X$ v zgornji konstrukciji.

Da je $\widetilde{X}$ povezana sledi iz dejstva, da je vsak par poti v X z isto začetno točko $p_0 \in X$ in poljubno končno točko med seboj homotopen preko homotopije, ki fiksira le začetno točko. (Pot lahko homotopno skrčimo vzdolž same sebe v začetno točko, če je končna točka prosta.)

Sedaj moramo dokazati še, da je $\widetilde{X}$ enostavno povezana. Izberimo točko $\tilde{p}_0 \in \widetilde{X}$, ki ustreza konstantni poti $\gamma_0(t) = p_0 \in X$. Naj bo λ poljubna zanka v $\widetilde{X}$, pripeta v $\tilde{p}_0$. Njena projekcija $\gamma = \pi \circ \lambda$ je zanka v X, pripeta v p_0. Po izreku 1.106 (o obstoju in enoličnosti dviga poti v krov) je λ dvig poti γ z začetno točko $\lambda(0) = \tilde{p}_0$. Torej je $\lambda(1) = [\gamma] \in \widetilde{X}_{p_0}$ ravno element, ki ga določa razred zanke γ v fundamentalni grupi $\pi_1(X; p_0)$. Ker je λ zanka, je $[\gamma] = 0 \in \pi_1(X; p_0)$, torej je γ homotopna konstanti. Dvig te homotopije (glej izrek 1.102) ter monodromijski izrek (posledica 1.104) nam povesta, da je tudi λ homotopna konstantni zanki $[0,1] \ni t \mapsto \tilde{p}_0$. Ker je bila λ poljubna zanka v $\tilde{p}_0 \in \widetilde{X}$, sledi $\pi_1(\widetilde{X}; \tilde{p}_0) = 0$. Ker je $\widetilde{X}$ povezana, to velja za poljubno točko $\tilde{p}_0 \in \widetilde{X}$.

Fundamentalna grupa $\pi_1(X; p_0)$ deluje na $\widetilde{X}$ kot grupa krovnih translacij s predpisom, ki priredi poljubni zanki γ v X, pripeti v točki p_0, ter poti λ v X od p_0 do p, njun stik $\gamma\lambda$ v X od p_0 do p:

$$\pi_1(X; p_0) \times \widetilde{X} \ni ([\gamma], [\lambda]) \longmapsto [\gamma\lambda] \in \widetilde{X}.$$

Preverimo lahko, da je element $[\gamma\lambda] \in \widetilde{X}$ odvisen samo od homotopskih razredov zanke γ v p_0 in poti λ od p_0 do p. Iz konstrukcije sledi, da $\pi_1(X; p_0)$ deluje zvesto in tranzitivno na vsakem vlaknu. Na vlaknu $\widetilde{X}_{p_0} = \pi_1(X; p_0)$ je to ravno delovanje grupe $\pi_1(X; p_0)$ na sami sebi kot levi produkt. $\square$

Podobna konstrukcija nam da naslednji splošnejši izrek.

Izrek 1.109 *Naj bo X povezana mnogoterost in $p \in X$ poljubna točka. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(X;p)$ fundamentalne grupe X obstaja povezana mnogoterost Y ter krovna projekcija $\pi : Y \to X$, tako da za poljubno točko $q \in \pi^{-1}(p) \in Y$ velja*

$$\pi_*(\pi_1(Y;q)) \;=\; gGg^{-1} \;\; \textit{za nek } g \in \pi_1(X;p).$$

Grupa krovnih translacij je $\mathrm{Deck}(\pi) = H/G$, *kjer je $H \subset \pi_1(X;p)$ normalizator podgrupe G (glej* (1.30)*).*

Krov $Y \to X$ s to lastnostjo je določen do izomorfizma krovov natančno.

Če je G podgrupa edinka fundamentalne grupe $\pi_1(X;p)$, je $\mathrm{Deck}(\pi) = \pi_1(X;p)/G$ *in krov $Y \to X$ je regularen.*

Dokaz Mnogoterost Y lahko konstruiramo kot množico vseh ekvivalenčnih razredov poti λ v X z začetno točko $\lambda(0) = p \in X$ glede na ekvivalenčno relacijo

$$\lambda \sim \lambda' \iff \lambda(1) \;=\; \lambda'(1) \text{ in } [\lambda(\lambda')^{-1}] \in G \subset \pi_1(X;p). \tag{1.28}$$

To pomeni, da je Y kvocient totalnega prostora $\widetilde{X}$ univerzalnega krovnega prostora $\widetilde{X} \to X$ po grupi $G \subset \pi_1(X;p)$, ki deluje na $\widetilde{X}$ kot grupa krovnih translacij. Na vlaknu $\widetilde{X}_p \cong \pi_1(X;p)$ je to ravno delovanje podgrupe G na grupi $\pi_1(X;p)$ z množenjem na levi. Orbita točke $h \in \pi_1(X;p)$ je $Gh = \{gh : g \in G\}$, torej desni faktorski razred grupe G. Vlakno Y_p nad točko $p \in X$ je enako prostoru orbit grupe G, torej desni faktorski množici $\{Gg : g \in \pi_1(X;p)\}$ podgrupe G v $\pi_1(X;p)$. Poleg tega imamo univerzalno krovno projekcijo $\widetilde{X} \to Y$ z grupo krovnih translacij, ki je po izreku 1.108 izomorfna grupi $\pi_1(Y)$.

Faktorska množica $\pi_1(X;p)/G$ je grupa z operacijo, podedovano iz fundamentalne grupe $\pi_1(X;p)$, natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka grupe $\pi_1(X;p)$. V tem primeru je kvocientna grupa $\pi_1(X;p)/G$ izomorfna grupi krovnih translacij krova $Y \to X$, kar vidimo takole. Točka $y \in Y_x$ je določena s homotopnim razredom poti v X od p do x, pri čemer dve taki poti λ, λ' določata isti element y natanko tedaj, ko zanka $\sigma := \lambda(\lambda')^{-1}$ v p določa element $[\sigma]$ podgrupe $G \subset \pi_1(X;p)$ (glej (1.28)). Naj bo γ poljubna zanka pripeta v točki $p \in X$. Poti $\gamma\lambda$ in $\gamma\lambda'$ v X od p do x določata isti element vlakna Y_x natanko tedaj, ko velja

$$[(\gamma\lambda)(\gamma\lambda')^{-1}] \;=\; [\gamma][\lambda(\lambda')^{-1}][\gamma]^{-1} \;=\; [\gamma][\sigma][\gamma]^{-1} \in G.$$

To velja za vsak element $g = [\sigma] \in G$ natanko tedaj, ko je

$$[\gamma]G[\gamma]^{-1} \;=\; G. \tag{1.29}$$

Stik $(\gamma, \lambda) \mapsto \gamma\lambda$ z zanko γ torej določa krovno translacijo $Y \to Y$ nad X natanko tedaj, ko velja (1.29). Množica

$$H \;=\; \left\{[\gamma] \in \pi_1(X;p) : [\gamma]G[\gamma]^{-1} = G\right\} \tag{1.30}$$

se imenuje *normalizator* podgrupe G v grupi $\pi_1(X;p)$. Očitno je $G \lhd H$ podgrupa edinka v H in je H največja podgrupa v $\pi_1(X;p)$ s to lastnostjo. Odtod vidimo, da je grupa krovnih translacij krova $Y \to X$ enaka grupi H/G, in je enaka $\pi_1(X;p)/G$ natanko tedaj, ko je G edinka v $\pi_1(X;p)$.

Če sta $\pi : Y \to X$ in $\pi' : Y' \to X$ dva krova, ki zadoščata pogojem izreka, izrek 1.107 zagotavlja obstoj preslikav $\Phi : Y \to Y'$ in $\Psi : Y' \to Y$, ki zadoščata (1.27); torej sta Φ in Ψ med seboj inverzna izomorfizma krovov. (Za podrobnosti glej dokaz izreka (1.108).) $\square$

Izrek 1.109 igra pomembno vlogo pri klasifikaciji mnogoterosti, saj reducira problem na klasifikacijo enostavno povezanih mnogoterosti skupaj s prostim in povsem nezveznim delovanjem grup na njih.

Primer 1.110 Naj bo Y *Riemannova ploskev*, to je kompleksna mnogoterost dimenzije $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$. Preprosti primeri so $\mathbb{C}$, domene v $\mathbb{C}$ in Riemannova sfera $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. Naj bo $X \xrightarrow{\pi} Y$ njen univerzalni krov. Potem je X enostavno povezana Riemannova ploskev.

Izrek 1.111 (Riemann-Koebe) *Vsaka enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev* $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, $\Delta = \{|z| < 1\}$.

Poseben primer je Riemannov upodobitveni izrek: Vsaka povezana in enostavno povezana domena $D \subsetneq \mathbb{C}$ *je biholomorfno ekvivalentna disku* Δ.

Iz elementarne teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da so grupe holomorfnih avtomorfizmov teh treh ploskev naslednje:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1) &= \{z \mapsto \tfrac{az+b}{cz+d} : \ ad - bc \neq 0\} && \text{(ulomljene linearne funkcije)}\\
\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) &= \{z \mapsto az + b : \ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} && \text{(kompleksna afina grupa)}\\
\mathrm{Aut}(\Delta) &= \{z \mapsto e^{i\theta} \tfrac{z-a}{1-\bar{a}z} : \ a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\} && \text{(Möbiusove preslikave)}
\end{aligned}$$

Sedaj je treba najti diskretne podgrupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$, $X \in \{\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, \Delta\}$, ki delujejo prosto in povsem nezvezno.

Ni težko preveriti, da ima vsak $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ negibno točko. Torej $\mathbb{CP}^1$ nima netrivialnih holomorfnih kvocientov.

Avtomorfizem $\gamma(z) = az + b$ ravnine $\mathbb{C}$ je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$. Torej je γ translacija $z \overset{\gamma}{\mapsto} z + b$. Grupa translacij $\mathbb{Z} \cong \langle\gamma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ deluje na $\mathbb{C}$ brez negibnih točk in povsem nezvezno. Kvocientna projekcija $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}^*$ je podana s preslikavo $z \mapsto e^{2\pi i z/b}$.

Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}^*$, $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$. Pripadajoči translaciji sta

$$\gamma(z) = z + a, \qquad \sigma(z) = z + b$$

Grupa $\Gamma = \langle\gamma, \sigma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ generirana z γ in σ je izomorfna grupi $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Kvocient $\mathbb{C}/\Gamma$ je torus s kompleksno strukturo.

Brez izgube splošnosti lahko gledamo primer $a = 1$, $\omega = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tedaj je $\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}/_{\Gamma_\omega} = \mathbb{T}_\omega$ je kompleksen torus, ki pripada številu ω. V mreži Γ_ω lahko vselej najdemo število $\omega' = u + iv$, tako da je $\Gamma_\omega = \Gamma_{\omega'}$ in velja

$$\left(|\omega'| > 1, \ -\frac{1}{2} < u \le \frac{1}{2} \right) \quad \text{ali} \quad \left(|\omega'| = 1, \ 0 \le u \le \frac{1}{2} \right). \tag{1.31}$$

Generator $\omega' \in \Gamma_\omega$ s temi lastnostmi je enolično določen in natanko določa kompleksno strukturo na torusu. Natančneje, če sta ω_1 in ω_2 kompleksni števili z lastnostmi (1.31), potem sta pripadajoča torusa $\mathbb{T}_{\omega_1} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_1}}$ in $\mathbb{T}_{\omega_2} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_2}}$ biholomorfno ekvivalentna natanko tedaj, ko je $\omega_1 = \omega_2$. Torej biholomorfno neekvivalentni kompleksni torusi sestavljajo kompleksno enoparametrično družino. (Za dokaz glej npr. Ahlfors [3].) Po drugi strani so vsi 2-torusi so med seboj difeomorfni.

Da se pokazati, da nobena grupa translacij ravnine $\mathbb{C}$ z več kot dvema generatorjema ne deluje povsem nezvezno. Odtod zaključimo, da so netrivialni holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ ravno $\mathbb{C}^*$ ter kompleksni torusi. Drugače povedano,če je Y enostavno povezana Riemannova ploskev, katere univerzalni krov je $\mathbb{C}$, potem je Y enaka eni od ploskev $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$ ali kompleksni torus.

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\Delta \subset \mathbb{C}$. Teh je veliko.

Naj bo S_g kompaktna orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$. Pri $g = 0$ je to 2-sfera, pri $g = 1$ imamo torus, za $g > 1$ pa je S_g povezana vsota g torusov. Taka ploskev ima do difeomorfizma natančno samo eno gladko strukturo. (To je, poljubni dve gladki strukturi na njej sta difeomorfni.)

Obstaja veliko grup $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$, ki delujejo na disku povsem nezvezno in prosto (brez fiksnih točk), tako da je kvocient Δ/Γ (ki je Riemannova ploskev) difeomorfen ploskvi S_g:

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \downarrow \pi \\ \Delta/\Gamma \ \cong \ S_g \end{array}$$

Za različne grupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$ lahko dobimo kvociente, ki so med seboj difeomorfni, niso pa biholomorfni.

Prostor modulov, imenovan tudi *Teichmüllerjev prostor*, je množica med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na dani ploskvi S_g. V primeru $g > 1$ lahko to množico predstavimo kot domeno v $\mathbb{C}^{3g-3}$, ki je homeomorfna krogli.

Več o uniformizacijski teoriji Riemannovih ploskev in o Teichmüllerjevih prostorih lahko najdete npr. v [**?**].

1.9 Svežnji

Naj bodo X, Y, Z mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ in naj bo $\pi : Z \to X$ submerzija razreda $\mathscr{C}^r$, tako da je vsako vlakno $Z_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in X)$ difeomorfno mnogoterosti Y. Taka preslikava se imenuje *svežen z vlaknom* Y, če je projekcija π lokalno (nad majhnimi odprtimi množicami $U \subset X$) ekvivalentna projekciji $pr : U \times Y \to U$, $pr(x,y) = x$. Natančna definicija je naslednja.

Definicija 1.112 *Preslikava $\pi : Z \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$ je $\mathscr{C}^r$* svežen z vlaknom Y*, če ima vsaka točka $x_0 \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in $\mathscr{C}^r$ difeomorfizem*

$$\theta : Z|_U \; = \; \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times Y, \tag{1.32}$$

tako da je $\theta(Z_x) = \{x\} \times Y$ za vsak $x \in U$. Ekvivalentno, naslednji diagram je komutativen:

$$\begin{tikzcd} Z|_U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times Y \arrow[d, "pr"] \\ U \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & U \end{tikzcd}$$

Mnogoterost X imenujemo bazni prostor*, Z je* totalni prostor *in Y je* vlakno *svežnja.*

Svežen označujemo takole:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Vsak difeomorfizem $\theta : Z|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ kot v definiciji se imenuje *sveženjska karta* svežnja $\pi : Z \to X$. Družina sveženjskih kart $\mathscr{U} = \{(U_i, \theta_i)\}_{i \in I}$, kjer je $\bigcup_{i \in I} U_i = X$, je *sveženjski atlas*. Prehodna preslikava

$$\theta_{ij} \; = \; \theta_i \circ \theta_j^{-1} : U_{ij} \times Y \to U_{ij} \times Y$$

je oblike

$$\theta_{ij}(x,y) \; = \; \big(x, g_{ij}(x,y)\big), \quad x \in U_{ij},\; y \in Y, \tag{1.33}$$

kjer je za vsak $x \in U_{ij}$ preslikava $g_{ij}(x,\cdot) \in \mathrm{Diff}^r(Y)$ difeomorfizem vlakna Y.

Primer 1.113 (Svežnji z diskretnim vlaknom) Če je Y množica z diskretno topologijo, potem je svežen $\pi : Z \to X$ z vlaknom Y krovni prostor nad X (glej def. 1.84). **Krovni prostori so torej svežnji z diskretnimi vlakni.** Totalni prostor Z je 2-števen natanko tedaj, ko je vlakno Y končna ali števna množica. $\square$

Definicija 1.114 *Naj bosta $\pi : Z \to X$ in $\pi' : Z' \to X$ svežnja razreda $\mathscr{C}^r$. Difeomorfizem $\Phi : Z \to Z'$ razreda $\mathscr{C}^r$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$, se imenuje $\mathscr{C}^r$* izomorfizem svežnjev.

Pogoj $\pi' \circ \Phi = \pi$ v definiciji pomeni, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & X \end{tikzcd}$$

Komutativnost diagrama pomeni, da Φ preslika vlakno $Z_x = \pi^{-1}(x)$ prvega svežnja difeomorfno na vlakno $Z'_x = (\pi')^{-1}(x)$ drugega svežnja za vsako točko $x \in X$. Izomorfna svežnja imata torej isto vlakno. (Natančnje, njuni vlakni sta $\mathscr{C}^r$ difeomorfni.)

Primer 1.115 (Produktni in trivialni sveženji) Sveženj

$$\pi : Z = X \times Y \to X, \qquad \pi(x,y) = x$$

imenujemo *produktni sveženj z vlaknom Y nad X.*

Sveženj $\pi : Z \to X$ z vlaknom Y je *trivialen*, če je izomorfen produktnemu svežnju; to je, če obstaja difeomorfizem $\Phi : Z \to X \times Y$, tako da velja $pr \circ \Phi = \pi$. Tak difeomorfizem imenujemo tudi *trivializacija svežnja $Z \to X$.* $\square$

Iz definicij sledi, da je sveženjska karta $\theta : Z|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times Y$ izomorfizem zoženega svežnja $Z|_U$ na produktni sveženj $U \times Y$. *Torej je vsak sveženj lokalno trivialen*: vsaka točka $x \in X$ ima okolico $U \subset X$, nad katero je sveženj trivialen.

Definicija 1.116 *Prerez svežnja $\pi : Z \to X$ je preslikava $f : X \to Z$, ki zadošča pogoju $\pi \circ f = \mathrm{Id}_X$.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[u, bend left=60, "f"] \end{tikzcd}$$

Množico vseh prerezov razreda $\mathscr{C}^r$ svežnja $\pi : Z \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$ označimo z

$$\Gamma^r(X,Z).$$

Prerez torej priredi vsaki točki $x \in X$ točko $f(x) \in Z_x$ v vlaknu projekcije π nad x.

V primeru, ko je $Z = X \times Y$ produktni sveženj, lahko vsaki preslikavi $f : X \to Y$ priredimo prerez $F : X \to Z$ s predpisom $F(x) = (x, f(x))$, $x \in X$. Obratno, prerezu $F : X \to Z = X \times Y$ produktnega svežnja pripada preslikava $f = pr_Y \circ F : X \to Y$, kjer $pr_Y : X \times Y \to Y$ označuje projekcijo $(x,y) \mapsto y$.

Torej imamo bijektivno korespondenco med preslikavami $X \to Y$ in prerezi produktnega svežnja $X \times Y \to X$.

Ker je vsak sveženj lokalno trivialen, lahko prereze lokalno (nad majhnimi odprtimi množicami v bazi X) obravnavamo kot preslikave iz baze X v vlakno Y svežnja.

Pogosto omejimo tip svežnja z zahtevo, da pripadajo prehodni difeomorfizmi $g_{ij}(x,\cdot)$ neki dani podgrupi $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^r(Y)$, ki se imenuje *strukturna grupa svežnja*. Ogledali si bomo nekaj najpomembnejših primerov.

Primer 1.117 (Vektorski svežnji) Sveženj z vlaknom $\mathbb{R}^n$ in strukturno grupo $GL_n(\mathbb{R})$ imenujemo *realen vektorski sveženj ranga n nad X* (def. 3.1 na str. 118).

Sveženj z vlaknom $\mathbb{R}^n$ in strukturno grupo $O_n(\mathbb{R})$ (ortogonalna grupa) imenujemo (realen) *ortogonalni sveženj ranga n nad X*.

Sveženj $\pi : Z \to X$ z vlaknom $\mathbb{C}^n$ in strukturno grupo $GL_n(\mathbb{C})$ imenujemo *kompleksen vektorski sveženj ranga n nad X*. Če sta X in Z kompleksni mnogoterosti in so projekcija $\pi : Z \to X$ ter sveženjske karte (1.32) holomorfne, potem je $Z \to X$ *holomorfen vektorski sveženj* nad X.

Prehodne preslikave (1.33) v vektorskem svežnju so oblike

$$\theta_{ij}(x,v) \;=\; \big(x, g_{ij}(x)v\big), \quad x \in U_{ij},\ v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.34}$$

kjer družina matričnih preslikav $g_{ij} : U_{ij} \to GL_n(\mathbb{R})$ (oziroma $g_{ij} : U_{ij} \to GL_n(\mathbb{C})$) zadošča kocikelnemu pogoju:

$$g_{ii} \;=\; 1, \quad g_{ij}g_{ji} \;=\; 1, \quad g_{ij}g_{jk}g_{ki} \;=\; 1.$$

Pri tem smo z 1 označili identično matriko.

Obratno: vsakemu 1-kociklu preslikav (g_{ij}) na nekem pokritju $\mathscr{U} = \{U_i\}$ baze X pripada vektorski sveženj $\pi : Z \to X$, ki ima sveženjski atlas $\theta_i : Z|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^n$ prehodnimi preslikavami g_{ij} (1.34). Tako dobljen vektorski sveženj je razreda $\mathscr{C}^r$ natanko tedaj, ko so baza X in preslikave g_{ij} razreda $\mathscr{C}^r$. Družina prehodnih preslikav (g_{ij}) določa vektorski sveženj do izomorfizma natančno.

Prerez vektorskega svežnja $Z \to X$, ki ima sveženjski atlas nad pokritjem $\{U_i\}$ baze X s prehodnimi preslikavami (1.34), je podan s kolekcijo preslikav $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ (oziroma $f_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ v kompleksnem primeru), ki zadošča pogojem

$$f_i(x) \;=\; g_{ij}(x) f_j(x), \qquad x \in U_{ij}.$$

Ker so prehodne preslikave med sveženjskimi kartami v vektorskem sveženju linearne na vlaknih, ima vsako vlakno Z_x $(x \in X)$ strukturo vektorskega prostora. Odtod sledi, da lahko prereze takega svežnja seštevamo in množimo s funkcijami na X. Z drugo besedo, če je $Z \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^r$, potem je množica $\Gamma^r(X,Z)$ vseh prerezov $X \to Z$ razreda $\mathscr{C}^r$ modul nad algebro $\mathscr{C}^r(X)$ vseh funkcij razreda $\mathscr{C}^r$ na bazi X. S pomočjo particij enote na X dobimo na ta način veliko prerezov, saj lahko lokalne prereze sestavljamo v globalne prereze. (Zadnja trditev seveda ne velja v razredih realno analitičnih ali holomorfnih svežnjev.)

Več o vektorskih svežnjih v poglavju 3.

Primer 1.118 (Univerzalni sveženj) Spomnimo se (glej razdelek 1.3.4), da sta $\mathbb{RP}^n$ in $\mathbb{CP}^n$ realen oz. kompleksen projektivni prostor dimenzije n.

Trditev 1.119 *Kanonična kvocientna projekcija* $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ *je realno analitičen sveženj z vlaknom* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Projekcija* $\pi : \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$ *je holomorfen sveženj z vlaknom* $\mathbb{C}^*$, *ki se imenuje* univerzalni sveženj *nad* $\mathbb{CP}^n$.

Dokaz Naj bo

$$U_j \;=\; \{x=(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}_* : x_j \neq 0\}, \quad V_j = \pi(U_j) \subset \mathbb{RP}^n.$$

Definiramo preslikavo

$$\theta_j : U_j \to V_j \times \mathbb{R}^*, \quad \theta_j(x_0,\ldots,x_n) \;=\; ([x_0:\cdots:x_n], x_j).$$

Tedaj je θ_j svežnjska karta na U_j. Za $0 \le i,j \le n$ je prehodna preslikava enaka

$$\theta_{ij}([x],v) \;=\; (\theta_i \circ \theta_j^{-1})([x],v) \;=\; \left([x_0:\cdots:x_n], \frac{x_i}{x_j} v\right). \tag{1.35}$$

Trditev sledi. Isti dokaz velja v kompleksnem primeru.

Primer 1.120 (Razpih (blowup) točke $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$**)** Ker so prehodne preslikave θ_{ij} (1.35) linearne na vsakem vlaknu (množenje s številom x_i/x_j), lahko svežnju $\pi : \mathbb{R}^{n+1}_* \to \mathbb{RP}^n$ (oz. $\pi : \mathbb{C}^{n+1}_* \to \mathbb{CP}^n$) dodamo ničelni prerez. Tako dobimo (realen oz. kompleksen) vektorski sveženj E ranga 1 nad $\mathbb{RP}^n$ oz. $\mathbb{CP}^n$. Podrobneje si oglejmo kompleksen primer:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] & E \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}^{n+1} \\ & \mathbb{CP}^n & \end{tikzcd}$$

Množica E je totalni prostor holomorfnega svežnja premic nad $\mathbb{CP}^n$. Lahko je predstavimo kot *incidenčno podmnožico* v produktu $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$E \;=\; \big\{\big([x],z\big) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \exists\, t \in \mathbb{C}, \text{ tako da je } z = tx\big\}, \quad \pi'\big([x],z\big) \;=\; z.$$

Projekcija $\pi' : E \to \mathbb{C}^{n+1}$ je surjektivna z vlakni

$$(\pi')^{-1}(z) \;=\; \begin{cases} \big([z],z\big), & z \neq 0; \\ \big\{\big([x],0\big) : [x] \in \mathbb{CP}^n\big\}; & z = 0. \end{cases}$$

Torej je vlakno E_0 nad točko $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ izomorfno projektivnemu prostoru $\mathbb{CP}^n$, zožena projekcija $\pi' : E \setminus E_0 \to \mathbb{C}^{n+1}_*$ pa je biholomorfna.

Kompleksna mnogoterost E se imenuje *razpih* (ang. *blowup* točke $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. Ta konstrukcija in njene posplošitve (razpih vzdolž kompleksne podmnogoterosti) so izjemnega pomena v algebraični in analitični geometriji, še posebej pri desingularizaciji analitičnih podmnožic. Najpomembnejši izrek v tej smeri je dokazal japonski matematik Hironaka. Lokalni model *kompleksnega prostora* *s singularnostmi* so analitične množice v $\mathbb{C}^N$, to je, množice definirane s holomorfnimi enačbami.

Izrek 1.121 (Hironaka: Izrek o desingularizaciji) *Za vsak kompleksen prostor s singularnostmi X obstaja kompleksna mnogoterost Z in prava holomorfna surjektivna projekcija $\pi : Z \to X$ s kompaktnimi vlakni $Z_x = \pi^{-1}(x)$ ($x \in X$), tako da je π biholomorfna nad regularnim delom X_{reg} prostora X.*

Primer 1.122 (Glavni svežnji) Naj bo G neka *Liejeva grupa*; to je gladka mnogoterost, v kateri sta produkt $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'$, ter invertiranje $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, gladki operaciji. (Glej poglavje 5.)
Grupa G deluje na sami sebi kot grupa translacij s produktom na levi:

$$G \ni g \mapsto \theta_g \in \mathrm{Diff}(G), \quad \theta_g(g') = gg' \quad \forall g' \in G.$$

Primeri Liejevih grup so matrične grupe, to je podgrupe v $GL_n(\mathbb{R})$ ali $GL_n(\mathbb{C})$. Več o Liejevih grupah lahko najdete v poglavju 5.
Sveženj $\pi : Z \to X$ z vlaknom G in strukturno grupo G (ki deluje na G kot grupa translacij) imenujemo *glavni G-sveženj nad X*. Tak sveženj je *holomorfen*, če sta X in Z kompleksni mnogoterosti, G je kompleksna Liejeva grupa in so projekcija $\pi : Z \to X$ ter sveženjske karte (1.32) holomorfne.
Prehodne preslikave (1.33) v glavnem G svežnju so oblike

$$(x, g) \mapsto \big(x, g_{ij}(x)g\big), \quad x \in U_{ij},\ g \in G,$$

kjer družina preslikav $g_{ij} : U_{ij} \to G$ zadošča kocikelnemu pogoju:

$$g_{ii} = 1, \quad g_{ij}g_{ji} = 1, \quad g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Pri tem smo z $1 \in G$ označili enoto grupe G.

Primer 1.123 (Sveženj ogrodij) Vsakemu vektorskemu svežnju $E \to X$ z vlaknom $\mathbb{R}^n$ in prehodnimi preslikavami $g_{ij} : U_{ij} \to G = GL_n(\mathbb{R})$ lahko priredimo glavni $GL_n(\mathbb{R})$ sveženj $Z \to X$ z istimi prehodnimi preslikavami. Tako dobljeni sveženj se imenuje *sveženj ogrodij* (angl. *frame bundle*), ki pripada danemu vektorskemu svežnju E. Elementi vlakna Z_x so vse možne baze vektorskega prostora E_x.

Primer 1.124 (univerzalni sveženj) V podrazdelku 1.3.5) smo obravnali Grassmanovo mnogoterost $G_k(\mathbb{R}^n)$ vseh k-dimenzionalnih vektorskih podprostorov prostora $\mathbb{R}^n$. Naj bo $V_k(\mathbb{R}^n)$ množica vseh urejenih k-teric $x = (x^1, \ldots, x^k)$ linearno neodvisnih vektorjev $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ (ki jo lahko identificiramo z množico vseh $n \times k$ matrik maksimalnega ranga k), in

$$\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n) \tag{1.36}$$

kvocientna projekcija, ki matriki $x = (x^1, \ldots, x^k)$ priredi njeno linearno lupino (glej 1.9). Grupa $GL_k(\mathbb{R})$ deluje na $V_k(\mathbb{R}^n)$ s produktom na desni, torej $(x, A) \mapsto x \cdot A$ za vsak $x \in V_k(\mathbb{R}^n)$ in $A \in GL_k(\mathbb{R})$. Lahko je videti, da so orbite tega delovanja ravno vlakna projekcije $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$.

Naloga 1.125 Pokaži, da je projekcija 1.36 realno analitičen glavni $GL_n(\mathbb{R})$ sveženj z vlaknom $GL_k(\mathbb{R})$. Ta sveženj se imenuje *univerzalni sveženj* nad Grassmanovo mnogoterostjo $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Analogna konstrukcija v kompleksnem primeru nam da holomorfen glavni $GL_n(\mathbb{C})$ sveženj nad kompleksno Grassmanovo mnogoterostjo $G_k(\mathbb{C}^n)$ z vlaknom $GL_k(\mathbb{C}^n)$.

Poglavje 2
Tangentni sveženj in vektorska polja

V tem poglavju razvijemo osnove diferencialnega računa na gladkih mnogoterostih. Fokus uvodnega dela poglavja je na konstrukciji tangentnega svežnja, ki omogoča globalno obravnavo tokov vektorskih polj kot posplošitev lokalnih rešitev sistemov navadnih diferencialnih enačb. V nadaljevanju obravnavamo fundamentalno domeno in problem kompletnosti polj, obnašanje nekompletnih orbit, komutator in Liejev odvod vektorskih polj, pojem involutivnosti vektorskih podsvežnjev tangentnega svežnja, dokažemo Frobeniusov izrek za involutivne podsvežnje, razvijemo Liejevo vrsto toka vektorskega polja in konstruiramo cevaste okolice podmnogoterosti, difeomorfne normalnemu svežnju podmnogoterosti. Obravnavane teme so neobhodna osnova nadaljnjemu razvoju teorije v sledečih poglavjih.

2.1 Tangentni sveženj mnogoterosti

2.1.1 Tangentni sveženj evklidskega prostora

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^n$ in $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ diferenciabilna preslikava. Njen *diferencial* v točki $p \in D$ je linearna preslikava

$$df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad v \mapsto df_p \cdot v,$$

ki je najboljša linearna aproksimacija f v točki p v smislu, da je

$$f(p+v) = f(p) + df_p \cdot v + o(v), \qquad \lim_{v \to 0} \frac{o(v)}{|v|} = 0.$$

V standardnem paru baz na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ je diferencial predstavljen z Jacobijevo matriko

$$J(f)(p) \;=\; \left(\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$$

parcialnih odvodov komponent f_i po spremenljivkah x_j.

Tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ v točki p je množica vseh vektorjev $v \in \mathbb{R}^n$, pripetih v p; torej je $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Tangentni sveženj domene $D \subset \mathbb{R}^n$ je disjunktna unija tangentnih prostorov $T_p\mathbb{R}^n$ po vseh točkah $p \in D$:

$$TD \;=\; \bigsqcup_{p\in D} T_p\mathbb{R}^n \;\cong\; D \times \mathbb{R}^n.$$

Označimo s $\pi : TD = D \times \mathbb{R}^n \to D$ bazno projekcijo $\pi(p,v) = p$. Tangentni sveženj domene $D \subset \mathbb{R}^n$ je torej *produktni sveženj ranga n* nad D.

Definiramo še *tangentno preslikavo $Tf : TD \to T\mathbb{R}^m$* s predpisom

$$TD \;=\; D \times \mathbb{R}^n \ni (p,v) \mapsto TF(p,v) \;=\; \big(f(p), df_p \cdot v\big) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T\mathbb{R}^m.$$

To je preslikava, ki preslika vlakno nad $p \in D$ v vlakno nad $f(p)$, na vlaknu pa je definirana kot diferencial df_p. Torej komutira naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc} TD & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ D & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Prireditev, ki domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ priredi njen tangentni sveženj $TD = D \times \mathbb{R}^n$ in diferenciabilni prelikavi $f : D \to D' \subset \mathbb{R}^m$ priredi njeno tangetno preslikavo $Tf : TD \to TD'$, je *funktorialna*, to je, izpolnjuje naslednje lastnosti:

- $T(\mathrm{Id}_D) = \mathrm{Id}_{TD}$.
- $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.
- $T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$, če je $f : D \to D'$ difeomorfizem.

Prva lastnost je očitna. Druga sledi neposredno iz verižnega pravila diferencial kompozicije preslikav:

$$d(g \circ f)_p \;=\; dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Zadnja lastnost sledi iz prvih dveh, saj je $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Prireditev $D \rightsquigarrow TD$, $f \rightsquigarrow Tf$, je torej *kovarianten funktor*.

Opisane pojme želimo sedaj posplošiti na gladke mnogoterosti. Intuitivna predstava tangentnih vektorjev na evklidskem prostoru ne dopušča direktne posplošitve, saj na mnogoterostih nimamo linearne strukture in zato vektorjev ne moremo preprosto translatirati.

Opisali bomo dve konstrukciji tangetnega funktorja. Prva, *geometrijska konstrukcija*, sloni na predstavi tangentnih vektorjev kot *hitrostnih vektorjev poti*. Ta prireditev je povsem očitna na evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Fiksirajmo točko $p \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $I \subset \mathbb{R}$ nek odprt interval, ki vsebuje točko $0 \in \mathbb{R}$, in $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$ diferenciabilna pot, ki zadošča pogoju $\gamma(0) = p$. Njen hitrostni vektor

$$\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

lahko razumemo kot tangentni vektor prostora $\mathbb{R}^n$ v točki p. Dve poti γ_1, γ_2 določata isti tangentni vektor, če velja $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ in $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. Obratno, vsak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je hitrostni vektor neke poti skozi točko $p \in \mathbb{R}^n$, npr. premice $\gamma(t) = p + tv$.

To predstavo tangentnih vektorjev lahko posplošimo na mnogoterosti. Tangentni vektorji v točki $p \in X$ so ravno hitrostni vektorji poti v X, ki gredo pri $t = 0$ skozi p.

Za tangentne vektorje $v \in T_p\mathbb{R}^n$ imamo še drugo naravno interpretacijo, ki jo ravno tako lahko posplošimo na mnogoterosti. Vektorju $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ priredimo *smerni odvod* v točki $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_v f \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\, v_j \;=\; \nabla f(p) \cdot v.$$

Označimo z $\mathscr{C}_p^\infty$ algebro zarodkov gladkih funkcij v točki p. (Zarodek funkcije v točki p je predstavljen s funkcijo v neki odprti okolici te točke, pri čemer dve funkciji predstavljala isti zarodek v točki p, če se ujemata v neki okolici p.) Očitno je ∇_v linearen operator

$$\nabla_v : \mathscr{C}_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki zadošča *Leibnizovemu pravilu*:

$$\nabla_v(fg) \;=\; \nabla_v f \cdot g(p) + f(p) \cdot \nabla_v f.$$

Tak operator se imenuje *derivacija* na algebri $\mathscr{C}_p^\infty$. Videli bomo, da so derivacije v naravni bijektivni korespondenci s smernimi odvodi, torej z vektorji $v \in \mathbb{R}^n$.

2.1.2 Geometrijska konstrukcija tangentnega svežnja

Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^1$ in $p \in X$. Označimo z Γ_p množico vseh $\mathscr{C}^1$ poti $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, ki zadoščajo pogoju $\gamma(0) = p$. Število $\varepsilon > 0$ je lahko odvisno od γ.

Definicija 2.1 *Poti $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_p$ sta ekvivalentni, $\gamma_1 \sim_p \gamma_2$, če obstajata okolica $p \in U \subset X$ in karta $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na X, tako da velja*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi \circ \gamma_1(t) \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi \circ \gamma_2(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Trditev 2.2 *Definicija relacije $\sim_p$ je neodvisna od izbire lokalne karte. Tako definirana relacija $\sim_p$ je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz Naj bo (V, ψ) neka druga karta na X s $p \in V$. Za vsako pot $\gamma \in \Gamma_p$ velja

$$\psi \circ \gamma \;=\; (\underbrace{\psi \circ \phi^{-1}}_{\text{prehodna}}) \circ (\underbrace{\phi \circ \gamma}_{\text{pot v } \mathbb{R}^n}).$$

Denimo, da poti γ_1 in γ_2 zadoščata pogoju (2.1). Z uporabo verižnega pravila dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi \circ \gamma_1(t) \;&=\; d(\psi\phi^{-1})_{(\phi(p))} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi \circ \gamma_1(t) \\ &=\; d(\psi\phi^{-1})_{(\phi(p))} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi \circ \gamma_2(t) \\ &=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi \circ \gamma_2(t). \end{aligned}$$

To ravno pomeni, da sta γ_1 in γ_2 ekvivalentno tudi glede na karto ψ. Očitno je $\sim_p$ ekvivalenčna relacija. $\square$

Označimo z $[\gamma]_p$ ekvivalenčni razred poti $\gamma \in \Gamma_p$ glede na relacijo $\sim_p$.

Definicija 2.3 (Tangentni prostor) *Tangentni prostor mnogoterosti X v točki p je množica ekvivalenčnih razredov $\mathscr{C}^1$ poti skozi p glede na relacijo v definiciji 2.1:*

$$T_pX \;=\; \big\{[\gamma]_p : \gamma \in \Gamma_p\big\}.$$

Primer 2.4 Naj bo X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $p \in X$. Če uporabimo identično karto na $\mathbb{R}^n$, vidimo:

$$\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \iff \dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Torej je ekvivalenčni razred $[\gamma]_p$ poti γ v točki $p = \gamma(p)$ natančno določen s hitrostnim vektorjem $\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava

$$T_p\mathbb{R}^n \ni [\gamma]_p \;\longmapsto\; \dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n$$

je bijektivna: injektivna je po definiciji relacije $\sim_p$, surjektivnost pa vidimo tako, da poljubnemu vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot $\gamma(t) = p + tv$; očitno je $[\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) = v$. Torej lahko identificiramo tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ (v smislu def. 2.3) z $\mathbb{R}^n$. $\square$

Naj bo X poljubna $\mathscr{C}^1$-mnogoterost in $p \in X$. Izberemo lokalno karto (U,ϕ) na X, tako da je $p \in U$. Preslikava $d\phi_p : T_pX \to T_{f(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, definirana s predpisom

$$T_pX \ni [\gamma]_p \;\overset{d\phi_p}{\longmapsto}\; [\phi \circ \gamma]_{\phi(p)=0} \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\phi \circ \gamma) \in \mathbb{R}^n,$$

je bijekcija. Surjektivnost vidimo tako, da vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot

$$\gamma(t) \;=\; \phi^{-1}(\phi(p) + tv), \quad \gamma(0) = p.$$

Očitno je

$$d\phi_p[\gamma]_p \;=\; [\phi\circ\gamma]_0 \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(\phi(p)+tv) \;=\; v.$$

Injektivnost sledi direktno iz definicije relacije $\sim_p$ na Γ_p.

Preslikava $d\phi_p$ se imenuje *diferencial* preslikave ϕ v točki p. Sedaj definirajmo diferencial poljubne diferenciabilne preslikave med mnogoterostmi.

Definicija 2.5 *Naj bo $f : X \to Y$ diferenciabilna preslikava. Njen diferencial v točki $p \in X$ je preslikava $df_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$, definirana s predpisom*

$$df_p[\gamma]_p \;=\; [f\circ\gamma]_{f(p)} \in T_{f(p)}Y, \qquad [\gamma]_p \in T_pX. \tag{2.2}$$

Trditev 2.6 *Diferencial df_p je dobro definirana preslikava, torej je desna stran odvisna le od od izbire predstavnika ekvivalenčnega razreda $[\gamma]_p \in T_pX$.*

Dokaz Naj bosta poti γ in γ' ekvivalentni v točki p: $[\gamma]_p = [\gamma']_p$. To pomeni, da za vsako lokalno karto (U,ϕ) na X, $p \in U$, velja

$$(\phi\circ\gamma)^{\cdot}(0) \;=\; (\phi\circ\gamma')^{\cdot}(0).$$

Izberimo karto (V,ψ) na Y z $f(p) \in V$. Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}(\psi f\gamma)^{\cdot}(0) \;&=\; (\psi f\phi^{-1}\phi\gamma)^{\cdot}(0)\\ &=\; d(\psi f\phi^{-1})_{\phi(p)}(\phi\gamma)^{\cdot}(0)\\ &=\; d(\psi f\phi^{-1})_{\phi(p)}(\phi\gamma')^{\cdot}(0)\\ &=\; (\psi f\gamma')^{\cdot}(0).\end{aligned}$$

To ravno pomeni, da je $[f\circ\gamma]_{f(p)} = [f\circ\gamma']_{f(p)} \in T_{f(p)}Y$. □

Iz definicije preprosto sledi, da se nova definicija diferenciala za preslikave med evklidskimi prostori ujema s klasično definicijo.

Definicija 2.7 *Tangentni sveženj $\mathscr{C}^1$ mnogoterosti X je disjunktna unija tangentnih prostorov v točkah $x \in X$:*

$$TX \;=\; \bigsqcup_{x\in X} T_xX.$$

Označimo s $\pi : TX \to X$ bazno projekcijo; torej je $\pi^{-1}(x) = T_xX$ za vsak $x \in X$.

Iz primera 2.4 sledi, da je tangentni sveženj odprte podmnožice $X \subset \mathbb{R}^n$ izomorfen produktnemu svežnju $TX = X \times \mathbb{R}^n \to X$. V splošnem je tangentni sveženj odprte podmnožice U mnogoterosti X enak zožitvi tangentnega svežnja TX na U:

$$U \text{ odprta podmnožica } X \implies TU = TX|_U = \bigsqcup_{x\in U} T_xX.$$

2.1.3 Tangentna preslikava

Diferenciabilni preslikavi $f : X \to Y$ mnogoterosti priredimo njeno *tangentno preslikavo* $Tf : TX \to TY$, tako da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & TY \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

in je $Tf|_{T_xX} = df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ diferencial preslikave f v točki $x \in X$.

Osnovni primer: X je odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$ in $Y = \mathbb{R}^m$. Tedaj je $TX = X \times \mathbb{R}^n$ in $TY = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Za vsako diferenciabilno preslikavo $f : X \to \mathbb{R}^m$ je tangentna preslikava $Tf : TX \to T\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ podana s predpisom

$$(Tf)(x,v) \;=\; \big(f(x), df_x \cdot v\big).$$

Izrek 2.8 *Tangentna preslikava zadošča naslednjim lastnostim:*

1. $T(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{TX}$.
2. *Če je* $f \in \mathscr{C}^1(X,Y)$ *in* $g \in \mathscr{C}^1(Y,Z)$, *je* $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.
3. *Če je* $f \in \mathrm{Diff}(X,Y)$ *difeomorfizem, je* $T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$.

Dokaz Navedene lastnosti sledijo neposredno iz definicije diferenciala (def. 2.5). Zadnja trditev je preprosta posledica prvih dveh. □

Sedaj bomo tangentni sveženj TX opremili s strukturo $\mathscr{C}^{r-1}$ vektorskega svežnja nad X. Naj bo $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ nek $\mathscr{C}^r$-atlas na X. Vsaki karti $\phi_i : U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^n$ priredimo njeno tangentno preslikavo:

$$T\phi_i : TX|_{U_i} = TU_i \;\longrightarrow\; TU_i' = U_i' \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$T_pX \ni [\gamma]_p \xrightarrow{T\phi_i} \big(\phi_i(p), (d\phi_i)_p[\gamma]_p\big) = \left(\phi_i(p), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_i \circ \gamma)\right), \quad p \in U_i.$$

Tako dobimo na TX atlas $\big\{(TU_i, T\phi_i)\big\}$. Denimo, da $U_i \cap U_j = U_{ij} \neq 0$. Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$(T\phi_i) \circ (T\phi_j)^{-1} : \underbrace{\phi_j(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n}_{T(\phi_j(U_{ij}))} \longrightarrow \underbrace{\phi_i(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n}_{T(\phi_i(U_{ij}))}$$

$$T(\phi_i)(T\phi_j)^{-1} = T(\phi_i) \circ T(\phi_j^{-1}) = T(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) = T(\phi_{ij}),$$
$$(x,v) \longmapsto (\phi_{ij}(x), (d\phi_{ij})_x v)\,.$$

Ker je prehodna preslikava $\phi_{ij}(x)$ $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem, je njen diferencial $(d\phi_{ij})_{\phi_j(x)}$ predstavljen z neizrojeno $n \times n$ matrično funkcijo, katere komponente so prvi parcialni odvodi komponent ϕ_{ij}, torej $\mathscr{C}^{r-1}$ funkcije spremenljivke $x \in \phi_j(U_{ij}) \subset \mathbb{R}^n$. Zato je preslikava

$$(x,v) \longmapsto d\phi_{ij}(x)v$$

razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ v obeh spremenljivkah; v spremenljivki $v \in \mathbb{R}^n$ je linearna.

Topologija na TX je enolično določena z zahtevo, da je vsaka množica oblike $TX|_{U_i} = TU_i$ odprta v TX in je prirejena karta $T\phi_i$ homeomorfizem:

$$T\phi_i : TX|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i' \times \mathbb{R}^n.$$

Očitno je X topološka mnogoterost dimenzije $\dim TX = 2\dim X$.

Preslikava $T\phi_i$ ni sveženjska karta na TX v smislu definicije 1.112, saj smo bazno točko $x \in U_i$ preslikali v $\phi_i(x) \in \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, medtem ko se v definiciji 1.112 bazna točka ohranja. Definirajmo sedaj preslikavo

$$\Theta_i : TX|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^n, \qquad \Theta_i(e) = (\pi(e), (d\phi_i)_{\pi(e)} \cdot e). \tag{2.3}$$

Očitno je Θ_i homeomorfizem. (Razlika s $T\phi_i$ je le v tem, da Θ_i ohranja bazno točko.) Prehodna preslikava

$$\Theta_{ij} \ = \ \Theta_i \circ \Theta_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{R}^n \ \longrightarrow \ U_{ij} \times \mathbb{R}^n$$

je enaka

$$\Theta_{ij}(x,v) \ = \ \big(x, (d\phi_{ij})_{\phi_j(x)} v\big), \qquad x \in U_{ij},\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Torej je $\Theta_{ij}(x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearni izomorfizem vlakna.

Družina $\{\Theta_i\}_i$ je torej *sveženjski atlas* razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ na TX, in TX opremljen s tem atlasom je $\mathscr{C}^{r-1}$ vektorski sveženj ranga $n = \dim X$ nad X. Matrične funkcije

$$g_{ij}(x) = (d\phi_{ij})_{\phi_j(x)} \in GL_n(\mathbb{R}), \quad x \in U_{ij},$$

ki predstavljajo Jacobijevo matriko diferenciala, sestavljajo kocikel prehodnih preslikav med sveženjskimi kartami $\{\Theta_i\}_i$ na tangentnem sveženju $TX \to X$.

Izrek 2.8 pove, da je prireditev

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "f"'] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ Y \arrow[r, rightsquigarrow] & TY \end{tikzcd}$$

kovarianten funktor iz kategorije $\mathscr{C}^r$-mnogoterosti v kategorijo $\mathscr{C}^{r-1}$-vektorskih svežnjev nad $\mathscr{C}^r$-mnogoterostmi. Ta funktor se imenuje *tangentni funktor*.

2.1.4 Tangentni prostor podmnogoterosti

Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$ neka $\mathscr{C}^r$-podmnogoterost dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$. Za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathscr{C}^r$-funkcije $g_1, \ldots, g_d : U \to \mathbb{R}$ z linearno neodvisnimi gradienti, tako da je

$$X \cap U \;=\; \{x \in U : g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Tangentni sveženj $TX|_{X\cap U}$ je enak

$$TX|_{X\cap U} \;=\; \{(x,v) : x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n,\, g_j(x) = 0,\, (dg_j)_x v = 0,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

V vsaki točki $x \in X \cap U$ je torej

$$T_xX \;=\; \ker\bigl(dg_x : T_x\mathbb{R}^n \to T_0\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d\bigr).$$

Odtod vidimo, da je tangentni sveženj TX podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ tangentnega svežnja $T\mathbb{R}^n|_X = X \times \mathbb{R}^n$.
Velja še več. Dopolnimo preslikavo $g = (g_1, \ldots, g_d) : U \to \mathbb{R}^d$ do lokalne karte

$$\phi \;=\; (\phi_1, \ldots, \phi_m, g_1, \ldots, g_d) : U \longrightarrow \phi(U) \;=\; U' \subset \mathbb{R}^n.$$

Njena tangentna preslikava $T\phi : TU \to TU' = U' \times \mathbb{R}^n$ preslika $TX|_{U\cap X}$ na množico

$$\phi(U \cap X) \times \bigl(\mathbb{R}^m \times \{0\}^d\bigr) \;=\; \bigl(U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)\bigr) \times \bigl(\mathbb{R}^m \times \{0\}^d\bigr).$$

Prirejena sveženjska karta

$$\Phi : TU \;=\; U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n, \qquad \Phi(x,v) \;=\; (x, (d\phi)_x v)$$

preslika vlakno T_pX $(p \in U \cap X)$ v koordinatni podprostor $\mathbb{R}^m \times \{0\}^d \subset \mathbb{R}^n$, torej je

$$\Phi(TX|_{U\cap X}) \;=\; (U \cap X) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d).$$

To pomeni, da Φ izravna $TX|_{U\cap X}$ v koordinatni podsveženj $(U \cap X) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)$ trivialnega svežnja $(U \cap X) \times \mathbb{R}^n$.
Zato pravimo, da je TX *vektorski podsveženj* ranga m svežnja $T\mathbb{R}^n|_X \cong X \times \mathbb{R}^n$. Podsvežnje vektorskih svežnjev podrobneje obravnavamo v razdelku 3.4.

Ker je zgornja konstrukcija lokalne narave na izvorni mnogoterosti, se posploši na primer, ko je X podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ poljubne $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti Y. Njen tangentni sveženj TX je tedaj vektorski podsveženj razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ svežnja $TY|_X$, to je tangetnega svežnja mnogoterosti Y, zoženega na podmnogoterost X.

2.1.5 Algebraična konstrukcija tangentnega svežnja

Da se izognemo določenim nevsebinskim tehničnim težavam, se omejimo na primer, ko je X gladka ($\mathscr{C}^\infty$) mnogoterost. Definirajmo

$$\mathscr{C}_x^\infty = \mathscr{C}_{x,X}^\infty = \text{ algebra zarodkov gladkih funkcij v } x \in X.$$

Tangentni prostor T_xX definiramo kot množico vseh operatorjev $v : \mathscr{C}_x^\infty \to \mathbb{R}$, ki so linearni in zadoščajo Leibnizovemu pravilu

$$v(f \cdot g) \;=\; v(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot v(g).$$

Taki operatorji se imenujejo *derivacije* na algebri $\mathscr{C}_x^\infty$. Torej bomo tangentne vektorje $v \in T_xX$ predstavili z derivacijami.
Oglejmo si osnovni primer $X = \mathbb{R}^n$, $x = 0 \in \mathbb{R}^n$. Z uporabo Leibnizovega pravila za konstantni funkciji $f = g \equiv 1$ dobimo

$$v(1) = v(1\cdot 1) = v(1)\cdot 1 + 1\cdot v(1) = 2v(1) \implies v(1) = 0.$$

Odtod sledi, da je vrednost v na vsaki konstantni funkciji enaka nič.

Trditev 2.9 *Vsaka gladka funkcija f v okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$ je oblike*

$$f(x_1,\ldots,x_n) \;=\; f(0) + \sum_{j=1}^n x_j\, g_j(x_1,\ldots,x_n) \tag{2.4}$$

za neke gladke funkcije $g_1,\ldots,g_n$ v okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz Po osnovnem izreku integralnega računa velja

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(tx)\,dt = f(0) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(tx)\,dt = f(0) + \sum_{j=1}^n x_j\, g_j(x),$$

kjer je $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} f(tx)\,dt$. □

Trditev 2.10 *Vsaka derivacija v na algebri $\mathscr{C}_{0,\mathbb{R}^n}^\infty$ je enolično predstavljena s smernim odvodom $\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_{x=0}$, kjer je $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ za $j = 1,\ldots,n$.*

Dokaz Definiramo $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ (derivacija v deluje na koordinatni funkciji x_j). Iz razvoja (2.4) ter $v(f(0)) = 0$ sledi

$$v(f) = \sum_{j=1}^n v(x_j) \cdot g_j(0) + \sum_{j=1}^n x_j(0) \cdot v(g_j) = \sum_{j=1}^n v_j \cdot g_j(0) = \left(\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{x=0} \right)(f).$$

Trditev je dokazana. S tem dobimo izomorfizem $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. □

Sedaj definirajmo diferencial preslikave. Če je $f : X \to Y$ gladka preslikava gladkih mnogoterosti, potem je za vsak $x \in X$ preslikava

$$f^* : \mathscr{C}^\infty_{f(x),Y} \longrightarrow \mathscr{C}^\infty_{x,X}, \qquad g \overset{f^*}{\longmapsto} g \circ f$$

homomorfizem algeber zarodkov. Diferencial $df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ definiramo kot njej dualno preslikavo:

$$(df_x \cdot v)(g) \overset{def}{=} v(g \circ f), \quad g \in \mathscr{C}^\infty_{f(x),Y}.$$

Lahko je preveriti, da tako definiran diferencial in prirejena tangentna preslikava zadoščata istim lastnostim, kot smo jih dobili pri geometrijski konstrukciji.

Sedaj imamo dve konstrukciji tangetnega funktorja — geometrijsko in algebraično. Obe konstrukciji sta v naravni zvezi, ki jo dobimo iz naslednjega opažanja.

Naj bo $\gamma \in \Gamma_x$ gladka pot skozi točko $\gamma(0) = x \in X$ v mnogoterosti X. Po eni strani γ določa geometrijski tangentni vektor $v = [\gamma] \in T_xX$. Obenem določa tudi derivacijo $\delta_\gamma : \mathscr{C}^\infty_x \to \mathbb{R}$ na algebri $\mathscr{C}^\infty_x$ (torej tangentni vektor $\delta_\gamma \in T^a_xX$, kjer smo z indeksom a označili, da gre za algebraično definiran tangentni prostor) s predpisom

$$\delta_\gamma : \mathscr{C}^\infty_x \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \delta_\gamma(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) \text{ za vsak } f \in \mathscr{C}^\infty_x.$$

Trivialno je preveriti, da je δ_γ res derivacija, odvisna le od vektorja $v = [\gamma] \in T_xX$. Če izberemo lokalno karto $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ z $x \in U$ in $\phi(x) = 0$, je namreč

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma(t)) \\ &= d(f \circ \phi^{-1})_0 \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi \circ \gamma(t)) \end{aligned}$$

in zadnji odvod je po definiciji odvisen le od ekvivalenčnega razreda $[\gamma]_x$ poti.

Torej dobimo inducirano preslikavo

$$\theta : T_xX \longrightarrow T^a_xX, \qquad v = [\gamma] \longmapsto \theta(v) = \delta_\gamma$$

geometrijskega tangentnega prostora T_xX v algebraičen tangentni prostor T^a_xX.

V primeru $X = \mathbb{R}^n$ je $\theta : T_x\mathbb{R}^n \to T^a_x\mathbb{R}^n$ izomorfizem, ki vektorju $v = \dot{\gamma}(0) = (v_1, \ldots, v_n) \in T_x\mathbb{R}^n$ priredi smerni odvod $\nabla_v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T^a_x\mathbb{R}^n$ v točki x.

Preverimo lahko, da za vsako gladko preslikavo $f : X \to Y$ komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} T_xX \arrow[r, "df_x"] \arrow[d, "\theta"'] & T_{f(x)}Y \arrow[d, "\theta"] \\ T_x^aX \arrow[r, "d^af_x"] & T_{f(x)}^aY \end{tikzcd}$$

Iz teh dejstev sledi, da je θ naravna translacija geometrijskega tangentnega funktorja v algebraičen tangentni funktor.

V nadaljevanju bomo uporabljali oba pristopa, odvisno od vrste problema. Za geometrijsko predstavo je seveda naravnejša geometrijska konstrukcija, medtem ko je algebraična konstrukcija bolje prilagojena konkretnim izračunom.

2.2 Vektorska polja

Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. V prejšnjem razdelku smo videli, da ima njen tangentni sveženj TX strukturo vektorskega svežnja ranga $n = \dim X$ in razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ nad X. Zato lahko govorimo o prerezih $X \to TX$ razreda $\mathscr{C}^{r-1}$.

Definicija 2.11 *Naj bo X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$.* Vektorsko polje *na X je prerez njenega tangentnega svežnja, to je funkcija $v : X \to TX$, za katero velja $v_x \in T_xX$ za vsako točko $x \in X$.*
Vektorsko polje v je razreda $\mathscr{C}^k$ za nek $k < r$, če je $\mathscr{C}^k$ preslikava $X \to TX$.

Oglejmo si najprej primer, ko je X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Naj bodo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Koordinatna vektorska polja na $\mathbb{R}^n$ so

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_n};$$

to so smerni odvodi v koordinatnih smereh. Za vsako točko $p \in \mathbb{R}^n$ so vektorji $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ v točki p standardna baza tangentnega prostora $T_p\mathbb{R}^n$.

Geometrijska predstava je naslednja. Naj bo $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ standardna baza, kjer je $\mathbf{e}_k$ vektor z 1 na k-tem mestu in ničlami na preostalih mestih. Bazna vektorska polja so tedaj

$$v_k(x) = (x, \mathbf{e}_k), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ k = 1, \ldots, n.$$

V smislu izomorfizma med geometrijskim tangentnim svežnjem $T\mathbb{R}^n$ in algebraičnim tangentnim svežnjem $T^a\mathbb{R}^n$ prerezu v_k ustreza $\frac{\partial}{\partial x_k}$.

Vsako vektorsko polje na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je linearna kombinacija koordinatnih polj:

$$v(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad x \in U.$$

Koeficienti v_j so funkcije na U. Vektorsko polje je gladko razreda $\mathscr{C}^k$ natanko tedaj, ko so vse komponentne funkcije v_j razreda $\mathscr{C}^k$.

Potisk in povlek vektorskih polj. Naj bo $f : X \to Y$ nek $\mathscr{C}^r$-difeomorfizem in v vektorsko polje na X. Potem je $f_* v = w$ vektorsko polje na Y, določeno s predpisom

$$(f_* v)_{f(p)} = df_p \cdot v_p, \qquad p \in X.$$

Vektorsko polje $f_* v$ se imenuje *potisk* vektorskega polja v s preslikavo f. Če je polje v razreda $\mathscr{C}^k$ za nek $k \le r-1$, potem je polje $w = f_* v$ prav tako razreda $\mathscr{C}^k$.

V bistvu gre za izražavo vektorskega polja v drugem sistemu koordinat.

Oglejmo si naslednji poseben primer. Naj bo $f = (f_1, \ldots, f_n)$ difeomorfizem odprte množice $D \subset \mathbb{R}^n$ na množico $D' \subset \mathbb{R}^n$. Označimo z $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koordinate na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ in z $y = (y_1, \ldots, y_n)$ koordinate na kodomeni $D' \subset \mathbb{R}^n$. Za poljubno diferenciabilno funkcijo $g : D' \to \mathbb{R}$ dobimo po definiciji potiska f_* in z uporabo verižnega pravila naslednjo identiteto:

$$\begin{aligned} f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \bigg|_x \right)(g) \;&=\; \frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f)(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j} g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \\ &=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, dobimo

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \bigg|_x \right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \; \frac{\partial}{\partial y_k} \bigg|_{f(x)}$$

Odtod vidimo, da predstavlja linearno preslikavo $f_* = df_x : T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ (diferencial) v standardnih bazah na tangentnih prostorih $T_x\mathbb{R}^n$ in $T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ Jacobijeva matrika preslikave f v točki x:

$$Jf(x) \;=\; \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \right).$$

Naj bo (U, ϕ) lokalna karta na mnogoterosti X dimenzije n. Ker je diferencial $d\phi_p : T_pX \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ linearni izomorfizem za vsako točko $p \in U$, obstajajo vektorska polja $e_1, \ldots, e_n : U \to TX|_U$, tako da je

$$\phi_* e_j \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

V vsaki točki $p \in U$ so vektorji $e_j|_p$ baza tangentnega prostora T_pX, ki jo ϕ_* preslika v standardno bazo prostora $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$. Tako določena n-terica vektorskih polj $(e_1, \ldots, e_n)$ se imenuje *polje baz* na $TX|_U$ (angl. *frame field*) glede na karto ϕ. Vsako vektorsko polje v na U lahko enolično zapišemo v obliki

$$v_p \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(p)\, e_j,$$

kjer se $v_1, \ldots, v_n : U \to \mathbb{R}$ funkcije. Če označimo $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$, dobimo

$$(\phi_* v)_x \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x .$$

Poleg potiska $f_* v$ vektorskega polja z difeomorfizmom $f : X \to Y$ definiramo tudi *povlek*. Če je w vektorsko polje na Y, potem je

$$v \;=\; f^* w \;=\; (f^{-1})_* w$$

vektorsko polje na X, dobljeno kot potisk polja w z inverzno preslikavo $f^{-1} : Y \to X$. To vektorsko polje $f^* w$ se imenuje *povlek (pull-back)* vektorskega polja w na X.

Povlek lahko definiramo tudi v splošnejšem primeru, kot je $f : X \to Y$ *lokalni difeomorfizem*, to je, ko je diferencial $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ v poljubni točki $x \in X$ izomorfizem. Če je w vektorsko polje na Y, potem očitno obstaja natanko eno vektorsko polje v na X, da je $f_* v = w$; kot prej označimo $v = f^* w$.

Potisk vektorskega polja s preslikavo, ki ni injektivna, v splošnem ni dobro definiran, saj iz $x \neq x' \in X$ ter $f(x) = f(x') = y \in Y$ dobimo s potiskom vektorskega polja v na X v splošnem dva različna vektorja $df_x \cdot v_x,\ df_{x'} \cdot v_{x'} \in T_y Y$.

Oglejmo si sedaj poseben primer, ko je $f : X \to Y$ regularen $\mathscr{C}^r$-krov za nek $r \geq 1$. Grupa $\Gamma = \mathrm{Deck}_f(X)$ krovnih translacij deluje na X prosto in povsem nezvezno ter je $Y = X/\Gamma$. (Glej razdelek 1.8.1.) V tem primeru velja $f(x) = f(x')$ natanko tedaj, ko obstaja $\gamma \in \Gamma$, tako da je $\gamma(x) = x'$. Tedaj je $f \circ \gamma = f$.

Definicija 2.12 *Vektorsko polje v na mnogoterosti X, ki zadošča pogoju $\gamma_* v = v$ za nek $\gamma \in \mathrm{Diff}(X)$, se imenuje γ-invariantno. Vektorsko polje je Γ-invariantno za neko grupo difeomorfizmov $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(X)$, če je γ-invariantno za vsak $\gamma \in \Gamma$.*

Če je v Γ-invariantno polje vektorsko polje na X in je $f : X \to X/\Gamma = Y$ kvocientna projekcija, potem iz $f \circ \gamma = f$ za vsak $\gamma \in \Gamma$ ter verižnega pravila sledi

$$f(x) = f(x') \implies x' = \gamma(x)\ (\gamma \in \Gamma) \implies df_x \cdot v_x = df_{x'} \circ d\gamma_x \cdot v_x = df_{x'} \cdot v_{x'} .$$

To pomeni, da je potisk $f_* v$ dobro definirano vektorsko polje na kvocientu Y, seveda v kolikor je Y mnogoterost. Obratno, vsako vektorsko polje w na Y ima dobro definiran povlek $f^* w = v$, ki je Γ-invariantno vektorsko polje na X.

Primer 2.13 Naj bo Γ grupa translacij ravnine $\mathbb{R}^2$ z dvema generatorjema. Oglejmo si primer $\Gamma = \langle \gamma, \sigma \rangle$, kjer je $\gamma(x,y) = (x+1, y)$, $\sigma(x,y) = (x, y+1)$. Vsako konstantno vektorsko polje

$$v \;=\; a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

je Γ-invariantno. Torej obstaja vektorsko polje w na torusu $\mathbb{R}^2/\Gamma = \mathbb{T}^2$, ki je prirejeno polju v glede na kvocientno projekcijo $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}$. Integralne krivulje polja w so slike premic s smernim vektorjem $k = b/a$. Če je število k iracionalno, je slika vsake take premice povsod gosta v torusu $\mathbb{T}^2$.

Splošneje, vektorsko polje (2.5) je Γ-invariantno, če sta koeficienta a in b Γ-invariantni funkciji na $\mathbb{R}^2$, kar v danem primeru pomeni, da sta dvojno periodični:

$$a(x+1,y) = a(x,y+1) = a(x,y), \quad b(x+1,y) = b(x,y+1) = b(x,y).$$

Definicija 2.14 (Vektorsko polje vzdolž preslikave) *Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X in w vektorsko polje na mnogoterosti Y. Polje w je* prirejeno *polju v vzdolž preslikave $f : X \to Y$, če velja*

$$df_x \cdot v_x \;=\; w_{f(x)} \quad \textit{za vsak } x \in X.$$

To je splošnejši pojem od potiska, saj v splošnem ne more potisniti vektorskega polja naprej s preslikavo, ki ni difeomorfizem ali vsaj injektivna.

Tipičen primer je potisk vektorskega polja, ki je invarianten na kakšno diskretno grupo difeomorfizmov, s kvocientno projekcijo kot v zgornjem primeru. Drug naravni primer je, ko je $f : X \to Y$ vložitev mnogoterosti X na podmnogoterost $Z := f(X) \subset Y$. Če je w vektorsko polje na okolici Z v Y, ki je vzdolž Z tangentno na Z, potem je zožitev $w|_{TZ}$ enaka potisku $f_* v$ nekega vektorskega polja na X.

2.3 Tok vektorskega polja

V tem razdelku definiramo pojem toka vektorskega polja. Videli bomo, da je to posplošitev pojma rešitve sistema navadnih diferencialnih enačb v odvisnosti od začetnega pogoja.

Definicija 2.15 *Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X. Pot $\gamma : (\alpha,\beta) \to X$ razreda $\mathscr{C}^1$, kjer je (α,β) interval v $\mathbb{R}$, se imenuje* integralna krivulja *ali* tokovnica *polja v, če velja*

$$\dot\gamma(t) \;=\; v(\gamma(t)), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Pri tem je $\dot\gamma(t) = d\gamma_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ in je $\frac{\partial}{\partial t}$ koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}$.

V lokalnih koordinatah $x = (x_1,\ldots,x_n)$ na X je vektorsko polje v oblike

$$v(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pot $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))$ je integralna krivulja natanko tedaj, ko velja

$$\dot{\gamma}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j(t)\,\frac{\partial}{\partial x_j} \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(\gamma(t))\,\frac{\partial}{\partial x_j}$$

To je ekvivalentno sistemu navadnih diferencialnih enačb:

$$\dot{\gamma}_j(t) \;=\; v_j(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)), \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{2.6}$$

Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe nam pove naslednje (glej npr. Hartman [25]). Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $v : D \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava, ki je Lipschitzova na vsaki kompaktni pomnožici v D. Potem za vsako točko $x^0 = (x^0_1,\ldots,x^0_n) \in D$ obstajata okolica $x^0 \in U \subset D$ in število $t_0 > 0$, tako da ima sistem navadnih diferencialnih enačb (2.6) skupaj z začetnim pogojem

$$\gamma(0,x) \;=\; x \in U$$

natanko eno rešitev $\gamma(t,x)$ za vsak $t \in (-t_0,t_0)$ in $x \in U$. Rešitev γ je zvezna v $(t,x) \in (-t_0,t_0)\times U$, odvedljiva po spremenljivki t in njen t-odvod $\dot{\gamma}(t,x)$ je zvezen v (t,x). Če je polje v gladko razreda $\mathscr{C}^r(D)$, potem sta γ in $\dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t}\gamma$ razreda $\mathscr{C}^r$.

Od sedaj dalje bomo lokalno rešitev zgornjega sistema navadnih diferencialnih enačb pisali v obliki $\phi_t(x)$ in jo imenovali *tok polja v*. Torej je za vsak $x \in U$ preslikava $t \mapsto \phi_t(x)$ tokovnica polja v, ki gre pri času $t = 0$ skozi točko x:

$$\dot{\phi}_t(x) \;=\; v(\phi_t(x)), \qquad \phi_0(x) = x.$$

Če je $v(x) = 0$ za nek $x \in X$, je tokovnica skozi to točko konstantna preslikava $\phi_t(x) \equiv x$. Taki točki pravimo *stacionarna* ali *singularna* točka vektorskega polja.

Opomba 2.16 Pri prehodu na mnogoterosti moramo biti pozorni na naslednje. Če je X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$, je njen tangentni sveženj razreda $\mathscr{C}^{r-1}$; izgubimo torej en red gladkosti. Da bi lahko govorili o $\mathscr{C}^1$ ali Lipschitzovih vektorskih poljih na mnogoterosti X, moramo torej predpostaviti, da je X razreda vsaj $\mathscr{C}^2$, saj v nasprotnem primeru prehodne preslikave na tangentnem svežnju TX (ki so le zvezne) ne ohranjajo Lipschitzove lastnosti. V nadaljevanju bomo vselej implicitno privzeli, da je X razreda $\mathscr{C}^2$, kadar bomo govorili o Lipschitzovih vektorskih poljih.

Naslednja lema v posebnem pove, da je izračun toka neodvisen od izbire lokalnih koordinat, torej je tok dobro definiran za lokalno Lipschitzova vektorska polja na mnogoterostih razreda $\mathscr{C}^2$.

Lema 2.17 *Naj bo $f : X \to Y$ $\mathscr{C}^1$-preslikava, v vektorsko polje na X s tokom ϕ_t, in w vektorsko polje na Y s tokom ψ_t. Če velja $df_x \cdot v_x = w_{f(x)}$ za vsak $x \in X$, potem je f-slika poljubne tokovnice polja v tokovnica polja w. Če sta vektorski polji v in w Lipschitzovi, sledi*

$$f(\phi_t(x)) \;=\; \psi_t(f(x))$$

za vsak (t,x), kjer sta leva in desna stran definirani.

Dokaz Preslikava $t \mapsto \psi_t(f(x))$ je očitno tokovnica polja w, ki je pri $t = 0$ v točki $f(x)$. Trdimo, da je tudi $t \mapsto f(\phi_t(x))$ tokovnica polja w. Odvajamo:

$$\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x)) \;=\; df_{\phi_t(x)}\dot{\phi}_t(x) \;=\; df_{\phi_t(x)}v_{\phi_t(x)} \;=\; w_{f(\phi_t(x))},$$

kjer zadnji enačaj velja po predpostavki v lemi. To ravno pomeni, da je $t \mapsto f(\phi_t(x))$ tokovnica polja w. Pri $t = 0$ je $f(\phi_0(x)) = f(x)$.

Če sta vektorski polji v in w lokalno Lipschitzovi, potem iz enoličnosti integralnih krivulj z dano začetno točko sledi $f(\phi_t(x)) = \psi_t(f(x))$. $\square$

Posledica 2.18 *Če je $M \subset X$ podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^2$ in je v Lipschitzovo vektorsko polje na X, ki je tangentno na M v vsaki točki $x \in M$ (to je, $v_x \in T_xM \subset T_xX$ za vsak $x \in X$), potem za vsak $x \in M$ velja $\phi_t(x) \in M$ na definicijski domeni toka.*

Dokaz Uporabimo lemo 2.17 za vložitev $f : M \hookrightarrow X$. Ker je polje v tangentno na M vzdolž M, določa vektorsko polje w na M z enačbo $w_x = v_x$ za $x \in M$. Torej je $f_*w = v$. Ker je M razreda $\mathscr{C}^2$, je njen tangentni sveženj razreda $\mathscr{C}^1$ in zato je dobljeno vektorsko polje w na M še vedno Lipshitzovo.

Po lemi 2.17 preslika f tokovnice polja w v tokovnice polja v. Za vsako točko $x \in M$ je tokovnica polja w hkrati tudi tokovnica polja v, torej je enaka $t \mapsto \phi_t(x)$. Sledi $\phi_t(x) \in M$. $\square$

Eksistenčni izrek za sisteme navadnih diferencialnih enačb (glej npr. Hartman [25]) ter lemma 2.17 implicirata naslednji eksistenčni izrek za tokove vektorskih polj na mnogoterostih.

Izrek 2.19 (Lokalni eksistenčni izrek za tok vektorskega polja) *Naj bo v Lipschitzovo vektorsko polje na mnogoterosti X razreda $\mathscr{C}^2$. Za vsako točko $x_0 \in X$ obstajata okolica $U_{x_0} \subset X$ in število $\varepsilon = \varepsilon_{x_0} > 0$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsako začetno točko $x \in U_{x_0}$ in za vsak $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Tok $\phi_t(x)$ in njegov odvod $\dot{\phi}_t(x)$ po t sta zvezni funkciji (t,x). Če je vektorsko polje v gladko razreda $\mathscr{C}^r$ (in je X razreda $\mathscr{C}^{r+1}$), sta ti dve preslikavi razreda $\mathscr{C}^r$.*

Iz eksistenčnega izreka sledi, da za vsako kompaktno množico $K \subset X$ obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $x \in K$ in $|t| \leq \varepsilon$.

Trditev 2.20 *Naj bo v Lipschitzovo vektorsko polje na mnogoterosti X. Za vsako točko $x \in X$ in za vse dovolj majhne $s,t \in \mathbb{R}$ velja*

$$\phi_{t+s}(x) \;=\; \phi_t(\phi_s(x)) \;=\; \phi_s(\phi_t(x)), \qquad \phi_0 = \mathrm{Id}. \tag{2.7}$$

Dokaz Fiksirajmo točko $x \in X$. Naj bosta $U \subset X$ okolica točke x in število $\varepsilon_0 > 0$ izbrani tako, da tok $\phi_t(y)$ obstaja vsako začetno točko $y \in U$ in vsak $t \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Izberimo število $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, tako da je $\phi_s(x) \in U$ za vsak $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Za fiksen x in $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ter variabilen $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ si oglejmo naslednji dobro definirani poti

$$\gamma(t) = \phi_{t+s}(x), \qquad \sigma(t) = \phi_t(\phi_s(x)).$$

Očitno je $\gamma(0) = \phi_s(x) = \sigma(0)$. Pišimo $u = t + s$. Z odvajanjem dobimo

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\phi_{t+s}(x) = \frac{d}{du}\phi_u(x)\,\frac{du}{dt} = v(\phi_u(x)) = v(\phi_{t+s}(x)) = v(\gamma(t)),$$

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\phi}_t(\phi_s(x)) = v(\phi_t(\phi_s(x)) = v(\sigma(t)).$$

Torej sta γ in σ tokovnici polja v, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko $\psi_s(x)$. Iz enoličnosti tokovnic Lipschitzovega vektorskega polja sledi $\gamma = \sigma$. □

Iz enakosti

$$\mathrm{Id} = \phi_0 = \phi_{-t} \circ \phi_t$$

sledi, da je za vsak fiksen t preslikava ϕ_t difeomorfizem svojega definicijskega območja $\Omega_t \subset X$ na območje $\phi_t(\Omega_t) \subset X$, z inverzom $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$. Taka družina $\{\phi_t\}_t$ se imenuje *lokalna eno-parametrična grupa difeomorfizmov.* (Beseda 'lokalna' se nanaša na dejstvo, da ϕ_t ni nujno definiran na vsem X.)

Iz enoličnosti tokovnic in trditve 2.20 sledi, da za vsak $x \in X$ obstaja največji odprt interval

$$0 \in I_x \;=\; (\alpha(x), \omega(x)) \subset \mathbb{R},$$

kjer je $-\infty \le \alpha(x) < 0 < \omega(x) \le +\infty$, tako da je tok $\phi_t(x)$ definiran za vsak $t \in I_x$.

Definicija 2.21 **Fundamentalna domena** *toka ϕ_t je množica*

$$\Omega \;=\; \big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times X : \alpha(x) < t < \omega(x)\big\}. \tag{2.8}$$

Očitno je $\{0\} \times X \subset \Omega$. Iz lokalnega eksistenčnega izreka sledi naslednje.

Lema 2.22 *Funkcija $\omega : X \to (0, +\infty]$ je navzdol polzvezna in $\alpha : X \to [-\infty, 0)$ je navzgor polzvezna. Torej je fundamentalna domena odprta množica v $\mathbb{R} \times X$.*

Dokaz Fiksirajmo točko $p \in X$ in izberimo $b \in \mathbb{R}$ tako, da je $0 < b < \omega(p)$. Dokazati želimo obstoj okolice $V_0 \subset X$ točke p, tako da je $\omega(x) > b$ za vsak $x \in V_0$. To pomeni, da je funkcija ω navzdol polzvezna in je nadnivojnica $\{\omega > b\}$ odprta množica.

Za dokaz izberimo kompaktno okolico $K \subset X$ tirnice $\{\phi_t(p) : 0 \le t \le b\}$ in število $\varepsilon > 0$, tako da tok $\phi_t(x)$ obstaja za vsako točko $x \in K$ in $0 \le t \le \varepsilon$. Če $\varepsilon > 0$ po potrebi zmanjšamo, lahko vzamemo, da je $b = k\varepsilon$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Definirajmo točke

$$p_j = \phi_{j\varepsilon}(p), \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Torej je $p_0 = p$ in $p_k = \phi_b(p)$. Po grupni lastnosti toka (2.7) velja

$$\phi_t(p_{k-1}) = \phi_t(\phi_{(k-1)\varepsilon}(p)) = \phi_{t+(k-1)\varepsilon}(p), \quad t \in [0, \varepsilon].$$

Izberimo okolico $V_k \subset K$ točke p_k. Ker je tok $\phi_t(x)$ zvezen v obeh spremenljivkah, obstaja okolica $V_{k-1} \subset K$ točke p_{k-1}, tako da je $\phi_t(V_{k-1}) \subset K$ za vsak $0 \le t \le \varepsilon$ in

$\phi_\varepsilon(V_{k-1}) \subset V_k$. Z enakim argumentom najdemo okolico V_{k-2} točke p_{k-2}, tako da je $\phi_t(V_{k-2}) \subset K$ za vsak $0 \le t \le \varepsilon$ in $\phi_\varepsilon(V_{k-2}) \subset V_{k-1}$. Po k korakih dobimo okolico V_0 točke $p = p_0$, tako da je

$$\phi_\varepsilon(V_j) \subset V_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Iz grupne lastnosti toka (2.7) sledi $(\phi_\varepsilon)^k = \phi_b$ na V_0 in zato $\phi_b(V_0) \subset V_k$. To pomeni, da tok $\phi_t(x)$ obstaja za vsako točko $x \in V_0$ in vsak $0 \le t \le b$.

Analogno dokažemo, da je funkcija $\alpha : X \to [-\infty, 0)$ navzgor polzvezna.

Očitno je polzveznost obeh funkcij ekvivalentna temu, da je fundamentalna domena Ω (2.8) odprta v $\mathbb{R} \times X$. $\square$

Definicija 2.23 (Kompletno vektorsko polje) *Vektorsko polje v na mnogoterosti X je* kompletno *ali* povsem integrabilno*, če njegov tok $\phi_t(x)$ obstaja za vsako začetno točko $x \in X$ in vsak $t \in \mathbb{R}$.*

Iz definicij sledi, da je polje v kompletno natanko tedaj, ko je njegova fundamentalna domena $\Omega = \mathbb{R} \times X$. V tem primeru je $\phi_t : X \to X$ difeomorfizem za vsak t. Družina

$$\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Diff}(X) \tag{2.9}$$

se imenuje *enoparametrična grupa difeomorfizmov* mnogoterosti X. Velja tudi obratno: vsaka enoparametrična grupa (2.9) je tok vektorskega polja

$$v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t(x)|_{t=0}, \qquad x \in X.$$

To vektorsko polje se imenuje *infinitezimalni generator* grupe.

Primer 2.24 Linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ je oblike

$$v(x) \;=\; Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je A neka realna $n \times n$ matrika. Enačba toka je sistem navadnih linearnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\dot{x} \;=\; Ax, \quad x(0) \;=\; x^0.$$

Tok tega polja je podan z matrično eksponentno vrsto

$$\phi_t(x) \;=\; e^{tA}x \;=\; \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k\right)x. \tag{2.10}$$

Odtod vidimo, da je vsako linearno vektorsko polje kompletno.

Če je $A = P\Lambda P^{-1}$, kjer je Λ Jordanova normalna forma matrike A, je

$$\phi_t(x) \;=\; e^{tA}x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P\Lambda^k P^{-1}\right) x \;=\; Pe^{t\Lambda}P^{-1}x.$$

Če je $\Lambda = (\lambda_j)$ diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi λ_j, je $e^{t\Lambda} = (e^{t\lambda_j})$ prav tako diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi $e^{t\lambda_j}$.

Opomba: Pogosto se za tok ϕ_t vektorskega polja v uporablja oznaka

$$\phi_t(x) \;=\; e^{tv}x.$$

Motivacija izvira iz primera, ko je $v(x) = Ax$ linearno vektorsko polje; glej (2.10).

Naslednja trditev nam pove, da vsaka nekompletna trajektorija vektorskega polja prej ali slej zapusti poljubno kompaktno podmnožico mnogoterosti.

Trditev 2.25 *Če je za neko točko $x \in X$ velja $\omega(x) < +\infty$, potem za vsak kompakt $K \subset X$ obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da velja*

$$\phi_t(x) \notin K \quad \text{za vsak } t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x)).$$

Analogna lastnost velja v primeru $\alpha(x) > -\infty$ za vse t blizu $\alpha(x)$.

To pomeni, da tok $\phi_t(x)$ zapusti vsak kompakt v X, ko t narašča proti $\omega(x) < +\infty$.

Dokaz Za vsak kompakt K obstaja $\varepsilon > 0$, tako da tok $\phi_t(y)$ obstaja za vsako začetno točko $y \in K$ in za vsak $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Recimo, da za neko točko $x \in X$ in $t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x))$ velja $\phi_t(x) \in K$. Iz grupne lastnosti toka (2.7) sledi $\phi_\varepsilon(\phi_t(x)) = \phi_{\varepsilon+t}(x)$. Toda $\varepsilon + t > \omega(x)$, kar je v protislovju z definicijo števila $\omega(x)$. □

Posledica 2.26
- *Vsako vektorsko polje s kompaktnim nosilcem na mnogoterosti brez roba je kompletno.*
- *Vsako vektorsko polje na kompaktni mnogoterosti brez roba je kompletno.*
- *Če je v kompletno vektorsko polje na mnogoterosti X in se vektorsko polje w ujema s poljem v izven neke kompaktne podmnožice notranjosti $\mathring{X} = X \setminus \partial X$, potem je tudi polje w kompletno.*
- *Če za neko točko $x_0 \in X$ tokovnica vektorskega polja v leži v kompaktni podmnožici notranjosti $\mathring{X}$, potem je ta tokovnica kompletna, torej je $\alpha(x_0) = -\infty$ in $\omega(x_0) = +\infty$.*

Primer 2.27 Na $\mathbb{R}$ opazujmo vektorsko polje $v(x) = x^2$. Enačba toka je

$$\dot{x} \;=\; x^2, \qquad x(0) \;=\; x_0.$$

Pri začetnemu pogoju $x_0 = 0$ dobimo konstanten tok $\phi_t(0) = 0$. Pri $x_0 \neq 0$ dobimo

$$\phi_t(x_0) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \;=\; \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Pri času $t_0 = \frac{1}{x_0}$ ima funkcija $\phi_t(x_0)$ pol. Če je $x(0) > 0$, potem tok $\phi_t(x)$ obstaja za vse $-\infty < t < t_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 < 0$ tok $\phi_t(x_0)$ obstaja za vse $t_0 < t < +\infty$. Vektorsko polje $v(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$ torej ni kompletno.

Primer 2.28 Naj bo $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ s koordinatama (x,y). Vektorsko polje $v = \frac{\partial}{\partial x}$ ima tok $\phi_t(x,y) = (x+t,y)$. Fundamentalna domena je očitno enaka

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(t,x,y) : y \neq 0\} \cup \{(t,x,0) : x > 0, -x < t < +\infty\} \\ &\quad \cup \{(t,x,0) : x < 0,\ -\infty < t < |x|\}. \end{aligned}$$

Ta primer pokaže, da funkciji α in ω v definiciji fundamentalne domene (2.8) nista nujno zvezni.

Primer 2.29 Oglejmo si vektorsko polje $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$. Velja

$$v(x^2+y^2) \;=\; \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2+y^2) \;=\; -2xy + 2xy \;=\; 0.$$

Torej je polje v tangentno na vsako nivojnico funkcije x^2+y^2 (krožnice).

Izrek 2.30 (Izrek Lyapunova) *Naj bo $\rho : X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija izčrpanja, to je, za vsak $c \in \mathbb{R}$ je podnivojnica $\{x \in X : \rho(x) \leq c\}$ kompaktna. Naj bo v vektorsko polje na X, ki zadošča pogoju*

$$d\rho_x \cdot v(x) \leq 0$$

za vse $x \in X$, ki zadoščajo $\rho(x) \geq c_0$ za neko število $c_0 \in \mathbb{R}$. Potem je vektorsko polje v kompletno v pozitivnem času, to je, $\omega(x) = +\infty$ za vsak $x \in X$.

Dokaz Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\frac{d}{dt}\rho(\phi_t(x)) = d\rho(\phi_t(x))\frac{d\phi_t(x)}{dt} = d\rho(\phi_t(x))v(\phi_t(x)) \leq 0, \ \text{ če je } \rho(\phi_t(x)) \geq c_0.$$

Torej funkcija $t \mapsto g(t) = \rho(\phi_t(x))$ ne narašča na nobenem intervalu, na katerem je njena vrednost $\geq c_0$. Izberemo poljubno točko $x \in X$ in število $c \geq c_0$, tako da je $\rho(x) \leq c$. Trdimo, da iz zgornje lastnosti sledi

$$g(t) := \rho(\phi_t(x)) \leq c \quad \text{za vsak } \ t \in [0, \omega(x)).$$

Denimo, da to ni res. Tedaj obstaja število $t_1 \in (0, \omega(x))$, da je $g(t_1) > c$. Ker je $g(0) = \rho(x) \leq c$, obstaja največje število $t_0 \in (0,t_1)$, tako da je $g(t_0) = c$, torej je $g(t) > c$ za vsak $t \in (t_0,t_1]$. Po Lagrangejevem izreku obstaja $t_2 \in (t_0,t_1)$, da je

$$g'(t_2)(t_1 - t_0) = g(t_1) - g(t_0) > 0$$

in zato $g'(t_2) > 0$. Ker je tudi $g(t_2) > c$ po izboru števila t_1, smo prišli do protislovja. Odtod sledi, da tok $\phi_t(x)$ za $0 \leq t < \omega(x)$ ostaja v kompaktni množici $\{\rho \leq c\}$. Po prejšnji trditvi zaključimo, da je $\omega(x) = +\infty$. $\square$

Primer 2.31 Naj bo $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka gladka funkcija izčrpanja in

$$v \; = \; -\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

Hamiltonovo vektorsko polje funkcije ρ. Iz $v(\rho) \equiv 0$ sledi, da je v tangentno na nivojnice funkcije ρ. Ker so le-te kompaktne, sledi, da je polje v kompletno.

Tokovi vektorskih polj in so glavno sredstvo za premikanje po mnogoterosti. Kot primer uporabe bomo skicirali dokaz naslednjega izreka.

Izrek 2.32 *Naj bo X povezana gladka mnogoterost. Za vsak par točk $p, q \in X$ obstaja difeomorfizem $f \in \mathrm{Diff}(X)$, ki zadošča $f(p) = q$. Grupa diffeomorfizmov* $\mathrm{Diff}(X)$ *torej deluje tranzitivno na X.*

Dokaz Naj bo $g : [0,1] \hookrightarrow X$ gladka vložitev intervala $[0,1] \subset \mathbb{R}$ v X, tako da je $g(0) = p$ and $g(1) = q$. Označimo $C = g([0,1])$ in izberimo relativno kompaktno okolico $U \subset X$ loka C. Naj bo v vektorsko polje na X vzdolž C, definirano z enačbo

$$v(g(t)) = \dot{g}(t) = dg_t \frac{\partial}{\partial t}, \qquad t \in [0,1].$$

S pomočjo lokalnih razširitev in gladke particije enote lahko v razširimo s C do vektorskega polja na X z nosilcev v U. Po posledici 2.26 je polje v kompletno. Iz definicije vektorskega polja v in leme 2.17 sledi, da njegov tok ϕ_t pri času $t = 1$ preslika točko p v točko q: $\phi_1(p) = q$. Torej je $f = \phi_1$ iskani difeomorfizem. □

2.4 Lokalna oblika vektorskega polja

Vektorsko polje želimo lokalno v okolici neke točke $p \in X$ čim bolj poenostaviti s primerno izbiro lokalnih koordinat. To je preprosto v okolici nesingularnih točk.

Trditev 2.33 *Če je vektorsko polje v na X v neki točki $p \in X$ različno od* 0, $v(p) \neq 0$, *potem obstaja lokalna karta (U, ψ) v okolici točke p, tako da je $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, to je koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v smeri spremenljivke x_1.*

Dokaz Ker je izrek lokalen, lahko brez izgube splošnosti vzamemo, da je v vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v okolici točke $p = 0 \in \mathbb{R}^n$:

$$v(x) \; = \; \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \; \cong \; \big(v_1(x), \ldots, v_n(x)\big), \qquad v(0) \neq 0.$$

Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_0 \cong (1, 0, \ldots, 0)$.
Naj bo ϕ_t tok polja v. Definiramo preslikavo g v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$g(x_1,\dots,x_n) \;=\; \phi_{x_1}(0,x_2,\dots,x_n).$$

Prvo koordinato x_1 smo torej uporabili kot časovno spremenljivko toka. Iz definicije toka sledi, da je parcialni odvod g po spremenljivki x_1 enak

$$g_*\frac{\partial}{\partial x_1} \cong \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\phi_{x_1}(0,x_2,\dots,x_n) = v\big(\phi_{x_1}(0,x_2,\dots,x_n)\big) = v(g(x)).$$

Torej g potisne koordinatno vektorsko polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$ v polje v. V točki $x=0$ je

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(0) = v(0) = (1,0,\dots,0).$$

Na hiperravnini $x_1 = 0$ je $g(0,x_2,\dots,x_n) = (0,x_2,\dots,x_n)$ identiteta, zato je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = (0,\dots,1,\dots,0), \qquad j=2,\dots,n.$$

Torej je $dg(0) = \mathrm{Id}$. Po izreku o inverzni preslikavi je g difeomorfizem v neki okolici 0. Njen inverz $\psi = g^{-1}$ tedaj zadošča $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. $\square$

Točke p, v katerih je $v(p) = 0$, se imenujejo *kritične točke* (ali *singularne točke)* vektorskega polja v. V lokalnih koordinatah lahko vzamemo $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj je

$$v(x) = Ax + o(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{|x|} = 0. \tag{2.11}$$

kjer $n\times n$ matrika A predstavlja diferencial $(dv)_0$ preslikave v v točki $x=0$. Napake $o(x)$ v splošnem ne moremo odpraviti z zamenjavo koordinat v okolici $0\in\mathbb{R}^n$.

Primer 2.34 Naj bo $v(x) = Ax$ linearno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$. Naj bo $f(x) = Px$ linearni difeomorfizem $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, podan z neizrojeno $n\times n$ matriko P. Označimo nove koordinate z $y = f(x) = Px$. Tedaj je

$$(f_*v)(y) = (f_*v)(Px) = df_x\cdot v(x) = PAx = PAP^{-1}Px = PAP^{-1}y.$$

Torej je f_*v linearno vektorsko polje, podano s konjugirano matriko $B = PAP^{-1}$. Odtod sledi, da so lastne vrednosti matrike linearnega vektorskega polja invariantne glede na potisk (ali povlek) polja z linearnim izomorfizmom $\mathbb{R}^n$.

Splošneje, naj bo v vektorsko polje (2.11) in naj bo f difeomorfizem v okolici $0\in\mathbb{R}^n$, podan z $f(x) = Px + o(x)$. Analogen račun kot v zgornjem primeru pokaže

$$(f_*v)(x) = PAP^{-1}x + o(x).$$

Torej velja isti sklep kot zgoraj (glede ohranjanja lastnih vrednosti) za linearizacijo vektorskega polja v poljubni točki. $\square$

Glede linearizacije bomo brez dokaza navedli naslednji izrek (glej npr. Perko [38]).

Izrek 2.35 (Hartman–Grobman) *Naj bo $v(x)$ vektorsko polje oblike* (2.11) *na neki okolici* $0 \in \mathbb{R}^n$ *in naj bo $\phi_t(x)$ njegov tok. Če matrika A nima nobene lastne vrednosti λ z ničelnim realnim delom $\Re\lambda = 0$, potem obstaja homeomorfizem f v okolici* $0 \in \mathbb{R}^n$ *z $f(0) = 0$, tako da velja*

$$f(\phi_t(x)) = e^{tA} f(x)$$

za vse $x \in \mathbb{R}^n$ v neki okolici izhodišča in za vse dovolj majhne $t \in \mathbb{R}$.

Homeomorfizem f torej preslika tok polja v v tok pripadajočega linearnega polja $v_A(x) = Ax$. Pravimo, da je f *topološka linearizacija* polja v.

V splošnem ne obstaja difeomorfizem f s to lastnostjo niti v primeru, ko je vektorsko polje realno analitično. Razlog so možne resonance med lastnimi vrednostmi matrike A. Take resonance nastopijo le za zelo posebne matrike; za dovolj splošno matriko A lahko torej vektorsko polje v konjugiramo v pripadajoče linearno polje z difeomorfizmom. Več o tem lahko bralec najde v literaturi, navedeni v [38].

V primeru, ko ima matrika A kakšno lastno vrednost z ničelnim realnim delom, v splošnem polje ni niti topološko konjugirano svoji linearizaciji.

Primer 2.36 Naj bodo (x,y) koordinate na $\mathbb{R}^2$ in

$$v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pripadajoča matrika je $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Njeni lastni vrednosti sta $\pm\mathrm{i}$, kjer je $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

V kompleksnem zapisu $z = x + \mathrm{i}y$ ustreza J množenju z i, torej je $v(z) = \mathrm{i}z$. Tok tega polja je enak $\phi_t(z) = e^{\mathrm{i}t}z$. Tokovnice so krožnice s središčem v $(0,0)$.

S poljubno majhno nelinearno perturbacijo polja v (konkretno, z dodatkom majhnega radialnega člena) pa lahko dosežemo, da se vse tokovnice z začetno točko v množici $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ spiralno približujejo izhodišču ali pa se od njega oddaljujejo. Prav tako lahko dosežemo obstoj limitnih ciklov v poljubni okolici $(0,0)$; to so sklenjene orbite, katerim se sosednje orbite spiralno približujejo ali se od njih oddaljujejo. Odvisno od primera govorimo o (enostransko ali dvostransko) privlačnih, odbojnih ali nevtralnih negibnih točkah in limitnih ciklih. Očitno je, da fazni portret take nelinearne perturbacije polja v ni topološko konjugiran toku polja v, saj ima slednje sklenjene orbite. □

2.5 Komutator vektorskih polj

Naj bosta v in w vektorski polji razreda $\mathscr{C}^2$ na mnogoterosti X.

Definicija 2.37 Komutator $[v,w]$ *je diferencialni operator, ki ima na poljubni testni funkciji* $g \in \mathscr{C}^2(X)$ *vrednost*

$$[v,w](g) \;=\; v(w(g)) - w(v(g)).$$

Lahko je preveriti, da je preslikava $g \mapsto [v,w](g)$ derivacija v vsaki točki, to je,

- linearna v g (aditivna ter $\mathbb{R}$-homogena), in
- zadošča Leibnizovemu pravilu.

Torej je $[v,w]$ vektorsko polje na X.
Izračunajmo komutator v lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Naj bo

$$v \;=\; \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w \;=\; \sum_{j=1}^{n} w_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tedaj je

$$v(w(g)) \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial g}{\partial x_k}\right) \;=\; \sum_{j,k=1}^{n}\left(v_j \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + v_j w_k \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}\right),$$

$$w(v(g)) \;=\; \sum_{j,k=1}^{n}\left(w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + w_j v_k \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}\right).$$

V razliki se parcialni odvodi drugega reda $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$ krajšajo in dobimo:

$$[v,w](g) \;=\; \sum_{j,k=1}^{n}\left(v_j \frac{\partial w_k}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial g}{\partial x_k} \;=\; \sum_{k=1}^{n}(v(w_k) - w(v_k))\frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, sledi

$$\left[\sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{n} w_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{k=1}^{n}\big(v(w_k) - w(v_k)\big)\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.12}$$

Primer 2.38 Za lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ očitno velja

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \;=\; 0, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Splošneje, če sta v, w konstantni vektorski polji na domeni v $\mathbb{R}^n$ (to je, polji s konstantni koeficienti), potem je $[v,w] = 0$.

Primer 2.39

$$v = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad w = \frac{\partial}{\partial x_1} + h(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad [v,w] = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Primer 2.40 Naj bosta v_A in v_B linearni vektorski polji na $\mathbb{R}^n$, ki pripadata matrikama $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dimenzije $n \times n$. Torej je

$$v_A(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad v_B(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Iz formule (2.12) dobimo

$$[v_A, v_B](x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(v_A\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l\right) - v_B\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{2.13}$$

Velja:

$$\begin{aligned}
v_A\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l\right) &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}x_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ki}a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n}(BA)_{kj}x_j,\\
v_B\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right) &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ki}b_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n}(AB)_{kj}x_j.
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo (2.13) in dobimo

$$[v_A, v_B](x) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(BA - AB)_{kj}x_j \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Torej je komutator $[v_A, v_B]$ linearno vektorsko polje, ki pripada komutatorju $BA - AB$ matrik A in B. $\square$

Preverjanje naslednje trditve je prepuščena bralcu.

Trditev 2.41 (Algebraične astnosti komutatorja) *Če sta v in w vektorski polji razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 2)$, je njun komutator $[v,w]$ vektorsko polje razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ in velja:*

1. *Operacija je $\mathbb{R}$-linearna v obeh faktorjih:*

$$\begin{aligned}
[v_1 + v_2, w] &= [v_1, w] + [v_2, w]\\
[v, w_1 + w_2] &= [v, w_1] + [v, w_2]\\
[cv, w] &= c\,[v,w], \quad c \in \mathbb{R}\\
[v, cw] &= c\,[v,w], \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. *Za vsako gladko funkcijo f velja $[fv, w] = f\,[v,w] - w(f)\,v$.*
3. $[v,w] + [w,v] = 0$ *(v posebnem je $[v,v] = 0$).*

4. **Jacobijeva identiteta:**

$$\big[[u,v]\,,w\big] + \big[[w,u]\,,v\big] + \big[[v,w]\,,u\big] \;=\; 0.$$

Dokaz zgornje trditve prepustimo bralcu.

Označimo z $\aleph(X)$ množico vseh gladkih vektorskih polj na gladki mnogoterosti X. Očitno je $\aleph(X)$ realen vektorski prostor. Opremljen z operacijo $[\cdot,\cdot]$ je prostor $\aleph(X)$ *Liejeva algebra*.

Trditev 2.42 *Če sta v,w vektorski polji $\mathscr{C}^2$ na mnogoterosti X in je preslikava $f : X \to Y$ difeomorfizem razreda $\mathscr{C}^2$, velja*

$$f_*[v,w] \;=\; [f_*v, f_*w].$$

Torej je komutator neodvisen od izbire koordinat.

Dokaz Izberimo gladko funkcijo g na Y. Po definiciji potiska f_*v velja

$$(f_*v)_{f(x)}(g) \;=\; v_x(g\circ f), \quad x\in X.$$

(Leva stran je vrednost vektorskega polja f_*v na funkciji g v točki $f(x)$, desna stran pa vrednost vektorskega polja v na funkciji $g\circ f$ v točki x.) Zgornjo identiteto lahko zapišemo v obliki

$$(f_*v)(g)\circ f \;=\; v(g\circ f).$$

Z njeno večkratno uporabo dobimo:

$$\begin{aligned}
f_*[v,w](g)\circ f \;&=\; [v,w](g\circ f)\\
&=\; v(w(g\circ f) - w(v(g\circ f))\\
&=\; v((f_*w)(g)\circ f) - w((f_*v)(g)\circ f)\\
&=\; (f_*v)(f_*(w)(g))\circ f - (f_*w)(f_*v)(g))\circ f\\
&=\; [f_*v, f_*w](g)\circ f.
\end{aligned}$$

Ker to velja za vsako gladko testno funkcijo g na Y, sledi $f_*[v,w] = [f_*v, f_*w]$. □

Opomba 2.43 Trditev 2.48 lahko posplošimo: *Če sta v,w vektorski polji na X in sta $\tilde{v},\widetilde{w}$ vektorski polji na Y, tako da za neko gladko preslikavo $f : X\to Y$ velja $df_x v_x = \tilde{v}_{f(x)}$ in $df_x w_x = \widetilde{w}_{f(x)}$ za vsak $x\in X$, sledi*

$$df_x[v,w]_x \;=\; [\tilde{v},\widetilde{w}]_{f(x)}, \quad x\in X.$$

Če to uporabimo na primer, ko je $f : X\hookrightarrow Y$ vložitev mnogoterosti X v mnogoterost Y, odtod sledi naslednja trditev.

Trditev 2.44 *Naj bo X gladka podmnogoterost mnogoterosti Y. Če sta v in w gladki vektorski polji na Y, ki sta tangentni na X v vsaki točki $x\in X$, potem je njun komutator $[v,w]$ tudi tangenten na X v vsaki točki $x\in X$.*

2.6 Liejev odvod vektorskega polja

Naj bosta v in w vektorski polji na gladki mnogoterosti X. Označimo s $\phi_t(x)$ tok polja v. Vemo, da je družina $\{\phi_t\}$ lokalna grupa difeomorfizmov mnogoterosti X.

Definicija 2.45 Liejev odvod *vektorskega polja w v smeri vektorskega polja v je definiran s predpisom*

$$(L_v w)_x \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t^* w \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\phi_t^* w)_x - w_x\big) \in T_x X, \quad x \in X.$$

Iz definicije sledi, da je $L_v w$ vektorsko polje, ki je odvod vektorskega polja w vzdolž toka vektorskega polja v.
Definicijo lahko posplošimo na primer, ko je w tenzorsko polje poljubnega tipa (glej razdelek 6.10). Če je $w = f$ funkcija na M, je Liejev odvod enak

$$(L_v f)_x \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\phi_t(x)) \;=\; v(f)(x) \;=\; df_x v_x,$$

torej je ravno diferencial funkcije f v smeri vektorja v.

Primer 2.46 Naj bodo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$ in $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Njegov tok

$$\phi_t(x_1, \ldots, x_n) \;=\; (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$$

sestoji iz premikov v koordinatni smeri x_1. Diferencial $d\phi_t : T_x\mathbb{R}^n \to T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$ preslika tangentni vektor $w = \sum_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_x \in T_x\mathbb{R}^n$ v vektor $\sum_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_{\phi_t(x)} \in T_{\phi_t(x)}\mathbb{R}^n$.
Izberimo vektorsko polje

$$w \;=\; \sum_{j=1}^n w_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Tedaj je

$$(\phi_t^* w)_x \;=\; (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} w_{\phi_t(x)} \;=\; \sum_{j=1}^n w_j(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x$$

in zato je njegov Liejev odvod vzdolž polja $\partial/\partial x_1$ enak

$$\begin{aligned} L_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\sum_{j=1}^n w_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sum_{j=1}^n w_j(x_1 + t, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \;=\; \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, w \right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

V tem primeru je torej Liejev odvod enak komutatorju. □

Trditev 2.47 *Za vsak par vektorskih polj v, w velja identiteta*

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* w) \;=\; \phi_t^*(L_v w)$$

na fundamentalni domeni polja v, kjer je ϕ_t tok polja v.

Dokaz Pri $t = 0$ je to ravno definicija Liejevega odvoda.
Naj bo sedaj $t = s + u$, kjer $s \in \mathbb{R}$ fiksiramo in u spreminjamo. Velja

$$\phi_t^* w \;=\; (\phi_s \circ \phi_u)^* w = \phi_u^*(\phi_s^* w).$$

Odvajamo po t pri $t = s$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} \phi_t^* w \;&=\; \frac{d}{du}\bigg|_{u=0} \phi_u^*(\phi_s^* w) \\
&=\; L_v(\phi_s^* w) \\
&=\; \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(\phi_u^*(\phi_s^* w) - \phi_s^* w) \\
&=\; \lim_{u \to 0} \frac{1}{u}\,(\phi_s^*(\phi_u^* w - w)) \\
&=\; \phi_s^* \left(\lim_{u \to 0} \frac{1}{u}(\phi_u^* w - w) \right) \\
&=\; \phi_s^*(L_v w).
\end{aligned}$$

Upoštevali smo, da linearna preslikava ϕ_s^* komutira z limitnim prehodom. □

Trditev 2.48 *Če je $f : X \to Y$ difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, velja*

$$f_*(L_v w) \;=\; L_{f_* v}(f_* w)$$

Torej je izračun Liejevega odvoda neodvisen od izbire lokalnih koordinat na X.

Dokaz Naj bo ϕ_t tok polja v na X in $\tilde{\phi}_t$ tok polja $\tilde{v} := f_* v$ na Y. Po lemi 2.17 velja

$$f \circ \phi_t \;=\; \tilde{\phi}_t \circ f$$

na fundamentalni domena toka ϕ_t. Pišimo $\widetilde{w} = f_* w$, kar je ekvivalentno $w = f^* \widetilde{w}$.
Uporabimo zgornjo identiteto za povlek vektorskega polja $\widetilde{w}$. Po eni strani dobimo

$$(f \circ \phi_t)^* \widetilde{w} \;=\; \phi_t^* f^* \widetilde{w} = \phi_t^* w,$$

po drugi strani pa

$$(\tilde{\phi}_t \circ f)^* \widetilde{w} \;=\; f^* \tilde{\phi}_t^* \widetilde{w}.$$

Ker sta izraza enaka, sledi

$$\phi_t^* w \;=\; f^*(\tilde{\phi}_t^* \widetilde{w}).$$

Pri fiksnem $x \in X$ je $t \mapsto (\phi_t^* w)_x \in T_x X$ pot v tangentnem prostoru $T_x X$, ravno tako je $(\tilde{\phi}_t^* \widetilde{w})_{f(x)} \in T_{f(x)} Y$ pot v $T_{f(x)} Y$, povlek f^* pa je podan z linearno preslikavo $(df_x)^{-1} : T_{f(x)} Y \to T_x X$. Odtod vidimo, da povlek f^* komutira s časovnim odvodom po t. Če odvajamo zgornjo identiteto po t pri $t = 0$, torej dobimo:

$$L_v w \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t^* w \;=\; f^* \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{\phi}_t^* \widetilde{w} \right) \;=\; f^*(L_{\tilde{v}} \widetilde{w}).$$

To je očitno ekvivalentno $f_*(L_v w) = L_{\tilde{v}} \widetilde{w}$, kar smo želeli dokazati. $\square$

Sedaj bomo pokazali, da je Liejev odvod enak Liejevemu oklepaju.

Trditev 2.49 *Za vsak par vektorskih vektorskih polj v, w razreda $\mathscr{C}^2$ velja*

$$L_v w \;=\; [v, w].$$

Dokaz Iz trditev 2.42 in 2.48 sledi, da sta operaciji komutator in Liejev odvod neodvisni od izbire lokalnih koordinat.

Naj bo $p \in X$ taka točka, v kateri je $v_p \neq 0$. Potem obstajajo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ v okolici točke p, v katerih je polje v enako kooordinatnemu polju $\frac{\partial}{\partial x_1}$. V tem primeru smo željeno enakost že dokazali; glej (2.14).

Naj bo sedaj $p \in X$ taka točka, da velja $v_x = 0$ za vsako točko x v neki okolici točke p. V tem primeru je očitno $[v, w]_p = 0$. Poleg tega tok $\phi_t(x) \equiv x$ na okolici $x \in U$ miruje, zato sledi tudi $L_v w|_p = 0$.

To pomeni, da dokazovana enakost velja na odprti množici $\Omega = \{p \in X : v_p \neq 0\}$ in tudi na notranjosti njenega komplementa $X \setminus \Omega$; torej na komplementu roba $\partial\Omega$. Iz definicij sledi, da sta obe vektorski polji $[v, w]$ in $L_v w$ zvezni. Ker je rob množice Ω nikjer gost v X, sledi enakost v vseh točkah $p \in X$ po zveznosti. $\square$

Ker je komutator antikomutativen, $[v, w] = -[w, v]$, iz trditve 2.49 sledi

Posledica 2.50 *Za poljuben par $\mathscr{C}^2$ vektorskih polj velja $L_w v = -L_v w$.*

Naslednja trditev pove, da vektorski polji v, w komutirata natanko tedaj, ko njuna tokova komutirata na ustreznih fundamentalnih domenah.

Trditev 2.51 *Naj bo ϕ_t tok vektorskega polja v in ψ_s tok vektorskega polja w. Potem velja*

$$L_v w = 0 \iff \phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t.$$

Dokaz ($\Leftarrow$) Odvajamo identiteto $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ po s pri $s = 0$ (t in x sta fiksna):

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \phi_t(\psi_s(x)) \;=\; \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \psi_s(\phi_t(x)) \;=\; w_{\phi_t(x)}.$$

Levo stran v zgornji identiteti lahko po verižnem pravilu izrazimo tudi takole:

$$(d\phi_t)_x \cdot \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \psi_s(x) \;=\; (d\phi_t)_x \cdot w_x.$$

S primerjavo desnih strani dobimo

$$(d\phi_t)_x w_x \;=\; w_{\phi_t(x)} \quad\Longleftrightarrow\quad \phi_t^* w \overset{t}{\equiv} w, \tag{2.15}$$

kar pomeni, da je polje w ϕ_t-invariantno. Z odvajanjem po t pri $t=0$ sledi $L_v w = 0$.
($\Rightarrow$) Naj bo $L_v w = 0$. Iz trditve 2.47 sledi

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* w \;=\; \phi_t^*(L_v w) \;=\; \phi_t^*(0) = 0.$$

Torej je vektorsko polje $\phi_t^* w$ neodvisno od t in zato velja $\phi_t^* w = w$ za vsak t. Iz ekvivalence v (2.15) sledi, da difeomorfizem ϕ_t preslika tokovnico $\psi_s(x)$ polja w, ki gre pri $s=0$ skozi točko x, v tokovnico $\psi_s(\phi_t(x))$, ki gre pri $s=0$ skozi točko $\phi_t(x)$. To ravno pomeni $\phi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(\phi_t(x))$. $\square$

Primer 2.52 Oglejmo si ponovno situacijo iz primera (2.14):

$$v = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad w = \sum_{j=1}^n w_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad [v,w] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Torej je $[v,w]=0$ natanko tedaj, ko so koeficienti w_j neodvisni od spremenljivke x_1:

$$w \;=\; \sum_{j=1}^n w_j(x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Evidentno je, da so integralne krivulje translacijsko invariantne v x_1-smer; če je $\psi_s(x)$ neka integralna krivulja polja w, potem je integralna krivulja tudi

$$\phi_t(\psi_s(x)) \;=\; \psi_s(x) + (t,0,\ldots,0) \;=\; \psi_s(x_1+t, x_2,\ldots,x_n).$$

2.7 Involutivni podsvežnji in Frobeniusov izrek

Glavni rezultat tega razdelka je Frobeniusov izrek (glej izrek 2.57) o povsem integrabilnih podsvežnjih tangentnega svežnja. Na poti do tega izreka bomo potrebovali naslednji izrek, ki pove, da lahko m-terico paroma komutirajočih linearno neodvisnih vektorskih polj lokalno izravnamo v m-terico koordinatnih polj. To je posplošitev trditve 2.33, ki obravnava primer $m=1$.

Izrek 2.53 *Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno neodvisna vektorska polja na mnogoterosti X, ki paroma komutirajo:*

$$[v_j, v_k] = 0, \qquad j,k = 1,\ldots,m.$$

Potem za vsako točko $p \in X$ obstajata odprta okolico $U \subset X$ in lokalna karta $\psi : U \to \psi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \dim X)$, tako da je

$$\psi_* v_j \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Obratno, če taka karta ψ obstaja, sledi $\psi_*[v_j, v_k] = [\psi_* v_j, \psi_* v_k] = [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0$.

Dokaz V neki lokalni karti prevedemo na primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Naj bo

$$v_j \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1, \dots, m$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je

$$\det(a_{jk}(0))_{j,k=1}^m \neq 0.$$

Odtod sledi, da je $v_1(0), \dots, v_m(0), \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ baza tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$. Naj bo ϕ_t^j tok polja v_j. Označimo $d = n - m$. Definiramo preslikavo $g(x)$ v okolici izhodišča $x = 0$ s predpisom

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \;=\; \phi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m(\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Torej začnemo v točki $(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$ in gremo za čas x_j v smeri polja v_j za vsak $j = 1, \dots, m$. Izračunamo odvod po spremenljivki x_1:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_{x_1}^1 \circ \phi_{x_2}^2 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)) \;=\; v_1(g(x)).$$

Pri računanju odvoda po x_2 upoštevamo, da polji v_1 in v_2 komutirata:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \;=\; \phi_{x_2}^2 \circ \phi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{x_m}^m(\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Enako kot prej sledi $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = v_2(g(x))$. Analogen sklep velja za ostale spremenljivke, torej je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \;=\; v_j(g(x)), \quad j = 1, \dots, m.$$

To ravno pomeni $g_* \frac{\partial}{\partial x_j} = v_j$ za vsak $j = 1, \dots, m$.

Ker je $g(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)$, sledi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(0) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad k = m+1, \dots, n.$$

Torej je diferencial dg_0 neizrojen. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je g difeomorfizem v neki okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$. Njegov lokani inverz $\psi = g^{-1}$ zadošča $\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ za $j = 1, \dots, m$. $\square$

Naj bo X gladka mnogoterost dimenzije n. Za vsak $x \in X$ naj bo $E_x \subset T_x X$ vektorski podprostor $T_x X$ konstantne dimenzije $\dim E_x = m$ (neodvisne od x), tako da je E_x gladko odvisen od $x \in X$. Z drugo besedo, množica

$$E \ = \ \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset TX$$

je gladek vektorski podsveženj tangentnega svežnja svežnja TX, kar pomeni, da ima vsaka točka $p \in X$ okolico $U \subset X$ in gladko sveženjsko karto $\theta : TX|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim X$, tako da je

$$\theta(E|_U) \ = \ U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \qquad d = n - m.$$

(Glej razdelek 3.4.) Ekvivalentno, za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset X$ in gladka vektorska polja $v_1, \dots, v_m$ na U, tako da je

$$E_x \ = \ \mathrm{Lin}\{v_1(x), \dots, v_m(x)\}, \qquad x \in U.$$

Če je θ lokalna karta kot zgoraj, lahko vzamemo

$$v_j(x) \ = \ \theta^{-1}(x, \mathbf{e}_j), \qquad j = 1, \dots, m,$$

kjer je $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0))$ standardni j-ti koordinatni vektor.

Definicija 2.54 *Podmnogoterost M mnogoterosti X je* integralna podmnogoterost *podsvežnja $E \subset TX$, če za vsako točko $x \in M$ velja $T_x M \subset E_x$. Splošneje, preslikava $f : M \to X$ je integralna preslikava podsvežnja $E \subset TX$, če velja*

$$(df_x)(T_x M) \subset E_{f(x)} \subset T_{f(x)} X, \qquad x \in M.$$

Vsaka integralna podmnogoterost M svežnja E očitno zadošča $\dim M \leq m = \dim E_x$.

Primer 2.55 $m = 1$. Sveženj E je lokalno v okolici poljube točke definiran z nekim vektorskim poljem v brez ničel. Integralne podmnogoterosti svežnja E so tokovnice polja v, pri čemer izbira parametrizacije ni pomembna.

Splošneje, za vsak vektorski podsveženj $E \subset TX$ lahko lokalno najdemo vektorska polja v, ki so tangentna na E v smislu, da je $v(x) \in E_x$ za vsak $x \in X$. Tako vektorsko polje je prerez svežnja $E \to X$. Tok polja v, ki je tangentno na E, sestavljajo točkaste in 1-dimenzionalne integralne podmnogoterosti svežnja E. $\square$

Zanima nas, ali obstajajo tudi višje razsežne integralne podmnogoterosti v primeru $\mathrm{rang}\, E > 1$. Najvišja možna dimenzija integralnih podmnogoterosti je enaka rangu svežnja E in naravno vprašanje je, pri kakšnih pogojih na E le-te obstajajo. Primer 2.62 pokaže, da v splošnem to ne velja. V ta namen uvedemo naslednje pojme.

Definicija 2.56 *Naj bo E gladek vektorski podsveženj tangentnega svežnja TX.*

(a) *E je* popolnoma integrabilen*, če za vsako točko $p \in X$ obstaja lokalna integralna podmnogoterost $p \in M \subset X$ maksimalne dimenzije $m = \operatorname{rang} E$.*

(b) *E je* involutiven*, če je za poljubni dve vektorski polji v, w, ki sta tangentni na E, tudi njun komutator $[v, w]$ tangenten na E.*

Vsak podsveženj $E \subset TX$ ranga 1 je lokalno generiran z enim neničelnim vektorskim poljem, zato je involutiven in povsem integrabilen. Večina podsvežnjev $E \subset TX$ ranga m, kjer je $1 < m < n = \dim X$, nima teh lastnosti. Ključnega pomenan je naslednji izrek, ki pove, da sta ti dve lastnosti ekvivalentni.

Izrek 2.57 (Frobenius) *Gladek vektorski podsveženj E tangentnega svežnja TX je popolnoma integrabilen natanko tedaj, ko je involutiven.*

Pred dokazom si oglejmo naslednji pomemben primer integrabilnega svežnja.

Primer 2.58 Če je g gladka funkcija na X brez kritičnih točk, potem je podsveženj $E = \ker(df) \subset TX$ popolnoma integrabilen, saj so nivojne ploskve $\{g = c\}$ integralne mnogoterosti maksimalne dimenzije $\dim X - 1$. Iz trditve 2.44, ki jo uporabimo na nivojnicah $\{g = c\}$, sledi, da je E involutiven.

Analogen zaključek velja v primeru, ko imajo gladke funkcije $g_1, \ldots, g_d : X \to \mathbb{R}$ linearno neodvisne diferenciale $dg_1, \ldots, dg_d$ v vsaki točki $x \in X$, to je, preslikava $g = (g_1, \ldots, g_d) : X \to \mathbb{R}^d$ je submerzija. Tedaj je podsveženj

$$E = \bigcap_{i=1}^{d} \ker dg_i \subset TX$$

ranga $m = \dim X - d$ popolnoma integrabilen in involutiven. Nivojnice $\{g = c\}$, $c \in \mathbb{R}^d$, so gladke integralne podmnogoterosti maksimalne dimenzije m svežnja E in sestavljajo foliacijo (razslojitev) mnogoterosti X na unijo paroma disjunktnih integralnih mnogoterosti dimenzije m. V tem primeru pravimo, da je E tangentni sveženj foliacije. $\square$

Dokaz izreka 2.57. Najprej dokažimo, da je vsak popolnoma integrabilen sveženj $E \subset TX$ tudi involutiven.

Naj bosta u, v vektorski polji, ki sta tangentni na E. Izberimo točko $p \in X$. Po predpostavki obstaja integralna podmnogoterost $M \subset X$ dimenzije $\dim M = \operatorname{rang} E$, ki vsebuje točko p. Vektorski polji u, v sta zato tangentni na M vzdolž M. Po trditvi 2.44 je njun komutator $[u, v]$ tudi tangenten na M vzdolž. Ker je $T_x M = E_x$ za vsak $x \in M$, sledi $[u, v]_x \in T_x M = E_x$ za vsak $x \in M$, torej tudi za $x = p$. Ker je bila $p \in X$ poljubna točka, je sveženj E involutiven.

Obratno, naj bo podsveženj $E \subset TX$ involutiven. Izberimo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ v okolici p, v katerih je $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Naj bodo $v_1(x), \ldots, v_m(x)$

vektorska polja v okolici izhodišča $0 \in \mathbb{R}^n$, ki napenjajo E_x za vsak x. Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $v_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$ za $j = 1,\dots,m$. Naj bo

$$v_j(x) \;=\; \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad j = 1,\dots,m.$$

Za levi $m \times m$ minor matrike koeficientov velja $\det(a_{jl})_{j,l=1}^{m} \neq 0$ na neki okolici izhodišča (v točki $x = 0$ je to ravno identična matrika). Pomnožimo matriko koeficientov $(a_{jl})_{j=1,\dots,m}^{l=1,\dots,n}$ na levi z matriko $(a_{jl})_{j,l=1,\dots,m}^{-1}$. Dobimo novo matriko koeficientov oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$$

Torej obstajajo vektorska polja oblike

$$w_j(x) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=m+1}^{n} b_{jl}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}, \qquad j = 1,\dots,m, \tag{2.16}$$

ki generirajo E v neki okolici $0 \in \mathbb{R}^n$.

Ker je sveženj E involutiven, je vsak komutator $[w_j, w_k]$ linearna kombinacija polj $w_1,\dots,w_m$. Po drugi strani iz (2.16) sledi, da je komutator $[w_j, w_k]$ linearna kombinacija vektorskih polj $\frac{\partial}{\partial x_l}$, $l = m+1,\dots,n$. Iz primerjave sledi

$$[w_j, w_k] = 0, \qquad j,k = 1,\dots,m.$$

Po izreku 2.53 obstaja difeomorfizem $x \mapsto g(x)$ v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$, ki preslika vektorsko polje w_j v koordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_j}$ za $j = 1,\dots,m$; to je, $g_* w_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Odtod sledi, da so nivojne ploskve $g_k = c_k$, $k = m+1,\dots,n$, maksimalne integralne podmnogoterosti svežnja E v neki okolici p. S tem dobimo lokalno razslojitev (foliacijo) okolice točke $p \in X$ na paroma disjunktne integralne podmnogoterosti.

Globalno razslojitev dobimo s topološkimi argumenti (glej npr. [2] ali [7]). □

Dokaz izreka 2.57 v resnici pokaže naslednji natančnejši rezultat.

Izrek 2.59 *Naj bo X gladka mnogoterost dimenzije n in $E \subset TX$ gladek involutiven podsveženj ranga m. Tedaj ima vsaka točka $p \in X$ okolico $U \subset X$ in lokalno karto $\psi = (\psi', \psi'') : U \to \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$, kjer je $\psi' = (\psi_1,\dots,\psi_m)$ in $\psi'' = (\psi_{m+1},\dots,\psi_n)$, tako da so množice*

$$\left\{x \in U : \psi''(x) = c \in \mathbb{R}^d\right\}$$

integralne mnogoterosti zoženega svežnja $E|_U \to U$.

To pomeni, da je vsak integrabilen sveženj lokalno podan kot tangentni sveženj trivialne (produktne) foliacije. V splošnem pa globalni listi foliacije integrabilnega svežnja niso nujno zaprte podmnogoterosti v X in je slika neprimerno bolj zapletena kot tista v primeru 2.58, ko je foliacija globalno podana z nivojnimi ploskvami neke submerzije $X \to \mathbb{R}^d$.

Za preverjanje involutivnosti podsvežnja $E \subset TX$ ni potrebno računati komutatorja poljubnega para vektorskih polj tangentnih na E, kar je v praksi tudi neizvedljivo. Zadošča preveriti, da je v neki okolici poljubne točke $p \in X$ sveženj E generiran z $m = \operatorname{rang} E$ vektorskimi polji $v_1, \ldots, v_m$, tako da so komutatorji $[v_i, v_j]$ za $i, j = 1, \ldots, m$ tangentni na E. To sledi iz naslednje trditve.

Trditev 2.60 *Če sta vektorski polji w_1 in w_2 linearni kombinaciji (s funkcijskimi koeficienti) vektorskih polj $v_1, \ldots, v_m$, potem je njun komutator $[w_1, w_2]$ linearna kombinacija vektorskih polj $v_1, \ldots, v_m$ in $[v_i, v_j]$ za $i, j = 1, \ldots, m$.*

Dokaz Naj bo

$$w_i = \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} v_j, \quad i = 1, 2.$$

Iz lastnosti $[fv, w] = f[v, w] - w(f)v$ (glej trditev 2.41) sledi

$$\begin{aligned} [w_1, w_2] &= \left[\sum_{j=1}^{m} f_{1,j} v_j, \sum_{k=1}^{m} f_{2,k} v_k \right] = \sum_{j,k=1}^{m} [f_{1,j} v_j, f_{2,k} v_k] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} \big(f_{1,j} f_{2,k} [v_j, v_k] + f_{1,j} v_j(f_{2,k}) v_k - f_{2,k} v_k(f_{1,j}) v_j \big). \end{aligned}$$

Če so komutatorji $[v_i, v_j]$ za $i, j = 1, \ldots, m$ linearne kombinacije polj $v_1, \ldots, v_m$, potem je tudi $[w_1, w_2]$ linearna kombinacija teh polj. □

Primer 2.61 Naj bo $E \subset T\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ podsveženj ranga 2. Lokalno je E določen z dvema linearno neodvisnima vektorskima prostoroma v, w. Kot v dokazu Frobeniusovega izreka vidimo, da lahko v in w lokalno izberemo v obliki

$$v = \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial}{\partial y} + b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.17}$$

Vsaka integralna ploskev S je graf $z = f(x,y)$ in jo parametriziramo s preslikavo $(x,y) \to (x,y,f(x,y))$. Z odvajanjem po x in y vidimo, da vektorski polji

$$\widetilde{v} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \widetilde{w} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.18}$$

vzdolž S napenjata tangentni prostor ploskve S v vsaki točki. Ker vektorski polji v in w (2.17) generirata sveženj E, iz primerjave izrazov (2.18) in (2.18) sledi, da je S integralna ploskev svežnja E natanko tedaj, ko je $v = \widetilde{v}$ in $w = \widetilde{w}$ vzdolž S. To velja natanko tedaj, ko funkcija f zadošča sistemu parcialnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y,f(x,y)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b(x,y,f(x,y)).$$

Ker je $f \in \mathscr{C}^2$, sta druga mešana parcialna odvoda enaka:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= a_y + a_z f_y = a_y + a_z b \\ f_{yx} &= b_x + b_z f_x = b_x + b_z a \\ f_{xy} - f_{yx} &= a_y - b_x + a_z b - b_z a \;=\; 0. \end{aligned}$$

Izračunajmo še komutator vektorskih polj v in w:

$$[v,w] \;=\; \big(b_x + ab_z - a_y - ba_z\big)\frac{\partial}{\partial z} \;=\; (f_{yx} - f_{xy})\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ta račun ponovno pokaže, da vektorski polji v in w komutirata vzdolž vsake integralne ploskve; neničelnost komutatorja je obstrukcija za obstoj integralnih ploskev. □

Primer 2.62 (Kontakten podsveženj) Naj bo $E \subset T\mathbb{R}^3$ jedro $E = \ker\alpha$ 1-forme

$$\alpha \;=\; dz + xdy, \tag{2.19}$$

kjer so (x,y,z) koordinate na $\mathbb{R}^3$. Torej je $\operatorname{rang} E = 2$. Oglejmo si vektorski polji

$$u \;=\; \frac{\partial}{\partial x}, \qquad v \;=\; \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Očitno sta ti dve polji linearno neodvisni v vsaki točki in velja $\alpha(u) = \alpha(v) = 0$, torej u in v generirata podsveženj E. Njun komutator

$$[u,v] \;=\; -\frac{\partial}{\partial z}$$

pa ni tangenten na E; trojica (u,v,w) sestavlja bazo prostora $T_p\mathbb{R}^3$ v vsaki točki $p \in \mathbb{R}^3$. Torej podsveženj $E = \ker\alpha$ ni involutiven.

Diferencialna forma (6.15) se imenuje *standardna kontaktna forma* na $\mathbb{R}^3$ in $E = \ker\alpha$ je (standarden) *kontaktni podsveženj* tangentnega svežnja $T\mathbb{R}^3$.

Splošneje, če je $n \geq 1$ in so (x,y,z) koordinate na $\mathbb{R}^{2n+1}$, kjer je $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ in $z \in \mathbb{R}$, se 1-forma

$$\alpha \;=\; dz + \sum_{i=1}^{n} x_i\, dy_i$$

imenuje *standardna kontaktna forma* na $\mathbb{R}^{2n+1}$ in njeno jedro $E = \ker\alpha$ je *standardni kontaktni sveženj* na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Očitno je E sveženj hiperravnin. (Glej primer 6.9.) □

2.8 Liejeva vrsta toka vektorskega polja

Naj bo v vektorsko polje in ϕ_t njegov tok. Naj bo f gladka funkcija vzdolž tokovnice $\phi_t(x)$. Oglejmo si Taylorjev razvoj funkcije $t \mapsto f(\phi_t(x))$:

$$f(\phi_t(x)) \;=\; f(x) + v_x(f)\cdot t + \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} f(\phi_t(x))\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}f(\phi_t(x)) \;=\; df(\phi_t(x))\frac{d\phi_t(x)}{dt} \;=\; df_{\phi_t(x)}v_{\phi_t(x)} \;=\; v(f)(\phi_t(x)).$$

Če f nadomestimo z $v(f)$, dobimo:

$$\frac{d^2}{dt^2}f(\phi_t(x)) \;=\; \frac{d}{dt}v(f)(\phi_t(x)) \;=\; v(v(f))(\phi_t(x)) \;=\; v^2(f)(\phi_t(x)).$$

Kvadrat v^2 vektorskega polja je diferencialni operator drugega reda:

$$v(vf) = \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(a_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{j,k=1}^{n}\left(a_k\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j a_k\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right).$$

Splošno dobimo za vsak $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^k}{dt^k}f(\phi_t(x)) = v^k(f)(\phi_t(x)).$$

Torej je Taylorjev razvoj funkcije $t \mapsto f(\phi_t(x))$ enak

$$f(\phi_t(x)) \;=\; f(x) + v(f)(x)t + v^2(f)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + v^k(f)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Če uporabimo to formulo v primeru, ko je $v = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $f = x_j$ (j-ta koordinata), $\phi_t(x) = (\phi_{t,1}(x), \ldots, \phi_{t,n}(x))$ in upoštevamo

$$v(x_j)(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \;=\; a_j(x),$$

dobimo:

$$x_j \circ \phi_t(x) \;=\; \phi_{t,j}(x) = x_j + a_j(x)t + v(a_j)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + v^{k-1}(a_j)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Liejeva vrsta toka je torej

$$\phi_t(x) \;=\; x + v(x)t + v(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + v^{k-1}(a)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Sedaj bomo opisali še en način, kako naravno pridemo do komutatorja vektorskih polj. Naj bo tudi w vektorsko polje in ψ_s njegov tok:

$$w = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \psi_s(x) = x + sb(x) + \frac{s^2}{2}w(b)(x) + \dots$$

Kompozicija tokov ϕ_t in ψ_s je tedaj enaka

$$\begin{aligned}
\psi_s(\phi_t(x)) &= \psi_s\left(x + a(x)t + v(a)(x)\frac{t^2}{2} + \dots\right) \\
&= x + a(x)t + v(a)(x)\frac{t^2}{2} + \dots \\
&\quad + sb\big(x + a(x)t + \dots\big) + \frac{s^2}{2}w(b)(x + a(x)t + \dots) + \dots \\
&= x + ta(x) + sb(x) + st\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b(x)}{\partial x_j}a_j(x) + O(t^2, s^2).
\end{aligned}$$

Opazimo, da je

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b(x)}{\partial x_j}a_j(x) = v(b)(x).$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}
\psi_s(\phi_t(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stv(b)(x) + o(t^2, s^2) \\
\phi_t(\psi_s(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stw(a)(x) + o(t^2, s^2)
\end{aligned}$$

Razlika zgornjih izrazov je enaka

$$\psi_s(\phi_t(x)) - \phi_t(\psi_s(x)) = st\big[v(b)(x) - w(a)(x)\big] + O(t^2, s^2) = st[v, w](x) + O(t^2, s^2).$$

Odtod dobimo

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\big(\psi_s\phi_t(x) - \phi_t\psi_s(x)\big)\Big|_{s=t=0} = [v, w](x).$$

Naloga: Dokaži

$$[v, w](x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\psi_{-\sqrt{t}} \circ \phi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \phi_{\sqrt{t}}(x).$$

Če $\sqrt{t}$ nadomestimo z $\operatorname{sign}(t)\sqrt{|t|}$, potem lahko vzamemo dvostranski odvod.

2.9 Grönwallova lema in razdalja med tokovnicami

V tem razdelku bomo dokazali oceno za razdaljo med dvema tokovnicama vektorskega polja. Glavni rezultat je naslednji.

Izrek 2.63 *Denimo, da je* $v = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ *Lipschitzovo vektorsko polje z Lipschitzovo konstanto* B *na domeni* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*:*

$$|a(x) - a(y)| \le B|x-y|, \qquad x, y \in \Omega.$$

(Tu je $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$*.) Potem za vse pare točk* $x, y \in \Omega$ *in za vsak* $t \ge 0$*, za katere je tok* $\phi_s(x)$*,* $\phi_s(y)$ *definiran na intervalu* $s \in [0,t]$ *in leži v* Ω*, velja ocena*

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \le e^{Bt}|x-y|. \tag{2.20}$$

V dokazu bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 2.64 (Grönwall) *Naj bosta* $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ *zvezni funkciji. Denimo, da za neko število* $A \ge 0$ *in za vsak* $t \in [a,b)$ *velja neenakost*

$$f(t) \le A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds.$$

Potem velja

$$f(t) \le A\exp\left(\int_a^t g(s)\,ds\right), \quad t \in [a,b).$$

Poseben primer: Če je funkcija g konstanta $g \equiv B \ge 0$, tedaj iz ocene

$$f(t) \le A + B\int_a^t f(s)\,ds, \quad t \in [a,b),$$

sledi ocena

$$f(t) \le Ae^{B(t-a)}.$$

Dokaz Oglejmo si najprej primer $A > 0$. Označimo

$$h(t) = A + \int_a^t f(s)g(s)\,ds.$$

Predpostavka je torej $f(t) \le h(t)$ za vsak $t \in [a,b)$. Ker je $g(t) \ge 0$, sledi odtod

$$\dot{h}(t) = f(t)g(t) \le h(t)g(t) \implies \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \le g(t).$$

Z integriranjem dobimo odtod

$$\log h(t) \le \log A + \int_a^t g(s)\,ds$$

in z eksponenciranjem še

$$f(t) \leq h(t) \leq A \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right).$$

Z limitnim prehodom $A \searrow 0$ vidimo, da neenakost velja tudi za $A = 0$. $\square$

Dokaz izreka 2.63 Fiksirajmo točki $x, y \in \Omega$ in si oglejmo funkcijo

$$f(t) \stackrel{def}{=} |\phi_t(x) - \phi_t(y)|.$$

Tok polja v lahko zapišemo v obliki

$$\phi_t(x) = x + \int_0^t \frac{d}{ds}\phi_s(x)ds = x + \int_0^t a(\phi_s(x))\,ds, \qquad \phi_t(y) = y + \int_0^t a(\phi_s(y))ds.$$

Odtod dobimo

$$\begin{aligned} f(t) &= |\phi_t(x) - \phi_t(y)| \ \leq \ |x-y| + \int_0^t |a(\phi_s(x)) - a(\phi_s(y))|ds \\ &\leq |x-y| + \int_0^t B|\phi_s(x) - \phi_s(y)|ds \\ &= |x-y| + \int_0^t Bf(s)ds. \end{aligned}$$

Funkcija f torej zadošča predpostavki Grönwallove leme z $A = |x-y|$ in $B = g$. Sledi ocena $f(t) \leq |x-y|\,e^{Bt}$, kar je ravno neenakost (2.20). $\square$

2.10 Aproksimacija toka z iteracijo algoritma

V tem razdelku bomo pokazali, da lahko tok $\phi_t(x)$ vektorskega polja aproksimiramo z iteracijami primerno izbrane preslikave. Ta rezultat ima poleg očitne praktične vrednosti tudi teoretičen pomen, še posebej v teoriji holomorfnih avtomomorfizmov kompleksnih evklidskih prostorov (glej poglavje 4 v [17]).

Definicija 2.65
algoritem za tok Naj bo $v = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ vektorsko polje na odprti množici $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$. Naj bo Ω odprta množica v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, tako da je $\{0\} \times D \subset \Omega$. Preslikava $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^1$, ki zadošča pogojema

$$A(0,x) = x, \qquad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0}(t,x) = a(x), \qquad x \in D, \tag{2.21}$$

se imenuje algoritem *za vektorsko polje v.*

Iz definicije algoritma sledi

$$A(t,x) = x + ta(x) + o(t) = \phi_t(x) + o(t).$$

Najpreprostejši algoritem je kar preslikava $(t,x) \mapsto x + ta(x)$, ki je linearna v t.

Izrek 2.66 *Naj bo v Lipschitzovo vektorsko polje na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ s tokom ϕ_t. Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R} \times D$ fundamentalna domena toka. Če je $A(t,x) = A_t(x)$ algoritem za polje v, potem je za vsako točko $(t,x) \in \Omega$ $(t \geq 0)$ preslikava*

$$(A_{\frac{t}{N}})^N \;=\; \overbrace{A_{\frac{t}{N}} \circ \ldots \circ A_{\frac{t}{N}}}^{N\text{-ti iterat}}$$

definirana v okolici točke x za vsa dovolj velika naravna števila $N \in \mathbb{N}$ in velja

$$\phi_t(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} (A_{\frac{t}{N}})^N(x).$$

Konvergenca je enakomerna na kompaktih v Ω.

Dokaz Fiksirajmo točko $p \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $t_0 > 0$ tako število, da tok $\phi_t(p)$ obstaja za vsak $t \in [0,t_0]$. Označimo njegovo trajektorijo s

$$C \;=\; \{\phi_t(p) : t \in [0,t_0]\}.$$

Izberimo kompaktni množici $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{R}^n$, tako da je $C \subset \mathring{L}_1$ and $L_1 \subset \mathring{L}_2$. Potem obstaja kompaktna okolica $K \subset \mathring{L}_1$ točke p, tako da za vsako točko $x \in K$ in za vse $t \in [0,t_0]$ velja $\phi_t(x) \in L_1$. Iz (2.21) sledi $|\phi_t(x) - A_t(x)| = o(t)$ ko gre $t \to 0$, enakomerno za $x \in L_2$.

Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$ in izberimo točko $x \in K$. Predpostavimo za trenutek, da orbita

$$y_0 = x, \quad y_1 = A_{t/k}(y_0), \quad y_2 = A_{t/k}(y_1), \ldots, \; y_k = A_{t/k}(y_{k-1}) \tag{2.22}$$

obstaja in leži v množici L_2. Ker je $\phi_t(x) = (\phi_{t/k})^k(x)$, velja

$$\phi_t(x) - (A_{t/k})^k(x) = \sum_{j=1}^{k} (\phi_{t/k})^{k-j}\left(\phi_{t/k}(y_{j-1})\right) - (\phi_{t/k})^{k-j}\left(A_{t/k}(y_{j-1})\right). \tag{2.23}$$

Naj bo $\beta > 0$ Lipschitzova konstanta polja v na L_2. Iz izreka 2.63 (glej (2.20)) sledi

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \mathrm{e}^{\beta t}|x-y|.$$

Če uporabimo to oceno na vsakem členu v vsoti na desni strani (2.23), dobimo

$$\left|\phi_t(x) - (A_{t/k})^k(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{e}^{\beta t(k-j)/k}\left|\phi_{t/k}(y_{j-1}) - A_{t/k}(y_{j-1})\right| \leq k\mathrm{e}^{\beta t} o(t/k).$$

Pri $k \to \infty$ konvergira ta izraz proti 0 enakomerno na $x \in K$. Podobna ocena da

$$\left|\phi_{jt/k}(x)-(A_{t/k})^j(x)\right| \le j e^{\beta t} o(t/k), \quad j=1,\dots,k.$$

Z induktivno uporabo te ocene vidimo, da za vsak dovolj velik $k\in\mathbb{N}$ orbita (2.22) obstaja in leži v množici L_2 za vsako točko $x\in K$ in za vsak $t\in[0,t_0]$. $\square$

Primer 2.67 Preslikava

$$A(t,x) \;=\; x+ta(x)+tb(x)$$

je algoritem za vsoto $v+w$ vektorskih polj $v=\sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $w=\sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.
Naj bo ϕ_t tok polja v in ψ_t tok polja w. Tedaj je tudi preslikava

$$A(t,x) \;=\; \psi_t(\phi_t(x)) \;=\; x+ta(x)+tb(x)+o(t)$$

algoritem za vsoto polj $v+w$. Odtod sledi, da je tok θ_t vsote $v+w$ enak

$$\theta_t \;=\; \lim_{N\to\infty}\left(\psi_{\frac{t}{N}}\circ\phi_{\frac{t}{N}}\right)^N.$$

Primer 2.68 Naj bo ϕ_t tok polja v in ψ_t tok polja w. Tedaj je preslikava

$$A_t(x) \;=\; \psi_{-\sqrt{t}}\circ\phi_{-\sqrt{t}}\circ\psi_{\sqrt{t}}\circ\phi_{\sqrt{t}}$$

algoritem za komutator $[v,w]$. Torej je tok θ_t komutatorja $[v,w]$ enak

$$\theta_t(x) \;=\; \lim_{N\to\infty}(A_{t/N})^N(x).$$

2.11 Normalni sveženj podmnogoterosti in izrek o cevastih okolicah

V tem razdelku bomo dokazali, da ima vsaka gladka podmnogoterost M gladke mnogoterosti X okolico, ki je difeomorfna normalnemu svežnju M v X. Ta linearizacija vzdolž M omogoči preprostejšo analizo problemov v okolici M, kot npr. obravnavo majhnih perturbacij podmnogoterosti M, ki se prevede na obravnavo prerezov normalnega svežnja.

Naj bo M gladka podmnogoterost mnogoterosti X. Njen tangentni sveženj TM je podsveženj zožitve $TX|_M$ tangentnega svežnja X na M. Kvocientni sveženj

$$N=N_{M/X}=TX|_M/TM$$

imenujemo *normalni sveženj* M v X. Za vsako točko $p\in M$ je vlakno N_p normalnega svežnja N kvocient

$$N_p=T_pX/T_pM$$

tangentnega prostora T_pX po podprostoru $T_pM \subset T_pX$. (Konstrukcija kvocientnega svežnja ter sveženjskih kart na njem je podrobno opisana v razdelku 3.4.)

Iz trditve 3.19 sledi, da lahko N vložimo kot vektorski podsveženj svežnja $TX|_M$ tako, da za vsako točko $p \in M$ velja

$$T_pX = T_pM \oplus N_p,$$

torej sta T_pM in N_p komplementarna vektorska podprostora v T_pX. Pišemo

$$TX|_M = TM \oplus N.$$

To najlažje naredimo tako, da sveženj TX opremimo s poljem skalarnih produktov na vlaknih, to je Riemannovo metriko na mnogoterosti X. V vsaki lokalni karti na X je taka metrika oblike

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j,$$

kjer je $G(x) = (g_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$ simetrična pozitivno definitna matrična funkcija, gladko odvisna od bazne toče. (Glej razdelek 6.6.) Vrednost metrike g na poljubnem paru tangentnih vektorjev

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_xX, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_xX$$

je

$$g_x(\xi,\eta) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\xi_i\eta_j,$$

dolžina vektorja ξ v tej metriki pa je

$$\|\xi\|_g^2 \;=\; g_x(\xi,\xi) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\xi_i\xi_j.$$

Metriko na poljubnem vektorskem svežnju lahko konstriramo s pomočjo particij enote, saj je konveksna linearna kombinacija skalarnih produktov spet skalarni produkt. Ob prisotnosti Riemannove metrike g na X lahko normalni sveženj $N = TX|_M/TM$ identificiramo z g-ortogonalnim komplementom TM v $TX|_M$:

$$TX|_M \;=\; TM \oplus_{\perp g} N_{M/X}$$

Izrek 2.69 (Cevaste okolice podmnogoterosti) *Če je M gladka podmnogoterost gladke mnogoterosti X, ima M odprto okolico $U \subset X$, ki je difeomorfna neki odprti okolici $\Omega \subset N_{M/X}$ ničelnega prereza v normalnem svežnju M v X (in je tudi difeomorfna totalnemu prostoru normalnega svežnja).*

Izrek je zelo pomemben v uporabah, saj nam omogoča redukcijo problemov v neki okolici M v X na ustrezne probleme v normalnem svežnju $N = N_{M/X}$, kjer imamo linearno strukturo in se problemi pogosto poenostavijo. Na primer, če je M kompaktna in brez roba, sledi, da lahko vsako dovolj majhno gladko perturbacijo M v X predstavimo s prerezom $M \to N$ normalnega svežnja $N \to M$, ki je blizu ničelnemu prerezu. Analiza prerezov je dosti lažji problem, saj je prostor prerezov vektorskega svežnja vektorski prostor.

V nadaljevanju označimo $N = N_{M/X}$. Okolico Ω v izreku lahko izberemo tako, da so njena vlakna Ω_x ($x \in M$) konveksne množice v vlaknih N_x, npr. krogle polmera $r(x) > 0$ v metriki na N, kjer je r gladka funkcija. S pomočjo nelinearne dilatacije v vlaknih (npr. z uporabo funkcije arkus tangens) lahko totalni prostor N tedaj preslikamo difeomorfno na Ω.

Če ima Ω konveksna vlakna, je družina preslikav

$$\tau_t : \Omega \to \Omega \ (t \in [0,1]), \quad \tau_t(x,e) = (x,te), \ \ e \in \Omega_x$$

homotopija množice Ω na ničelni prerez. Velja

$$\tau_1 = \mathrm{Id}_\Omega, \quad \tau_0 = (x,0) = 0_x, \quad \tau_t(x,0) = (x,0),$$

torej homotopija miruje na ničelnem prerezu. Homotopija s to lastnostjo se imenuje *deformacijska retrakcija* Ω na ničelni prerez.

Posledica 2.70 *Če je $M \subset X$ vložena podmnogoterost, potem ima M bazo odprtih okolic $U \subset X$, tako da je M deformacijski retrakt vsake od teh okolic.*

Dokaz izreka 2.69 Izrek bomo dokažali z uporabe metode dominantnih sprejev. Izberemo gladka kompletna vektorska polja $v_1, \ldots, v_m$ na X, ki generirajo tangentni prostor T_xX v vsaki točki $x \in X$. (Kompletnost polj v dokazu ni bistvena in smo jo privzeli zgolj zaradi preprostosti oznak.) Naj bo ϕ_t^j tok polja v_j. Oglejmo si preslikavo $F : X \times \mathbb{R}^m \to X$, definirano s predpisom

$$F(x,t) \ = \ \phi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \phi_{t_m}^m(x), \qquad x \in X, \ t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{2.24}$$

Pri tem vzamemo kompozicijo tokov vseh vektorskih polj $\phi_{t_j}^j$ (v poljubnem vrstnem redu), kjer spremenljivke t_j uporabimo kot časovne spremenljivke tokov. Očitno je F gladka preslikava z naslednjimi lastnostmi:

$$F(x,0) = x, \qquad \frac{\partial}{\partial t_j}\bigg|_{t=0} F(x,t) \ = \ v_j(x), \qquad x \in X, \ j = 1, \ldots, m.$$

Ker vektorji $v_1(x), \ldots, v_m(x)$ napenjajo tangentni prostor T_xX v vsaki točki $x \in X$, je F submerzija vzdolž $X \times \{0\}^m$. Torej je za vsak $x \in X$ preslikava

$$\Theta_x = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} F(x,t) : \mathbb{R}^m \ \longrightarrow \ T_xX \tag{2.25}$$

linearna in surjektivna. Preslikava

$$\Theta : X \times \mathbb{R}^m \longrightarrow TX,$$

ki je na vlaknu $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ enaka Θ_x, je torej epimorfizem vektorskih svežnjev.

Opazujmo zožitev $\Theta : M \times \mathbb{R}^m \to TX|_M$. Naj bo $E' \subset M \times \mathbb{R}^m$ podmnožica z vlakni

$$E'_x \;=\; \Theta_x^{-1}(T_x M), \qquad x \in M.$$

Ker je TM vektorski podsveženj svežnja $TX|_M$ in je Θ epimorfizem vektorskih svežnjev, je po posledici 3.18 množica $E' = \Theta^{-1}(TM)$ gladek vektorski podsveženj trivialnega svežnja $M \times \mathbb{R}^m$.

Po posledici 3.20 obstaja gladek vektorski podsveženj $E \subset M \times \mathbb{R}^m$, ki je komplementaren podsvežnju E', tako da je $M \times \mathbb{R}^m$ njuna direktna vsota:

$$M \times \mathbb{R}^m \;=\; E \oplus E'.$$

(Za E lahko izberemo kar ortogonalni komplement podsvežnja E' v evklidski metriki na vlaknih $\mathbb{R}^m$.)

Epimorfizem $\Theta : M \times \mathbb{R}^m \to TX|_M$ preslika $E' = \Theta^{-1}(TM) \subset M \times \mathbb{R}^m$ na podsveženj $TM \subset TX|_M$. Njegova zožitev $\Theta|_E : E \to TX|_M$ na komplementarni podsveženj je zato monomorfizem in slika $\Theta(E) \subset TX|_M$ je podsveženj, komplementaren tangentnemu podsvežnju $TM \subset TX|_M$. (Glej izrek 3.17.) Torej je $\Theta(E)$ (in zato tudi E) izomorfen normalnemu svežnju $N \cong TX|_M/TM$.

Oglejmo si sedaj preslikavo

$$\Phi := F|_E : E \longrightarrow X.$$

Dokazali bomo, da Φ preslika neko odprto okolico $\Omega \subset E$ ničelnega prereza E_0 difeomorfno na $U = \Phi(\Omega) \subset X$, ki je seveda okolica M v X. Ker je E izomorfen normalnemu svežnju $N = N_{M/X}$, bo s tem izrek dokazan.

Očitno velja $\Phi(0_x) = x$ za vsak $x \in M$, torej Φ preslika ničelni prerez $E_0 \subset E$ difeomorfno na podmnogoterost $M \subset X$. (Ničelni prerez E_0 svežnja $E \to M$ lahko identificiramo z M s preslikavo $M \ni x \mapsto 0_x \in E_x$.) Trdimo, da je diferencial

$$d\Phi_{0_x} : T_{0_x}E \longrightarrow T_x X$$

linearni izomorfizem za vsako točko $x \in M$. Najprej opazimo, da je

$$T_{0_x}E \;=\; T_{0_x}E_0 \oplus E_x$$

direktna vsota horizontalnega podprostora $T_{0_x}E_0$ (tangentni prostor na ničelni prerez E_0) in vertikalnega podprostora (tangentni prostor na vlakno E_x; ker je E_x vektorski prostor, lahko $T_{0_x}E_x$ identificiramo z E_x). Ker je $\Phi : E_0 \to M$ difeomorfizem, je

$$d\Phi_{0_x} : T_{0_x}E_x \longrightarrow T_x M$$

izomorfizem za vsak $x \in M$. V smeri E_x pa je po konstrukciji (glej (2.25))

$$d\Phi_{0_x}|_{E_x} \;=\; \Theta_x|_{E_x} : E_x \xrightarrow{\cong} \Theta_x(E_x)$$

izomorfizem vlakna E_x na podprostor $\Theta_x(E_x) \subset T_xX$, ki je komplementaren tangentnemu prostoru $T_xM \subset T_xX$ v točki x. S tem je trditev dokazana.

Za zaključek dokaza izreka zadošča najti odprto okolico $\Omega \subset E$ ničelnega prereza E_0, tako da je $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset X$ difeomorfizem. Obstoj take okolice sledi iz naslednje leme, ki jo uporabimo za primer $Y = E$, $Y_0 = E_0$, $X_0 = M \subset X$.

Lema 2.71 *Naj bo $\Phi : Y \to X$ gladka preslikava in $Y_0 \subset Y$ ter $X_0 \subset X$ podmnogoterosti, tako da veljata naslednji dve lastnosti.*

1. *$\Phi : Y_0 \to X_0$ je difeomorfizem.*
2. *Za vsako točko $y \in Y_0$ je diferencial $d\Phi_y : T_yY \to T_{\Phi(y)}X$ linearni izomorfizem.*

Tedaj obstaja odprta okolica $\Omega \subset Y$ podmnogoterosti Y_0, tako da je preslikava $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset X$ difeomorfizem.

Dokaz Lemo bomo dokazali v primeru, ko je Y_0 kompaktna. Dokaz za splošen primer je podoben, le da je tehnično zahtevnejši.

Iz pogoja 2 sledi, da je Φ lokalni difeomorfizem v vsaki točki podmnogoterosti Y_0. Ker je to odprt pogoj, obstaja okolica $\Omega \subset Y$ podmnogoterosti Y_0, tako da je preslikava $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset X$ lokalni difeomorfizem. Sedaj je potrebno še videti, da lahko okolico Ω izberemo dovolj majhno, tako da je na njej Φ injektivna.

Recimo, da Φ ni injektivna v nobeni okolici podmnogoterosti Y_0. Tedaj obstajata zaporedji $a_j, b_j \in Y$, ki konvergirata proti Y_0, tako da za vsak indeks j velja $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$. S prehodom na podzaporedje dobimo konvergentni zaporedji $a_j \to a_0 \in Y_0$, $b_j \to b_0 \in Y_0$. Odtod sledi po zveznosti

$$\Phi(a_0) \;=\; \lim_{j\to\infty} \Phi(a_j) \;=\; \lim_{j\to\infty} \Phi(b_j) \;=\; \Phi(b_0).$$

Ker je Φ injektivna na Y_0, sledi $a_0 = b_0$. To je protislovje, saj je Φ difeomorfizem na neki okolici $U \subset Y$ točke a_0, za vse dovolj velike j pa velja $a_j, b_j \in U$, $a_j \neq b_j$ in $\Phi(a_j) = \Phi(b_j)$. $\square$

Opomba 2.72 Naj bo $F : X \times \mathbb{R}^m \to X$ preslikava (2.24) in $\Theta : X \times \mathbb{R}^m \to TX$ epimorfizem vektorskih svežnjev (2.25). Potem je jedro $E' = \ker\Theta$ vektorski podsveženj svežnja $X \times \mathbb{R}^m$ in obstaja razcep na direktno vsoto $X \times \mathbb{R}^m = E \oplus E'$, kjer je E nek komplementarni podsveženj. Tedaj Θ inducira izomorfizem vektorskih svežnjev $\Theta|_E : E \stackrel{\cong}{\to} TX$. Odtod sledi, da preslikava $F|_E : E \cong TX \to X$ zadošča naslednjima dvema pogojema za vsak $x \in X$:

$$F(0_x) = x, \qquad dF_{0_x} : T_xX \longrightarrow T_xX \;\text{ je izomorfizem.}$$

Taka preslikava se imenuje *dominanten sprej na X*, definiran na tangentnem svežnju TX.

V diferencialni geometriji se ob prisotnosti Riemannove metrike na X tak sprej običajno uvede s pomočjo geodetske preslikave, ki pa ni nujno definirana na vsem TX. Ta preslikava se označuje z $TX \ni v \mapsto \exp(v) = e^v \in X$ in se imenuje *eksponentna preslikava*, prirejena dani Riemannovi metriki na X. Za mnoge uporabe (kot npr. v dokazu izreka o cevasti okolici) konkretna izbira dominantnega spreja ne igra bistvene vloge.

Opomba 2.73 Analog izreka 2.69 za kompleksne mnogoterosti v splošnem ne velja, razen v primeru ko je M Steinova podmnogoterost poljubne kompleksne mnogoterosti X. (Kompleksna mnogoterost je Steinova, če je biholomorfna neki zaprti kompleksni podmnogoterosti kompleksnega evklidskega prostora $\mathbb{C}^N$; glej str. 45). V tem primeru izrek o cevasti okolici sledi s kombinacijo več netrivialnih rezultatov kompleksne analize. Prvi je izrek Y.-T. Siu (1974), da ima vsaka Steinova podmnogoterost M poljubne kompleksne mnogoterosti X bazo odprtih Steinovih okolic v X. To prevede problem na primer, ko sta M in X Steinovi ter je M topološko zaprta v X. V tem primeru sta rezultat, analogen izreku 2.69 v holomorfnem primeru, dokazala F. Docquier in H. Grauert leta 1960. Eden od bistvenih netrivialnih korakov v dokazu je razcep holomorfnega vektorskega svežnja nad Steinovo mnogoterostjo na direktno vsoto danega holomorfnega vektorskega podsvežnja in nekega holomorfnega komplementarnega podsvežnja. (Argument z Riemannovo metriko in ortogonalnostjo v kompleksnem ne deluje.) Dokaz lahko bralec najde v [17, Theorem 3.3.3].

Poglavje 3
Vektorski svežnji

Vektorski svežnji so eno od najpomembnejših analitičnih orodij v teoriji gladkih mnogoterosti. Osnovni primer, to je tangetni sveženj mnogoterosti, smo obravnavali že v poglavju 2 pri analizi vektorskih polj.

V tem poglavju bomo s pomočjo orodij in konstrukcij (multi-) linearne algebre uvedli še vrsto pridruženih svežnjev kot so *kotangetni sveženj* mnogoterosti (dual tangentnega svežnja), njihove direktne vsote, tenzorske produkte ter vnanje produkte. Prerezi vektorskih svežnjev, izpeljanih iz tangetnega svežnja, se imenujejo *tenzorska polja*. Poleg vektorskih polj in Riemannovih metrik, ki smo jih že spoznali, so zelo pomembni primeri *diferencialne forme*, to so prerezi vnanjih produktov kotangetnega sženja. Vrsta drugih tenzorskih polj se naravno pojavi pri študiju problemov iz fizike in mehanike (npr. napetostni tenzor). V resnici velik del teorije gladkh mnogoterosti izvira ravno iz problemov fizike, mehanike, astronomije ipd. Pri matematični obravnavi mnogoterosti so vektorski svežnji eno od bistveni orodij za linearizacijo analitičnih problemov, kot smo že videli v kontekstu izreka o cevastih okiolicah v razdelku 2.11. Bistveni so tudi pri obravnavi teorije transveralnosti (glej poglavje 4). Poleg tega so izjemno pomembni pri razumevanju topoloških lastnosti bazne mnogoterosti, saj jim lahko naravno pridružimo različne kohomološke razrede kot so Stiefel-Whitneyev razred, Pontryaginov razred, Chernov razred (v primeru kompleksnih vektorskih svežnjev na kompleksnih mnogoterostih), idr.

Namen poglavja je razviti analitične osnove teorije vektorskih svežnjev na mnogoterostih v obsegu, potrebnem v tem delu. V finejšo teorijo topološke, gladke ali holomorfne klasifikacije vektorskih svežnjev se ne bomo poglabljali; bralec lahko slednje najde v vrsti monografij s področja.

3.1 Definicija in primeri

Naj bosta E in X mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ in $\pi : E \to X$ surjektivna $\mathscr{C}^r$ preslikava. Obravnavamo lahko vse razrede gladkosti. Topološke vektorske svežnje lahko uvedemo na poljubnem baznem topološkem prostoru X z enako definicijo.

Definicija 3.1 *Preslikava $\pi : E \to X$ (oziroma trojica (E,π,X)) je* realen vektorski sveženj *ranga m in razreda $\mathscr{C}^r$, če ima vsako vlakno $E_x = \pi^{-1}(x)$ strukturo m-razsežnega vektorskega prostora ($E_x \cong \mathbb{R}^m$) in je sveženj lokalno trivialen v smislu, da za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $p \in U \subset X$ in difeomorfizem $\theta : E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ razreda $\mathscr{C}^r$ (homeomorfizem v primeru $r = 0$), tako da je za vsak $x \in U$ preslikava $\theta_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^m$ linearni izomorfizem.*

$$\begin{tikzcd} \theta : \pi^{-1}(U) = E|_U \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & U \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Če vlakno $\mathbb{R}^m$ zamenjamo s kompleksnim evklidskim prostorom $\mathbb{C}^m$ in zahtevamo, da je $\theta_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{pr_2} \mathbb{C}^m$ kompleksno-linearen izomorfizem, dobimo kompleksen vektorski sveženj *ranga m in razreda $\mathscr{C}^r$ nad X.*

Iz definicije sledi, da so vektorske operacije na vlaknih (seštevanje in produkt s skalarji) gladko odvisne od bazne točke $x \in U$.

Mnogoterost X se imenuje *bazni prostor* ali *baza* svežnja, E je *totalni prostor* svežnja in $E_x = \pi^{-1}(x)$ je *vlakno* svežnja nad bazno točko $x \in X$.

Vsaka preslikava $\theta : \pi^{-1}(U) = E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$, ki zadošča pogojem v zgornji definiciji, se imenuje *sveženjska karta* na svežnju $\pi : E \to X$. Iz definicije vektorskega svežnja sledi, da lahko najdemo družino $\mathscr{E} = \{(U_\alpha,\theta_\alpha) : \alpha \in A\}$ sveženjskih kart nad odprtim pokritjem $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ baze X (torej $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$); taka družina se imenuje *sveženjski atlas* na E.

Prehodna preslikava med dvema sveženjskima kartama (U_α,θ_α) in (U_β,θ_β) z nepraznim presekom $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$ je oblike

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \to U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m, \quad \theta_{\alpha\beta}(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)v), \tag{3.1}$$

kjer je $x \in U_{\alpha\beta}$, $v \in \mathbb{R}^m$ in je $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ v grupo neizrojenih realnih matrik dimenzije $m \times m$. (V primeru kompleksnega vektorskega svežnja zamenjamo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$ in je $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{C})$.)

$$\begin{tikzcd}
 & E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[dl, "\theta_\alpha"'] \arrow[dr, "\theta_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[ll, "\theta_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Družina funkcij $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ je 1-*kocikel*, torej zadošča pogojem:

$$g_{\alpha\alpha} = I, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = I, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = I \tag{3.2}$$

za poljubno trojico indeksov $\alpha, \beta, \gamma \in A$. Tu je $I \in GL_m(\mathbb{R})$ identična matrika.

Dva sveženjska atlasa na E sta *ekvivalentna*, če je njuna unija spet sveženjski atlas. To je res natanko tedaj, ko je prehodna preslikava med poljubno karto iz prvega atlasa in poljubno karto iz drugega atlasa razreda $\mathscr{C}^r$. (Da je prehodna preslikava linearna na vlaknih sledi že iz definicije atlasa.) Struktura vektorskega svežnja na E je določena z ekvivalenčnim razredom sveženjskega atlasa, podobno kot pri definiciji mnogoterosti.

V obratni smeri lahko vsakemu 1-kociklu preslikav $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ (oz. $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{C})$) razreda $\mathscr{C}^r$ (glej (3.2)) priredimo vektorski sveženj $E \to X$ ranga m in razreda $\mathscr{C}^r$ nad X, tako da so $g_{\alpha\beta}$ ravno prehodne matrične funkcije med sveženjskimi kartami na E kot v (3.1). To je opisano v naslednjem izreku.

Izrek 3.2 *Za vsak* 1*-kocikel* $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \mapsto GL_m(\mathbb{R})$ *(glej* (3.2)*) na odprtem pokritju* $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *mnogoterosti* X *obstaja vektorski sveženj* $E \xrightarrow{\pi} X$ *ranga* m *s sveženjskim atlasom* $\mathscr{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha) : \alpha \in A\}$ *in prehodnimi preslikavami*

$$\theta_{\alpha\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big), \quad x \in U_{\alpha\beta},\ v \in \mathbb{R}^m.$$

Dokaz Totalni prostor E iskanega svežnja definiramo kot faktorsko množico

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^m / \sim$$

kjer $\bigsqcup_{\alpha \in A}$ označuje disjunktno unijo in je relacija $\sim$ definirana s predpisom

$$U_\beta \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m.$$

Naredimo torej natančno te identifikacije za vsak par indeksov $\alpha, \beta \in A$, za katere je $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$. Kocikelni pogoj zagotavlja, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija in je prostor E Hausdorffov. Za vsak indeks α lahko množico $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ identificiramo z njeno kanonično (injektivno) sliko v E, saj med točkami te množice ni nobenih identifikacij. Sveženjske karte na E so inverzi teh vložitev. $\square$

3.2 Prerezi vektorskega svežnja

Definicija 3.3 Prerez *vektorskega svežnja* $\pi : E \to X$ *je preslikava* $f : X \to E$, *ki zadošča pogoju*

$$\pi \circ f = \mathrm{Id}_X.$$

Ekvivalentno, za vsak $x \in X$ *je* $f(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$ *točka v vlaknu nad* x.
Prerez je razreda $\mathscr{C}^r$, *če je* $\mathscr{C}^r$ *preslikava mnogoterosti* X *v mnogoterost* E. *(To ima smisel v primeru ko je svežnj* $\pi : E \to X$ *razreda* $\mathscr{C}^r$.)
Prerez $0 : X \to E$, *ki vsaki točki* $x \in X$ *priredi ničelni element* $0_x \in E_x$ *vektorskega prostora* E_x, *se imenuje* ničelni prerez.

Bazo X pogosto identificiramo s sliko $X_0 = \{0_x : x \in X\} \subset E$ ničelnega prereza.

Prostori prerezov. Množico vseh zveznih prerezov $X \to E$ označimo z

$$\Gamma(X,E).$$

Če je $\pi : E \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^r$, potem $\Gamma^r(X,E)$ označuje množico vseh prerezov razreda $\mathscr{C}^r$.
Za poljubna prereza $f,g \in \Gamma(X,E)$ definiramo vsoto $f+g \in \Gamma(X,E)$ po točkah:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in E_x \quad \text{(vsota na vlaknu } E_x\text{)}.$$

Za vsak prerez $f \in \Gamma(X,E)$ in zvezno funkcijo $\chi : X \to \mathbb{R}$ definiramo prerez $\chi f \in \Gamma(X,E)$ s predpisom

$$(\chi f)(x) = \chi(x) f(x) \in E_x, \quad x \in X.$$

Očitno je $\Gamma(X,E)$ vektorski prostor in modul nad kolobarjem $\mathscr{C}(X)$ zveznih funkcij. Če je $E \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^r$, je $\Gamma^r(X,E)$ modul nad kolobarjem $\mathscr{C}^r(X)$ funkcij razreda $\mathscr{C}^r$.
Prerezi trivialnega svežnja $E = X \times \mathbb{R}^n \to X$ so oblike $f(x) = (x, g(x))$ $(x \in X)$, kjer je $g : X \to \mathbb{R}^n$ preslikava baze X v vlakno $\mathbb{R}^n$. Na ta način prereze trivialnega svežnja pogosto identificiramo s preslikavami baze v vlakno:

$$\Gamma(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathscr{C}(X, \mathbb{R}^n); \quad \Gamma^r(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathscr{C}^r(X, \mathbb{R}^n).$$

Prerezi v lokalni kartah. Naj bo $\mathscr{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha) : \alpha \in A\}$ sveženjski atlas na E, kjer je $\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ karta na E, s prehodnimi preslikavami

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x,v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big).$$

V karti $\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ je prerez f podan s funkcijo $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Kompatibilitetni pogoji med kartami v svežnju nam dajo relacije

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x), \quad x \in U_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in A.$$

Obratno, vsaka družina preslikav $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ $(\alpha \in A)$, ki zadošča pogojem

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta \ \text{ na } U_{\alpha\beta}$$

za vsak par $\alpha, \beta \in A$, določa prerez $f : X \to E$.
Če sta v nekem atlasu prereza f in f' določena z družinama vektorskih funkcij (f_α) in (f'_α), je njuna vsota $f + f'$ določena z družino $(f_\alpha + f'_\alpha)$ in je prerez χf določen z družino (χf_α).

3.3 Morfizmi vektorskih svežnjev

Obravnavali bomo realne vektorske svežnje; vse povedano velja tudi za kompleksne vektorske svežnje.
Naj bosta $\pi : E \to X$ in $\pi' : E' \to X$ vektorska sveženja razreda $\mathscr{C}^r$ nad X.

Definicija 3.4 *Preslikava $\Phi : E \to E'$ razreda $\mathscr{C}^r$ se imenuje* morfizem *razreda $\mathscr{C}^r$ svežnja E v E', če zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$ in je za vsak $x \in X$ preslikava $\Phi_x : E_x \to E'_x$ linearna.*

Pogoj $\pi' \circ \Phi = \pi$ pomeni, da naslednji diagram komutira

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Morfizem $\Phi : E \to E'$ se imenuje *izomorfizem*, če je $\Phi_x : E_x \to E'_x$ linearni izomorfizem za vsak $x \in X$.
Vektorski sveženj E se imenuje *trivialen*, če je izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$, $n = \operatorname{rang} E$. V tej smeri velja naslednja trditev.

Trditev 3.5 *Vektorski sveženj $E \to X$ ranga n je trivialen natanko tedaj, ko obstaja n prerezov $f_i : X \to E$ $(i = 1, \dots n)$, tako da je*

$$E_x = \operatorname{Lin}\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \ \textit{ za vsak } x \in X.$$

Dokaz Naj bo $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ baza prostora $\mathbb{R}^n$. Če je $\Phi : E \to X \times \mathbb{R}^n$ izomorfizem svežnjev, potem prerezi $f_i(x) = \Phi^{-1}(x, \mathbf{e}_i)$ $(x \in X,\ i = 1, \dots, n)$ generirajo vsako vlakno E_x. Obratno, če prerezi $f_1, \dots, f_n : X \to E$ generirajo vsako vlakno, je morfizem svežnjev $\Psi : X \times \mathbb{R}^n \to E$, podan z $\Psi(x, c_1, \dots, c_n) = \big(x, \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\big)$, izomorfizem.

Splošneje, še sta $\pi : E \to X$ in $\pi' : E' \to X'$ vektorska svežena razreda $\mathscr{C}^r$ nad različnima bazama in je $f : X \to X'$ neka $\mathscr{C}^r$ preslikava, je *morfizem* $\Phi : E \to E'$ *nad* f preslikava, za katero komutira diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

in je za vsak $x \in X$ preslikava $\Phi_x : E_x \to E'_{f(x)}$ linearna.

Tovrsten primer je *tangentna preslikava* $Tf : TX \to TY$, ki je morfizem tangentnih svežnjev nad preslikavo $f : X \to Y$.

Morfizem $E \to E'$ svežnjev nad bazo X torej ustreza morfizmu nad identično preslikavo $\mathrm{Id}_X : X \to X$. Obratno, morfizem vektorskih svežnjev nad $f : X \to X'$ lahko obravnavamo kot morfizem svežnjev nad X s pomočjo naslednje konstrukcije.

Povlek vektorskega svežnja. Naj bo $\pi : E \to Y$ vektorski svežen j nad Y in $f : X \to Y$ neka preslikava. Definiramo nalsednjo množico in preslikavi:

$$f^*E = \big\{(x,e) \in X \times E : f(x) = \pi(e)\big\}$$

$$\pi_* : f^*E \to X,\ \ \pi_*(x,e) = x; \qquad \Phi : f^*E \to E,\ \ \Phi(x,e) = e.$$

Zlahko preverimo, da je $\pi_* : f^*E \to X$ vektorski svežen in je $\Phi : f^*E \to E$ morfizem svežnjev nad $f : X \to Y$, tako da je za vsako točko $x \in X$ preslikava $\Phi_x : (f^*E)_x \to E_{f(x)}$ linearni izomorfizem. Svežen (f^*E, π_*, X) se imenuje *povlek svežnja* (E, π, Y) *s preslikavo* $f_X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Vsak drug morfizem $\Psi : f^*E \to E$ nad preslikavo f je oblike $\Psi = \Phi \circ \Psi'$, kjer je $\Psi' : f^*E \to f^*E$ morfizem vektorskih svežnjev nad identično preslikavo Id_X.

Naloga 3.6 Naj bo $\{(V_\alpha, \theta_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ sveženjski atlas na vektorskem svežnju $E \to Y$. Označimo z $g_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{R})$ prehodno funkcijo (3.1). Naj bo $\{U_i\}_{i \in I}$ odprto pokritje X, tako da za vsak $i \in I$ velja $f(U_i) \subset V_{\alpha(i)}$ za nek $\alpha(i) \in A$. Tedaj je družina

$$\theta_i^* : f^*E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^n, \qquad \theta_i^*(x,e) = \theta_{\alpha(i)}(f(x), e)$$

za $i \in I$ sveženjski atlas na $f^*E \to X$ s prehodnimi funkcijami

$$g_{ij}^*(x) = g_{\alpha(i)\alpha(j)}(x), \qquad x \in U_{ij}.$$

V tem smislu lahko rečemo, da ima atlas $\{(f^*E|_{U_i}, \theta_i^*)\}_{i\in I}$ iste prehodne funkcije kot atlas $\{(V_\alpha, \theta_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.

Povlek vektorskega svežnja ima še eno pomembno vlogo. Naj bo $\pi : E \to Y$ vektorski sveženj in $f : X \to Y$ preslikava. Preslikava $F : X \to E$ se imenuje *dvig* preslikave f glede na π, če je $\pi \circ F = f$, kar pomeni, da naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Tedaj obstaja natanko en prerez $\widetilde{F} : X \to f^*E$, tako da je $F = \Phi \circ \widetilde{F}$, kjer je $\Phi : f^* \to E$ naravni izomorfizem nad f v diagramu (3.3).

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_*"] & E, \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[u, bend left, "\widetilde{F}"] \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Povlek torej reducira analizo dvigov dane preslikave $f : X \to Y$ v sveženj $\pi : E \to Y$ v analizo prerezov povlečenega svežnja $f^*E \to X$.

Jedro in slika morfizma. Naj bosta $\pi : E \to X$ in $\pi' : E' \to X$ vektorska svežnja in $\Phi : E \to E'$ morfizem sveženjev. Njegovo *jedro* in *sliko* definiramo na očiten način:

$$\ker\Phi = \{e \in E_x : x \in X,\ \Phi_x(e) = 0_x \in E'_x\} \subset E$$
$$\Im\Phi = \Phi(E) = \{\Phi_x(e) : e \in E_x,\ x \in X\} \subset E'.$$

Očitno je za vsak $x \in X$ vlakno $(\ker\Phi)_x = \ker\Phi_x$ vektorski podprostor vlakna E_x in je slika $(\mathrm{im}\Phi)_x = \mathrm{im}\Phi_x$ vektorski podprostor vlakna E'_x. Velja

$$\dim(\ker\Phi_x) + \dim(\mathrm{im}\Phi_x) = \mathrm{rang}E, \qquad x \in X.$$

Posamezni dimenziji sta lahko odvisni od točke x.

Morfizem Φ se imenuje *monomorfizem*, če je $\ker\Phi = X \times \{0\}$ in *epimorfizem*, če je $\mathrm{im}\Phi = E'$. Torej je Φ izomorfizem natanko tedaj, ko je hkrati monomorfizem in epimorfizem. Pokazali bomo, da je tedaj inverzni izomorfizem $\Phi^{-1} : E' \to E$ istega reda gladkosti kot Φ (glej trditev 3.8).

Morfizmi v sveženjskih kartah. Označimo z $\mathrm{Mat}^{m',m} \cong \mathbb{R}^{mm'}$ množico vseh realnih matrik dimenzije $m' \times m$. Naj bosta $E \to X$ in $E' \to X$ vektorska svežnja ranga m in m'. Morfizem vektorskih sveženjev $\Phi : E \to E'$ je v paru sveženjskih kart (U, θ) (na E) in (U, θ') (na E') nad odprto množico $U \subset X$ podan z matrično funkcijo

$$U \ni x \longmapsto \phi(x) \in \mathrm{Mat}^{m',m},$$

tako da za prirejeno preslikavo

$$\widetilde{\Phi} : U \times \mathbb{R}^m \to U \times \mathbb{R}^{m'}, \qquad \widetilde{\Phi}(x,v) = (x, \phi(x)\, v)$$

komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E'|_U \arrow[d, "\theta'"] \\
U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\widetilde{\Phi} = \theta' \circ \Phi \circ \theta^{-1}"] & U \times \mathbb{R}^{m'}
\end{tikzcd}$$

Oglejmo si natančnejši opis morfizmov. Izberimo

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &= \{(U_\alpha, \theta_\alpha) : \alpha \in A\} \ \ldots \text{ sveženjski atlas na } E \\
\mathscr{E}' &= \{(U_\alpha, \theta'_\alpha) : \alpha \in A\} \ \ldots \text{ sveženjski atlas na } E'
\end{aligned}$$

Za vsak indeks $\alpha \in A$ dobimo preslikavo

$$\Phi_\alpha(x,v) = (\theta'_\alpha \circ \Phi \circ {\theta_\alpha}^{-1})(x,v) = \big(x, \phi_\alpha(x) v\big), \qquad \phi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Mat}^{m',m},$$

tako da naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
E|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E'|_{U_\alpha} \arrow[d, "\theta'_\alpha"] \\
U_\alpha \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\Phi_\alpha"] & U_\alpha \times \mathbb{R}^{m'}
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Morfizem Φ je torej enolično določen z družino matričnih funkcij

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Mat}^{m',m}, \qquad \alpha \in A. \tag{3.5}$$

Raziščimo sedaj, pri katerem pogoju družina $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (3.5) določa nek morfizem $\Phi : E \to E'$ v (3.4). Konkretno nas zanima zveza med ϕ_α in ϕ_β na $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Prehodna preslikava med obema kartama na E v točkah $x \in U_{\alpha\beta}$ je

$$\theta_{\alpha\beta}(x,v) = (\theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1})(x,v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) v),$$

kjer je $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \mapsto GL_m(\mathbb{R})$ kocikel prehodnih preslikav. V paru sveženjskih kart θ_β (na E) in θ'_β (nad E') nad množico $U_\beta \subset X$ je morfizem Φ podan z

$$U_\beta \times \mathbb{R}^m \ni (x,v) \ \longmapsto \ (x, \phi_\beta(x) v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^{m'}.$$

V karti $U_\alpha \times \mathbb{R}^{m'}$ na E' to ustreza točki $(x, g'_{\alpha\beta}(x) \phi_\beta(x) v)$. (Operacije je seveda matrični produkt.)

Po drugi strani lahko točko $(x,v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^m$ najprej preslikamo s prehodno preslikavo $\theta_{\alpha\beta}$ v svežnju E v $(x, g_{\alpha\beta}(x)v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m$, nato pa to točko preslikamo s Φ_α v karto $U_\alpha \times \mathbb{R}^{m'}$ na svežnju E' in dobimo $(x, \phi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)v)$. Odtod sledi potreben in zadosten kompatibilitetni pogoj za obstoj morfizma $\Phi : E \to E'$ v (3.4):

$$g'_{\alpha\beta}(x)\phi_\beta(x) = \phi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x), \qquad x \in U_{\alpha\beta}. \tag{3.6}$$

S tem smo dokazali naslednjo trditev.

Trditev 3.7 *(Predpostavke kot zgoraj.) Družina funkcij $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Mat}^{m',m}$ $(\alpha \in A)$ določa morfizem $\Phi : E \to E'$ vektorskih svežnjev kot v naslednjem diagramu natanko tedaj, ko velja pogoj* (3.6) *za vsak par indeksov $\alpha, \beta \in A$.*

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^m \arrow[rr, "\Phi_\alpha(x,v)=(x,\phi_\alpha(x)v)"] & & U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^{m'} \\
E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"] \arrow[d, "\theta_\beta"'] \arrow[rr, "\Phi"] & & E'|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta'_\alpha"'] \arrow[d, "\theta'_\beta"] \\
U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^m \arrow[uu, bend left=60, "\theta_{\alpha\beta}"] \arrow[rr, "\Phi_\beta(x,v)=(x,\phi_\beta(x)v)"] & & U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^{m'} \arrow[uu, bend right=60, "\theta'_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Morfizem $\Phi : E \to E'$, podan z družino $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je izomorfizem natanko tedaj, ko je $m = m'$ in $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto GL_m(\mathbb{R})$ za vsak $\alpha \in A$. Njegov inverz $\Phi^{-1} : E' \to E$ je tedaj predstavljen z družino inverznih matrik $\{\phi_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in A}$. Ker je invertiranje matrik algebraična operacija, podana z racionalnimi funkcijami v njenih koeficientih, lahko zaključimo naslednje.

Trditev 3.8 *Če je $\Phi : E \to E'$ izomorfizem razreda $\mathscr{C}^r$ vektorskih svežnjev nad X, je inverzni izomorfizem $\Phi^{-1} : E' \to E$ ravno tako razreda $\mathscr{C}^r$.*

Iz (3.6) sledi naslednji kriterij za ekvivalenco dveh vektorskih svežnjev, ki sta podana s sveženjskima atlasoma nad istim pokritjem baze X.

Trditev 3.9 *Par 1-kociklov $g = (g_{\alpha\beta})$ in $g' = (g'_{\alpha\beta})$ razreda $\mathscr{C}^r$ na pokritju $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ baze X z vrednostmi v $GL_m(\mathbb{R})$ določa izomorfna vektorska svežnja ranga m nad X natanko tedaj, ko obstaja družina $\mathscr{C}^r$ preslikav $\phi_\alpha : U_\alpha \mapsto GL_m(\mathbb{R})$, tako da za vsak par indeksov velja*

$$g'_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \, g_{\alpha\beta} \, \phi_\beta^{-1}.$$

Družina ϕ_α se imenuje 0-*koveriga* na pokritju $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Zgornja operacija se označi z $g' = g \,\square\, \phi$ in se po angleško imenuje "twisting cocycle g by the cochain ϕ".

Sedaj definiramo prvo kohomološko grupo

$$H^1(\mathscr{U}, GL_m(\mathbb{R}))$$

kot množico ekvivalenčnih razredov 1-kociklov $g = (g_{\alpha\beta})$ na $\mathscr{U}$ z vrednostmi v $GL_m(\mathbb{R})$ po relaciji

$$g \sim g' \iff g' = g \square \phi \ \text{ za neko 0-koverigo } \phi.$$

Torej je $H^1(\mathscr{U}, GL_m(\mathbb{R}))$ množica izomorfnostnih razredov realnih vektorskih svežnjev ranga m nad X, ki so trivialni nad vsako množico $U_\alpha \in \mathscr{U}$. Imenuje se *prva Čechova kohomološka grupa na pokritju $\mathscr{U}$ s koeficienti v $GL_m(\mathbb{R})$*. Podobno je $H^1(\mathscr{U}, GL_m(\mathbb{C}))$ množica izomorfnostnih razredov kompleksnih vektorskih svežnjev ranga m nad X, ki so trivialni nad vsako množico $U_\alpha \in \mathscr{U}$.

Prva kohomološka grupa mnogoterosti X s koeficienti v $GL_m(\mathbb{C})$ je direktna limita

$$H^1(X, GL_m(\mathbb{R})) = \varinjlim_{\mathscr{U}} H^1(\mathscr{U}, GL_m(\mathbb{R})),$$

kjer opazujemo prehode na finejša pokritja. Tega pojma ne bomo natančneje definirali (glej literaturo iz kohomološke algebre).

Opomba Ker sta matrični grupi $GL_m(\mathbb{R})$ in $GL_m(\mathbb{C})$ nekomutativni za $m > 1$, množice $H^1(\mathscr{U}, GL_m(\mathbb{R}))$ in $H^1(X, GL_m(\mathbb{R}))$ (ter analogno za $\mathbb{C}$) niso zares grupe, razen pri $m = 1$ ko je $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beseda grupa se kljub temu uporablja po analogiji s kohomološkimi grupami s koeficienti v abelovi grupi.

Brez dokaza navajamo naslednji izrek.

Izrek 3.10 *Če je mnogoterost X kontraktibilna, potem je vsak vektorski sveženj $E \to X$ trivialen, torej izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^m$, $m = \operatorname{rang} E$.*

Splošnejši rezultat v tej smeri je naslednji; zgornji izrek dobimo v primeru, ko je $f_t : X \to X$ homotopija med $f_1 = \mathrm{Id}_X$ in konstantno preslikavo $f_0 : X \to \{p\} \subset X$.

Izrek 3.11 *Naj bo $E \to Y$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^r$ in naj bo $f_t : X \to Y$ ($t \in [0,1]$) homotopija $\mathscr{C}^r$ preslikav mnogoterosti X v Y. Tedaj so vektorski svežnji v družini $f_t^* E \to X$ ($t \in [0,1]$) paroma $\mathscr{C}^r$ izomorfni.*

Primer 3.12 $X = S^n = n$-sfera $= U^+ \cup U^-$, kjer sta $U^\pm$ odprti hemisferi, ki se prekrivata vzdolž ekvatorialnega pasu. Vsaka od množic $U^\pm$ je difeomorfna odprti n-krogli, torej tudi $\mathbb{R}^n$. Očitno je $U^+ \cap U^- \cong S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Naj bo $E \to X$ vektorski sveženj ranga m, $E|_{U^+} \cong U^+ \times \mathbb{R}^m$, $E|_{U^-} \cong U^- \times \mathbb{R}^m$. Sveženj E je določen s prehodno preslikavo

$$g : U^+ \cap U^- \cong S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_m(\mathbb{R}).$$

Dejansko je določen do izomorfizma natančno s homotopnim razredom preslikave $S^{n-1} \cong S^{n-1} \times \{0\} \to GL_m(\mathbb{R})$.

V primeru $n = m = 2$ dobimo preslikavo $S^1 \to GL_2(\mathbb{R})$. Homotopni razredi takih preslikav sestavljajo prvo fundamentalno grupo

$$\pi_1(GL_2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(O(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Vprašanje: kateremu številu pripada tangentni sveženj TS^2 sfere?
Brez dokaza navedimo naslednji izrek.

Izrek 3.13 *Tangetni sveženj sfere S^n je trivialen natanko tedaj, ko je $n \in \{1,3,7\}$.*

Po trditvi 3.5 je tangetni sveženj TX neke n-razsežne mnogoterosti trivialen natanko tedaj, ko obstaja n linearno neodvisnih vektorskih polj na X, ki napenjajo tangetni prostor T_xX v vsaki točki $x \in X$. Taka mnogoterost X se imenuje *paralelizabilna*.
To je očitno v primeru $n = 1$, saj je tangetni sveženj enotne krožnice $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ napet z vektorskim poljem $v = -y\partial_x + x\partial_y$.
Na enotni 3-sferi $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ dobimo tri po točkah neodvisna tangentna vektorska polja tako, da $\mathbb{R}^4$ identificiramo z algebro kvaternionov in radialno vektorsko polje na S^3 pomnožimo z imaginarnimi enotami. Podobno najdemo 7 linearno neodvisnih tangentnih vektorskih polj na S^7 s pomočjo strukture Caylejevih števil na $\mathbb{R}^8$.
Da je tangetni sveženj sfere S^n netrivialen v dimenzijah $n \notin \{1,3,7\}$ se dokaže s topološkimi metodami.

Primer 3.14 (Univerzalni sveženj) Naj bo $G_{k,n} = G_{k,n}(\mathbb{R})$ Grassmanova mnogoterost vseh k-dimenzionalnih realnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$. Nad njo definiramo vektorski sveženj

$$U_{k,n} = \big\{(\lambda, v) \in G_{k,n} \times \mathbb{R}^n : v \in \lambda\big\} \subset G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$$

$$\pi : U_{k,n} \to G_{k,n}, \quad \pi(\lambda, v) = \lambda.$$

Vlakno $U_{k,n}|_\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$ je torej k-razsežni vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^n$, ki ga določa element $\lambda \in G_{k,n}$ Grassmanove mnogoterosti. V kompleksnem primeru dobimo z analogno konstrukcijo holomorfen vektorski sveženj

$$\pi : U_{k,n}(\mathbb{C}) \to G_{k,n}(\mathbb{C}),$$

ki je holomorfen vektorski podsveženj trivialnega svežnja $G_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.
Poseben primer pri $k = 1$ sta univerzalna svežnja premic

$$U_{1,n+1}(\mathbb{R}) \to G_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{RP}^n, \qquad U_{1,n+1}(\mathbb{C}) \to G_{1,n+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{CP}^n$$

nad realnim oziroma kompleksnim projektivnim prostorom. Konkretno je

$$\begin{aligned} U_{1,n+1}(\mathbb{C}) &= \{([z_0 : \ldots : z_n], (v_0, \ldots, v_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : z_i v_j = z_j v_i \ 1 \le i, j \le n+1\} \\ &= \{[(z_0 : \ldots : z_n], (z_0, \ldots, z_n)) : (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}_*^{n+1}\} \cup (\text{ničelni prerez}). \end{aligned}$$

3.4 Podsvežnji, kvocientni svežnji, eksaktna zaporedja

Naj bo $E \to X$ vektorski sveženj ranga n nad X. Izberimo število $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definicija 3.15 *Podmnožica* $E' \subset E$ *je* vektorski podsveženj ranga m *svežnja* E*, če je za vsako točko* $x \in X$ *množica* E_x *k-razsežen vektorski podprostor v* E_x *in je* E' lokalno trivialen *v naslednjem smislu. Za vsako točko* $p \in X$ *obstajata okolica* $p \in U \subset X$ *in sveženjska karta* $\theta : E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$*, tako da velja*

$$\theta(E'|_U) = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad n = m + d. \tag{3.7}$$

Vsaka sveženjska karta na E, ki zadošča pogoju (3.7), se imenuje *izbrana sveženjska karta* glede na E'. Kolekcija vseh izbranih sveženjskih kart definira na E' strukturo vektorskega svežnja ranga m nad X.

Analogno definiramo pojem *kompleksnega vektorskega podsvežnja* v kompleksnem vektorskem svežnju. Če je $E \to X$ holomorfen vektorski sveženj nad kompleksno mnogoterostjo X in obstaja nabor holomorfnih sveženjskih kart $\theta : E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$ na odprtih podmnožicah $U \subset X$, ki zadoščajo pogoju (3.7) (kjer $\mathbb{R}$ nadomestimo s $\mathbb{C}$), potem je E' *holomorfen vektorski podsveženj* svežnja E.

Naloga 3.16 1. Pokaži, da je $U_{k,n}(\mathbb{R})$ realno analitičen vektorski podsveženj v $G_{k,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ in je $U_{k,n}(\mathbb{C})$ holomorfen vektorski podsveženj v $G_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.

2. Naj bo $E \to X$ vektorski sveženj in naj bodo $f_1, \dots, f_k : X \to E$ prerezi, tako da so za vsak $x \in X$ slike $f_1(x), \dots, f_k(x) \in E_x$ $\mathbb{R}$-linearno neodvisne. (V tem primeru pravimo, da so prerezi $f_1, \dots, f_k$ linearno neodvisni po točkah.) Dokaži, da je množica $E' \subset E$ z vlakni

$$E'_x = \mathrm{Lin}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\} = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x), \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$$

trivialen realen vektorski podsveženj svežnja E. Formuliraj in dokaži analogen rezultat za kompleksen primer.

3. Če je $E \to X$ kompleksen vektorski sveženj in $E' \subset E$ realen vektorski podsveženj, se E' imenuje *totalno realen podsveženj*, če za vsak $x \in X$ vlakno E_x ne vsebuje nobenega netrivialnega $\mathbb{C}$-linearnega podprostora. Pokaži, da v tem primeru E' enolično določa kompleksen vektorski podsveženj $E'^{\mathbb{C}}$, katerega vlakna so $\mathbb{C}$-linearni podprostori, napeti z vlakni podsvežnja E'.

Naj bo $E' \subset E$ vektorski podsveženj vektorskega svežnja E. **Kvocientni sveženj** E/E' je definiran kot

$$E/E' = \bigsqcup_{x \in X} E_x/E'_x.$$

Če je θ izbrana sveženjska karta na $E|_U$ glede na podsveženj E' (glej (3.7)), potem θ inducira bijekcijo

$$(E/E'|_U) \xrightarrow{\cong} U \times (\mathbb{R}^n/(\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)) \cong U \times \mathbb{R}^d.$$

Preslikavo $\tilde{\theta}$ vzamemo za sveženjsko karto na $E'' = E/E'$. Preveri, da tako dobimo sveženjski atlas na E''.

Zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev nad X

$$0 \longrightarrow E' \xhookrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\tau} E'' \longrightarrow 0,$$

kjer 0 označuje trivialni sveženj $X \times \{0\}$ ranga 0, se imenuje *kratko eksaktno zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev*, če je ι monomorfizem (injektiven), τ epimorfizem (surjektiven) in velja

$$\ker \tau = \operatorname{im} \iota.$$

Na vsakem vlaknu je $\tau_x : E_x \to E''_x$ surjektivna preslikava z jedrom $\ker \tau_x = \iota_x(E'_x)$, zato τ_x inducira izomorfizem $E_x/\iota_x(E'_x) \to E''_x$. Če bi vedeli, da je $\iota(E)$ vektorski podsveženj svežnja E, bi odtod lahko zaključili, da je E'' izomorfen kvocientnemu svev znju $E/\iota(E')$. To dejansko velja, kot nam v posebnem pove naslednji izrek.

Izrek 3.17 (Jedro in slika morfizma) *Naj bo $\Phi : E \to E'$ morfizem vektorskih svežnjev nad X. Če je rang linearne preslikave $\Phi_x : E_x \to E'_x$ neodvisen od točke $x \in X$, potem je jedro* $\ker \Phi$ *vektorski podsveženj svežnja E in je slika* $\operatorname{im} \Phi$ *vektorski podsveženj svežnja E'.*

V posebnem je slika vsakega injektivnega morfizma $\Phi : E \to E'$ vektorski podsveženj svežnja E' in je jedro vsakega surjektivega morfizma svežnjev $\Phi : E \to E'$ vektorski podsveženj svežnja E.

Obratno je očitno: Če sta jedro in slika morfizma $\Phi : E \to E'$ podsvežnja E oziroma E', potem ima morfizem konstanten rang na vlaknih.

Dokaz Izrek je lokalne narave, zato lahko vzamemo, da je X odprta okolica izhodišča v $\mathbb{R}^n$, ki jo smemo tekom dokaza po potrebi skrčiti okrog 0.

Označimo ranga svežnjev E in E' z m in m'. Če X zožimo okrog 0, lahko vzamemo, da je $E = X \times \mathbb{R}^m$, $E' = X \times \mathbb{R}^{m'}$ ter je morfizem Φ je oblike

$$(x, v) \mapsto (x, A(x)v), \quad v \in \mathbb{R}^m, \tag{3.8}$$

kjer je $A(x) \in M^{m' \times m} \cong \mathbb{R}^{mm'}$ matrika z m' vrsticami in m stolpci, ki je zvezno ali gladko odvisna od x.

Oglejmo si najprej poseben primer, ko je $m \leq m'$ in je $\operatorname{rang} A(x) = m$ za vsak x; torej je Φ monomorfizem. Jedro je trivialno, slika preslikave Φ_x pa je linearna lupina m stolpcev matrike $A(x)$.

Če je $m = m'$, je $A(x)$ neizrojena kvadratna matrika. Inverz Φ^{-1} je tedaj podan z

$$\Phi^{-1}(x, v) = (x, A(x)^{-1} v), \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

Recimo sedaj, da je $m < m'$ in je Φ monomorfizem. Jedro je trivialno, dokazati pa želimo, da je $\mathrm{im}\Phi$ vektorski podsveženj svežnja E'. Matriko $A(0)$ dopolnimo z $m' - m$ stolpci tako, da dobimo neizrojeno $m' \times m'$ matriko $B(0) = (A(0), B')$, kjer je desni blok B' dimenzije $m' \times (m' - m)$. Če X skrčimo okrog 0, je matrika $B(x) = (A(x), B')$ neizrojena za vsak $x \in X$ in preslikava

$$X \times \mathbb{R}^{m'} \ni (x, w) \overset{\Psi}{\longmapsto} (x, B^{-1}(x)w) \in X \times \mathbb{R}^{m'}$$

je avtomorfizem trivialnega svežnja $X \times \mathbb{R}^{m'}$. Očitno je

$$B(x)^{-1}A(x) = \begin{pmatrix} I^{m\times m} \\ 0^{m'-m} \end{pmatrix}$$

matrika z identiteto v zgornjem $m \times m$ bloku in ničlami drugod. Preslikava

$$X \times \mathbb{R}^{m} \ni (x, v) \overset{\Psi\circ\Phi}{\longmapsto} B(x)^{-1}A(x)v \in X \times \mathbb{R}^{m}$$

ima torej sliko enako $X \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{m'-m})$, kar je koordinatni podsveženj trivialnega svežnja $X \times \mathbb{R}^{m'}$. To pomeni, da je $\Phi(X \times \mathbb{R}^m)$ podsveženj svežnja $X \times \mathbb{R}^{m'}$.

Oglejmo si sedaj primer, ko je $m > m'$ in je Φ epimorfizem, torej je $A(x)$ ranga m' za vsak x. Želimo dokazati, da je jedro $\ker\Phi$ podsveženj. Matriko $A(x)$ dopolnimo do kvadratne $m \times m$ matrike

$$B(x) = \begin{pmatrix} A(x) \\ A' \end{pmatrix},$$

kjer je matrika A' dimenzije $(m - m') \times m$ izbrana tako, da je $B(0)$ neizrojena; zato je taka tudi $B(x)$ za vse x blizu 0. Očitno je

$$A(x)B(x)^{-1} = (I^{m'\times m'}, 0^{m'\times(m-m')}).$$

Jedro te matrike je koordinatni podprostor $\{0\}^{m'} \times \mathbb{R}^{m-m'}$, zato je

$$\ker A(x) = B(x)^{-1}\big(\{0\}^{m'} \times \mathbb{R}^{m-m'}\big).$$

Preslikava $\Theta(x, v) = (x, B(x)v)$ je avtomorfizem trivialnega svežnja in iz zgornje identitete sledi

$$\Theta(\ker\Phi) = X \times (\{0\}^{m'} \times \mathbb{R}^{m-m'}).$$

Torej je $\ker\Phi$ vektorski podsveženj vektorskega svežnja E.

Preostane še primer, ko Φ ni niti surjektiven niti injektiven. Ker je rang preslikave Φ_x konstanten, npr. enak $k \in \mathbb{N}$, lahko lokalno v okolici $U \subset X$ dane točke morfizem Φ (ki je sedaj oblike (3.8)) postkomponiramo s projekcijo $\tau : U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^k$ na primerno izbran trivialen podsveženj, tako da je $\tau \circ \Phi : E|_U \to U \times \mathbb{R}^k$ epimorfizem in je $\ker\Phi|_U = \ker(\tau\circ\Phi)|_U$. S tem smo problem prevedli na prejšnji primer. □

Posledica 3.18 *Naj bo $\Phi : E \to E'$ epimorfizem vektorskih svežnjev nad X. Če je $F' \subset E'$ vektorski podsveženj svežnja E', je njegova praslika $F = \Phi^{-1}(F')$ vektorski podsveženj svežnja E in velja* $\operatorname{rang} E - \operatorname{rang} F = \operatorname{rang} E' - \operatorname{rang} F'$.

Dokaz Naj bo $\Psi : E' \to E'/F'$ epimorfizem na kvocientni sveženj. Tedaj je kompozicija $\Psi \circ \Phi : E \to E'/F'$ epimorfizem in $F = \ker(\Psi \circ \Phi)$. Trditev torej sledi iz izreka 3.17. Zadnja formula sledi iz linearne algebre. □

Zaporedje morfizmov vektorskih svežnjev

$$\cdots \longrightarrow E_{k-1} \xrightarrow{\Phi_{k-1}} E_k \xrightarrow{\Phi_k} E_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

je *kompleks*, če so jedra $\ker \Phi_k \subset E_k$ in slike $\operatorname{im}\Phi_{k-1} \subset E_k$ podsvežnji in velja

$$\Phi_k \circ \Phi_{k-1} = 0 \iff \operatorname{im}\Phi_{k-1} = \ker \Phi_k \quad \text{za vsak } k.$$

Zaporedje se imenuje *eksaktno*, če velja

$$\ker \Phi_k = \operatorname{im}\Phi_{k-1} \quad \text{za vsak } k.$$

3.5 Direktna vsota vektorskih svežnjev

Naj bosta $\pi : E \to X$ in $\pi' : E' \to X$ vektorska svežnja ranga n oz. n'. Njuno direktno vsoto $E \oplus E'$ definiramo s predpisom

$$\begin{array}{c} E \oplus E' = \bigsqcup_{x \in X} E_x \oplus E'_x \ . \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

Torej je vsako vlakno $(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$ direktna vsota vlaken E_x in E'_x.
Izberimo pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ mnogoterosti X, na katerem je E podan z 1-kociklom $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{R})$ in je E' podan z 1-kociklom $g'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL_{n'}(\mathbb{R})$. Potem je $E \oplus E'$ podan na pokritju $\mathscr{U}$ z 1-kociklom

$$\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Odtod sledi, da je $E \oplus E'$ vektorski sveženj ranga $n + n'$, ki ima isti red gladkosti kot svežnja E in E'. Operacijo $\oplus$ lahko posplošimo na končno mnogo členov in pišemo

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k.$$

Primer je trivialni sveženj ranga n, $X \times \mathbb{R}^n = (X \times \mathbb{R}) \oplus (X \times \mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus (X \times \mathbb{R})$, ki je direktna vsota n kopij trivialnega svežnja ranga 1.

Notranja direktna vsota vektorskih podsvežnjev. Naj bosta $E', E'' \subset E$ komplementarna vektorska podsvežnja vektorskega svežnja $E \to X$, torej za vsak $x \in X$ velja

$$E'_x + E''_x = E_x \quad \text{in} \quad E'_x \cap E''_x = \{0\}.$$

Potem obstaja izomorfizem vektorskih svežnjev

$$E' \oplus E'' \xrightarrow{\cong} E, \qquad e'_x \oplus e''_x \mapsto e'_x + e''_x \in E_x.$$

Dobimo kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow E' \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{\tau} E'' \longrightarrow 0, \tag{3.9}$$

kjer je $E' \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} E$ inkluzija in $E \xrightarrow{\tau} E'' = E/E'$ kvocientna projekcija z jedrom E'.

Sedaj bomo dokazali naslednjo obratno trditev, ki pove, da je vsako kratko eksaktno zaporedje ekvivaletno takemu kot zgoraj, ki je porojen z interno direktno vsoto podsvežnjev danega svežnja E.

Trditev 3.19 *Za vsako kratko eksaktno zaporedje* (3.9) *morfizmov vektorskih svežnjev obstaja monomorfizem vektorskih svežnjev* $\psi : E'' \to E$*, ki zadošča pogoju*

$$\tau \circ \psi = \mathrm{Id}_{E''}. \tag{3.10}$$

Odtod sledi, da je $E \cong \iota(E') \oplus \psi(E'')$ *interna direktna vsota vektorskih posvežnjev* $\iota(E')$ *in* $\psi(E'')$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\psi"'] \arrow[dl] & 0 \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

V tem kontekstu pravimo, da je kratko eksaktno zaporedje *razcepno* in je morfizem ψ *razcep zaporedja*. Naslednja posledica je očitna.

Posledica 3.20 *Za vsak vektorski podsveženj* E' *vektorskega svežnja* E *obstaja komplementaren vektorski podsveženj* $E'' \subset E$*, tako da je* $E = E' \oplus E''$.

Dokaz trditve 3.19 Monomorfizem $\psi : E'' \to E$ konstruiramo s pomočjo particije enote na X. Injektivnost morfizma ψ je posledica lastnosti (3.10).

Naj bo E' ranga m in E ranga n. Po izreku 3.17 je $\iota(E')$ vektorski podsveženj ranga m svežnja E. Zato obstaja odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ mnogoterosti X s kartami $\phi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, tako da velja

$$\phi_\alpha(\iota(E')|_{U_\alpha}) = U_\alpha \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}).$$

Torej je ϕ_α izbrana sveženjska karta za podsveženj $\iota(E')$ svežnja E.
Naj bo $m+k=n$. Definiramo

$$F_\alpha := \phi_\alpha^{-1}\Big(U_\alpha \times \big(\{0\}^m \times \mathbb{R}^k\big)\Big) \subset E|_{U_\alpha}.$$

To je podsveženj svežnja $E|_{U_\alpha}$, za katerega velja

$$\iota(E')|_{U_\alpha} \oplus F_\alpha = E|_{U_\alpha}.$$

Zožitev $\tau : F_\alpha \xrightarrow{\cong} E''|_{U_\alpha}$ je očitno izomorfizem. Definiramo $\psi_\alpha := (\tau|_{F_\alpha})^{-1}$.
Sedaj izberemo particijo enote χ_α, podrejeno pokritju $\{U_\alpha\}$:

$$\chi_\alpha : X \to [0,1], \quad \operatorname{supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha, \quad \sum_\alpha \chi_\alpha = 1.$$

Definiramo preslikavo $\psi : E'' \to E$ s predpisom

$$\psi = \sum_\alpha \chi_\alpha \psi_\alpha, \qquad \psi(e''_x) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(e''_x) \quad (e''_x \in E''_x,\ x \in X).$$

Ker je na vsakem vlaknu ψ linearna kombinacija linearnih preslikav, je linearna. Poleg tega je $\tau \circ \psi = \sum_\alpha \chi_\alpha \cdot \tau \circ \psi_\alpha = \mathrm{Id}_{E''}$. $\square$

Opišimo še alternativen dokaz trditve 3.19, ki sledi z uporabo naslednje trditve o obstoju polja skalarnih produktov na vektorskem svežnju.

Trditev 3.21 *Na vsakem vektorskem svežnju $E \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$ obstaja polje skalarnih produktov*

$$E_x \times E_x \xrightarrow{g_x} \mathbb{R}, \quad (v,w) \longmapsto g_x(v,w)$$

na vlaknih E_x, ki je razreda $\mathscr{C}^r$ v odvisnosti od bazne točke $x \in X$.

Dokaz V lokalni karti $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo standardni evklidski skalarni produkt g_α. Polje skalarnih produktov na vsem svežnju E definiramo s predpisom

$$g = \sum_\alpha \chi_\alpha g_\alpha,$$

kjer je $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ particija enote z $\operatorname{supp}(\chi_\alpha) \subset U_\alpha$. $\square$

V kontekstu trditve 3.19 naj bo $F \subset E$ ortogonalni komplement vektorskega podsvežnja $\iota(E') \subset E$, torej je $E = \iota(E') \oplus F$. Zožitev $\tau|_F : F \to E''$ je tedaj izomorfizem vektorskih svežnjev. Njen inverz $\psi = (\tau|_F)^{-1} : E'' \to F \subset E$ je izomorfizem E'' na F in $\tau \circ \psi = \mathrm{Id}|_{E''}$. Trditev 3.19 sledi.

3.6 Dualni sveženj vektorskega svežnja

Če je V vektorski prostor dimenzije $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$, je njegov dual V^* vektorski prostor iste dimenzije, katerega elementi so $\mathbb{R}$-linearni oz. $\mathbb{C}$-linearni funkcionali $V \to \mathbb{R}$ oz. $V \to \mathbb{C}$. Vrednost funkcionala $\lambda \in V^*$ na vektorju $v \in V$ označimo z

$$\lambda(v) = \langle \lambda, v \rangle.$$

Linearni preslikavi $L : V \to W$ pripada dualna linearna preslikava $L^* : W^* \to V^*$, podana s predpisom

$$\langle L^* \lambda, v \rangle = \langle \lambda, Lv \rangle, \quad v \in V,\ \lambda \in W^*.$$

Bazi $e_1, \ldots, e_n \in V$ pripada dualna baza $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$, določena s pogojem

$$\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{(Kroneckerjev delta)}.$$

Če ima linearna preslikava $L : V \to W$ v danem paru baz $\{e_1, \ldots, e_n\}$ na V in $\{f_1, \ldots, f_m\}$ na W matriko $A = (a_{i,j})$ $(i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1, \ldots, n)$), ima dualna preslikava $L^* : W^* \to V^*$ v paru dualnih baz $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ na V in $\{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$ na W matriko $A^T = (a_{j,i})$, to je transponirano matriko matrike A.
Za kompozicijo linearnih preslikav velja

$$(L_2 \circ L_1)^* = L_1^* \circ L_2^*.$$

Če je $L : V \to W$ izomorfizem, torej velja $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.
Iz povedanega sledi, da je prireditev $V \mapsto V^*$, $L \mapsto L^*$ *kontravarianten funktor* na kategoriji *Vec* končno razsežnih vektorskih prostorov.
Operacijo $V \mapsto V^*$ zlahka posplošimo na vektorske svežnje $E \to X$ s predpisom

$$E^* = \bigsqcup_{x \in X} E_x^* \longrightarrow X.$$

Morfizmu svežnjev $\Phi : E \to F$ priredimo dualni morfizem $\Phi^* : F^* \to E^*$, tako da je $\Phi_x^* : F_x^* \to E_x^*$ dual linearne preslikave $\Phi_x : E_x \to F_x$.
Če je (U_α) odprto pokritje X in je $\theta_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ sveženjski atlas na E, je

$$\theta_\alpha^* : U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^* \to E^*|_{U_\alpha}$$

dualni izomorfizem (na vsakem vlaknu vzamemo dualno prelikavo). Njegov inverz

$$\vartheta_\alpha = (\theta_\alpha^*)^{-1} : E^*|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^* \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

je sveženjska karta na E^*. Prehodna preslikava med paroma takih kart je

$$\vartheta_{\alpha,\beta} = \vartheta_\alpha \circ (\vartheta_\beta)^{-1} = (\theta_\alpha^*)^{-1} \circ \theta_\beta^* = (\theta_\beta \circ \theta_\alpha^{-1})^* = \theta_{\beta,\alpha}^* = (\theta_{\alpha,\beta}^{-1})^*. \tag{3.11}$$

Primer 3.22 (Kotangetni sveženj) Če je X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$, se dual njenega tangetnega svežnja TX imenuje *kotangetni sveženj*:

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^* X.$$

Za vsako točko $x \in X$ je $T_x^*X = (T_xX)^*$ *kotangetni prostor* mnogoterosti X v x, to je dual tangetnega prostora T_xX; njegovi elementi so *tangentni kovektorji* v x. Prerezi $X \to T^*X$ kotangetnega svežnja se imenujejo *diferencialne* 1*-forme* na X.

Na prostoru $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$ so $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ za $i = 1, \ldots, n$ bazna vektorska polja, ki v vsaki točki $x \in \mathbb{R}^n$ sestavljajo standardno bazo tangentnega prostora $T_x\mathbb{R}^n$. Dualna bazna polja kotangetnega svežnja $T^*\mathbb{R}^n$ so 1-forme $dx_1, \ldots, dx_n$, torej diferenciali koordinatnih funkcij. Dejansko:

$$\langle dx_i, \partial_{x_j} \rangle = \partial_{x_j}(x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}.$$

Vsako 1-formo α na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ lahko enolično predstavimo v obliki

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i,$$

kjer so funkcije $a_i : U \to \mathbb{R}$ koeficienti 1-forme α.

Naj bo $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : U \to U' \subset X$ lokalna karta na mnogoterosti X. Če z $e_1, \ldots, e_n$ označimo prirejena koordinatna vektorska polja na U, ki zadoščajo $\phi_* e_i = \partial_{x_i}$, potem so diferenciali $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ dualna bazna polja $T^*X|_U$, torej $\langle d\phi_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$. Vsaka 1-forma na U je enaka $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(d\phi_i)_x$.

Če sta $\phi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ in $\phi_\beta : U_\beta \to U'_\beta \subset \mathbb{R}^n$ karti na X in $\theta_\alpha : TU_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, $\theta_\beta : TU_\beta \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$ prirejeni sveženjski karti na tangentnem svežnju, je prehodna preslikava med njima podana z

$$\theta_{\alpha,\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha,\beta}(x)v\big), \quad x \in U_{\alpha,\beta},\ v \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je $g_{\alpha,\beta}(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ matrika diferenciala $d\phi_{\alpha,\beta}(\phi_\beta(x))$ prehodne preslikave $\phi_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ v točki $\phi_\beta(x) \in \mathbb{R}^n$. Iz (3.11) vidimo, da je prehodna preslikava med dualnima sveženjskima kartama $\theta_\alpha : T^*U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ in $\theta_\beta : T^*U_\beta \to U_\beta \times \mathbb{R}^n$ enaka

$$\vartheta_{\alpha,\beta}(x, v) = \theta^*_{\beta,\alpha}(x, v) = (x, g_{\beta,\alpha}(x)^T v). \tag{3.12}$$

Več o diferencialnih formah bomo povedali v poglavju 6.

3.7 Osnove multilinearne algebre

V tem razdelku obravnavamo pojem tenzorskega in vnanjega produkta končno razsežnih realnih ali kompleksnih vektorskih prostorov in njihove osnovne lastnosti, ki jih bomo potrebovali v poglavjih 6 in 7.

Tenzorski produkt. Naj bosta V in W vektorska prostora. Njun tenzorski produkt je vektorski prostor
$$V \otimes W = F(V \times V)/I,$$
kjer je $F(V \times W)$ prost vektorski prostor na vektorjih $(v,w) \in V \times W$ in je I vektorski podprostor $F(V \times V)$, generiran z vsemi elementi naslednje oblike, kjer je a skalar:

$$\begin{aligned}
&(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)\\
&(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)\\
&(av,w)-a(v,w), \qquad (v,aw)-a(v,w).
\end{aligned}$$

Ekvivalenčni razred elementa $(v,w) \in V \times W$ označimo z $v \otimes w \in V \otimes W$. Iz definicije sledijo naslednje lastnosti produkta $\otimes$:

$$\begin{aligned}
&(v_1+v_2)\otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w,\\
&v \otimes (w_1+w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2,\\
&(av)\otimes w = v \otimes (aw) = a \cdot v \otimes w.
\end{aligned}$$

Z eno besedo, preslikava

$$\phi : V \times W \to V \otimes W, \qquad \phi(v,w) = v \otimes w \tag{3.13}$$

je bilinearna. V posebnem, če je V enorazsežen prostor (torej izomorfen baznemu obsegu), je $V \otimes W \cong W$ za poljuben vektorski prostor W.

Lastnosti tenzorskega produkta. Naj bodo U, V, W vektorski prostori.

(a) Univerzalna lastnost: za vsako bilinearno preslikavo $\lambda : V \times W \to U$ obstaja natanko ena linearna preslikava $\tilde{\lambda} : V \otimes W \to U$, tako da je $\lambda = \tilde{\lambda} \circ \phi$. To pomeni, da naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\phi"'] & U \\
V \otimes W \arrow[ur, "\tilde{\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

Torej je bilinearna preslikava $\phi : V \times W \to V \otimes W$ (3.13) univerzalni začetni element v kategoriji bilinearnih preslikav produkta $V \times W$ v vektorske prostore.

(b) Če je $e_1, \ldots, e_n$ baza vektorskega prostora V in je $e'_1, \ldots, e'_m$ baza vektorskega prostora W, potem je množica

$$e_i \otimes e'_j, \quad 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq m$$

baza prostora $V \otimes W$. Torej je $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

(c) Preslikava $V \otimes W \to W \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ je linearni izomorfizem.

(d) Asociativnost: $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

(e) Naj bo V^* dual prostora V. Linearna preslikava

$$\alpha : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V,W), \qquad \alpha(v^* \otimes w)(v) = \langle v^*, v \rangle w \quad (v \in V)$$

je izomorfizem $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V,W)$. (Tu je $\langle v^*, v \rangle$ vrednost funkcionala $v^* \in V^*$ na vektorju $v \in V$.) Če je $e_1, \dots, e_n$ baza vektorskega prostora V, $e_1^*, \dots, e_n^*$ dualna baza dualnega prostora V^* in $e'_1, \dots, e'_m$ baza vektorskega prostora W, potem element $e_i^* \otimes e'_j$ določa linearno preslikavo $V \to W$, ki ji v danem paru baz pripada matrika z elementom 1 na mestu (j,i) ter 0 na drugih mestih.

Tenzorska algebra vektorskega prostora. Naj bo V vektorski prostor. Njegova r-ta *tenzorska potenca* za $r \in \mathbb{Z}_+$ je vektorski prostor

$$V^{\otimes r} = \overbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}^{r}.$$

Pri tem je po dogovoru $V^{\otimes 0}$ osnovni obseg ($\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) in $V^{\otimes 1} = V$. *Kovariantna tenzorska algebra* prostora V je direktna vsota njegovih tenzorskih potenc:

$$\mathscr{T}(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} V^{\otimes r}. \tag{3.14}$$

Kontravariantna tenzorska algebra prostora V je kovariantna tenzorska algebra njegovega duala: $\mathscr{T}^*(V) = \mathscr{T}(V^*)$. Splošneje definiramo polno *tenzorsko algebro*

$$\widetilde{\mathscr{T}}(V) = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}. \tag{3.15}$$

Elementi prostora $V^{r,s} = V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ se imenuje r-kovariantni in s-kontravariantni tenzorji. Na primer, $V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V,V)$ je prostor vseh linearnih preslikav $V \to V$ (glej točko (d) zgoraj).

Kovariantna tenzorska algebra $\mathscr{T}(V)$ (3.14) je (neskončno razsežen) vektorski prostor in algebra z gradacijo za tenzorski produkt $V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \xrightarrow{\otimes} V^{\otimes (r+s)}$. Podobno je tenzorska algebra $\widetilde{\mathscr{T}}(V)$ (3.15) vektorski prostor in algebra z dvojno gradacijo.

Sedaj bomo pokazali, da je za vsak $r \in \mathbb{N}$ tenzorska potenca $(V^*)^{\otimes r}$ dualnega prostora V^* dual tenzorske potence $V^{\otimes r}$. V ta namen potrebujemo naslednjo trditev.

Trditev 3.23 *Naj bosta V,W končno razsežna vektorska prostora. Vsaka neizrojena bilinearna preslikava $\phi : V \times W \to \mathbb{R}$ (ali $\phi : V \times W \to \mathbb{C}$) inducira izomorfizma $\lambda : V \xrightarrow{\cong} W^*$ in $\tilde{\lambda} : W \xrightarrow{\cong} V^*$.*

Dokaz Za fiksen $v \in V$ definiramo linearen funkcional $\lambda(v) = \phi(v,\cdot) : W \to \mathbb{R}$, torej element dualnega prostora W^*, s predpisom

$$\lambda(v)(w) = \phi(v,w), \quad w \in W.$$

Ker je ϕ bilinearna, je $V \ni v \mapsto \lambda(v) \in W^*$ linearna preslikava. Če je $v \neq 0$, zaradi neizrojenosti ϕ obstaja vektor $w \in W$, tako da je $\lambda(v)(w) = \phi(v,w) \neq 0$. To pomeni, da je $0 \neq \lambda(v) \in W^*$. Odtod sledi, da je $V \ni v \mapsto \lambda(v) \in W^*$ injektivna linearna preslikava in $\dim V \leq \dim W^* = \dim W$. S simetričnim argumentom dobimo injektivno linearno preslikavo $W \ni w \mapsto \phi(\cdot,w) \in V^*$ in zato $\dim W \leq \dim V^* = \dim V$. Odtod sledi, da so dimenzije enake in sta obe preslikavi izomorfizma.

Trditev 3.24 *Naj bo V vektorski prostor. Za vsak par števil $r,s \in \mathbb{Z}_+$ obstaja naraven izomorfizem $(V^{r,s})^* \cong (V^*)^{s,r}$ (glej* (3.15)*). V posebnem je*

$$(V^{\otimes r})^* \cong (V^*)^{\otimes r}. \tag{3.16}$$

Dokaz Dokažimo (3.16); dokaz za splošen primer je podoben. Naj bo $e_1,\ldots,e_n$ baza prostora V in $e_1^*,\ldots,e_n^*$ dualna baza dualnega prostora V^*. Bazo tenzorske potence $V^{\otimes r}$ sestavljajo vektorji

$$e_I = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r},$$

kjer je $I = (i_1,\ldots,i_r) \in \{1,\ldots,n\}^r$ poljuben multiindeks dolžine r. Analogno so vektorji

$$e_J^* = e_{j_1}^* \otimes e_{j_2}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_r}^*$$

za multiindekse J dolžine r baza tenzorske potence $(V^*)^{\otimes r}$. Oba prostora imata dimenzijo n^r. Parjenje $(V^*)^{\otimes r} \times V^{\otimes r} \to \mathbb{R}$ med njima definiramo na zgornjem paru baz s predpisom

$$\langle e_J^*, e_I \rangle = \delta_{I,J} = \prod_{k=1}^{r} \delta_{i_k,j_k}.$$

Torej ima e_J^* vrednost 1 na e_J in vrednost 0 na ostalih baznih vektorjih prostora $V^{\otimes r}$. Parjenje razširimo po bilinearnosti. Očitno je neizrojeno, saj ima poljuben vektor $\sum_J a_J e_J^* \neq 0$ z $a_J \neq 0$ neničelno vrednost na baznem vektorju e_J in obratno. To parjenje inducira izomorfizem (3.16) po trditvi 3.23.

Opomba 3.25 Iz univerzalne lastnosti tenzorskega produkta sledi, da je $(V^{\otimes r})^*$ vektorski prostor $L_r(V,\mathbb{R})$ (oz. $L_r(V,\mathbb{C})$) vseh r-multilinearnih funkcionalov $V^r \to \mathbb{R}$ oz. $V^r \to \mathbb{C}$ z vrednostmi v baznem obsegu. Po trditvi 3.24 je ta prostor naravno izomorfen r-ti tenzorski potenci $(V^*)^{\otimes r}$ dualnega prostora V^*.

Vnanja algebra. Naj bo V vektorski prostor in $\mathscr{T}(V)$ njegova kovariantna tenzorska algebra (3.14). Naj bo $I(V) \subset \mathscr{T}(V)$ dvostranski ideal (torej tudi vektorski podprostor), generiran s tenzorji $v \otimes v$, $v \in V$. Tedaj je $I(V) = \oplus_{r=0}^{\infty} I_r(V)$, kjer je $I_r(V) = I(V) \cap V^{\otimes r}$. Sedaj definiramo *$r$-to vnanjo potenco $\Lambda^r(V)$* in *vnanjo algebro*:

$$\Lambda^r(V) = V^{\otimes r}/I_r(V), \qquad \Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V) = \mathscr{T}(V)/I(V). \tag{3.17}$$

Produkt na $\Lambda(V)$ je podedovan iz tenzorskega produkta:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r = [v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r] \in V^{\otimes r}/I_r(V).$$

Za vsak $r \in \mathbb{Z}_+$ označimo s ϕ preslikavo

$$\phi : V^r = \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{r} \to \Lambda^r(V), \qquad \phi(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r. \tag{3.18}$$

Definicija 3.26 *Multilinearna preslikava $\lambda : V^r \to W$ je* alternirajoča*, če velja*

$$\lambda\left(v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(r)}\right) = (-1)^{\operatorname{sign}\pi} \lambda\left(v_1, v_2, \ldots, v_r\right)$$

za poljubne vektorje $v_1, \ldots, v_r \in V$ in permutacijo π na $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Ker je vsaka permutacija produkt transpozicij sosednjih elementov, je multilinearna preslikava λ alternirajoča natanko tedaj, ko spremeni znak pri transpoziciji dveh sosednjih elementov:

$$\lambda(\cdots, u, v, \cdots) = -\lambda(\cdots, v, u, \cdots). \tag{3.19}$$

Ekvivalentno, $\lambda(\cdots, u, u, \cdots) = 0$ za vsak $u \in V$. Če slednjo lastnost uporabimo za vektorje u, v in $u + v$, dobimo (3.19).

Iz lastnosti tenzorskega produkta in definicije ideala $I(V)$ sledijo naslednje lastnosti.

Lastnosti vnanjega produkta. Naj bosta V in W vektorska prostora.

(a) Univerzalna lastnost: Preslikava (3.18) je alternirajoča multilinearna. Za vsako alternirajočo multilinearno preslikavo $\lambda : V^r \to W$ obstaja natanko ena linearna preslikava $\tilde{\lambda} : \Lambda^r(V) \to W$, tako da je $\lambda = \tilde{\lambda} \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\phi"'] & W \\ \Lambda^r(V) \arrow[ur, "\tilde{\lambda}"'] & \end{tikzcd}$$

Torej je preslikava $\phi : V^r \to \Lambda^r(V)$ (3.18) univerzalni začetni element v kategoriji alternirajočih r-multilinearnih preslikav $V^r \to W$ v vektorske prostore. Če je W bazni obseg, sledi, da je dual $\Lambda^r(V)^*$ naravno izomorfen vektorskemu prostoru alternirajočih r-multilinearnih funkcionalov na V.

(b) Naj bo $e_1, \ldots, e_n$ baza prostora V. Bazo potence $\Lambda^r(V)$ sestavljajo vektorji

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}, \tag{3.20}$$

kjer je $I = (i_1,\dots,i_r)$ poljuben urejen multiindeks $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$ dolžine r. V primeru $r = n$ je en sam bazni vektor $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$. Torej je

$$\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{k}, \qquad \Lambda^r(V) = \{0\} \text{ za } r > \dim V.$$

(c) Obstaja naravni izomorfizem

$$\Lambda^r(V)^* \cong \Lambda^r(V^*) \tag{3.21}$$

induciran z neizrojenim alternirajočim r-multilinearnim parjenjem $\Lambda^r(V^*) \times \Lambda^r(V) \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle v_1^* \wedge \cdots \wedge v_r^*, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \right\rangle = \det\bigl(\langle v_i^*, v_j \rangle\bigr).$$

Če je $e_1,\dots,e_n$ baza prostora V in $e_1^*,\dots,e_n^*$ dualna baza dualnega prostora V^*, je to parjenje podano na paru baz (3.20) prostorov $\Lambda^r(V^*)$ in $\Lambda^r(V)$ s predpisom

$$\langle e_J^*, e_I \rangle = \delta_{I,J}.$$

Torej ima e_J^* vrednost 1 na e_J in vrednost 0 na ostalih baznih vektorjih v $\Lambda^r(V)$.

Simetrični in alternirajoči bilinearni funkcionali na vektorskem prostoru. Naj bo V vektorski prostor. Prostor $L_2(V,\mathbb{R})$ vseh bilineranih funkcionalov $V \times V \to \mathbb{R}$ je po univerzalni lastnosti tenzorskega produkta izomorfen prostoru $(V \otimes V)^* = V^* \otimes V^*$. Vsak element tega prostora lahko zapišemo v obliki $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} e_i^* \otimes e_j^*$, kjer je $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ in je $e_1^*,\dots,e_n^*$ baza duala V^*. Očitno je

$$e_i^* \otimes e_j^* = \frac{1}{2}(e_i^* \otimes e_j^* + e_j^* \otimes e_i^*) + \frac{1}{2}(e_i^* \otimes e_j^* - e_j^* \otimes e_i^*).$$

Prvi sumand na desni je simetričen bilinearen funkcional, drugi sumand pa alternirajoč bilinearen funkcional. To vodi v analogen razcep matrike $A = (a_{i,j})$:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right),$$

kjer je prva matrika simetrična in druga antisimetrična. Prav tako dobimo razcep

$$(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^* = L_2^{\mathrm{sim}}(V,\mathbb{R}) \oplus L_2^{\mathrm{alt}}(V,\mathbb{R})$$

na direktno vsoto prostora $L_2^{\mathrm{sim}}(V,\mathbb{R})$ simetričnih bilinearnih funkcionalov in prostora $L_2^{\mathrm{alt}}(V,\mathbb{R})$ alternirajočih bilinearnih funkcionalov.

Opomba 3.27 Vektor $e_i^* \otimes e_j^* - e_j^* \otimes e_i^* \in V^* \otimes V^*$ ima na vsakem paru vektorjev $(v,w) \in V \times V$ isto vrednost kot $e_i^* \wedge e_j^* \in \Lambda^2(V^*)$, zato ju pogosto identificiramo. Isto velja za vsak tenzor oblike $v^* \otimes w^* - w^* \otimes v^* \in V^* \otimes V^*$, ki ga lahko identificiramo z $v^* \wedge w^* \in \Lambda^2(V^*)$.

Skalarni produkti na vektorskem prostoru. Vsak pozitivno definiten element prostora $L_2^{\mathrm{sim}}(V,\mathbb{R})$, torej tenzor $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}e_i^*\otimes e_j^*$ s simetrično pozitivno definitno matriko koeficientov $A=(a_{i,j})$, definira skalarni produkt na prostoru V:

$$\Big\langle \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}e_i^*\otimes e_j^*, v\otimes w\Big\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}v_iv_j,$$

kjer je $v_i=\langle e_i^*,v\rangle$. Če je $e_1,\dots,e_n$ baza prostora V, dualna bazi $e_1^*,\dots,e_n^*$ duala V^*, potem je $v=\sum_{i=1}^n v_ie_i=\sum_{i=1}^n\langle e_i^*,v\rangle e_i$.
Obratno, vsak skalarni produkt na V je predstavljen z nekim pozitivno definitnim elementom prostora $L_2^{\mathrm{sim}}(V,\mathbb{R})\subset V^*\otimes V^*$.

Funktorialnost tenzorskih in vnanjih produktov. Linearni preslikavi $\ell:V\to W$ vektorskih prostorov priredimo linearne preslikave

$$\ell^{\otimes r}:V^{\otimes r}\to W^{\otimes r},\qquad \Lambda^r(\ell):\Lambda^r(V)\to\Lambda^r(W)$$

njihovih tenzorskih in vnanjih potenc s predpisoma

$$\begin{aligned}\ell^{\otimes r}(v_1\otimes\cdots\otimes v_r) &= (\ell v_1)\otimes\cdots\otimes(\ell v_r),\\ \Lambda^r(\ell)(v_1\wedge\cdots\wedge v_r) &= (\ell v_1)\wedge\cdots\wedge(\ell v_r),\end{aligned}$$

ki ju razširimo na vse tenzorje po linearnosti. Zlahka preverimo, da so v vsakem paru baz na prostorih V in W (ter prirejenih baz tenzorskih in vnanjih potenc) koeficienti matrik preslikav $\ell^{\otimes r}$ in $\Lambda^r(\ell)$ homogeni polinomi stopnje r v koeficientih matrike osnovne preslikave $\ell:V\to W$. V primeru, ko je $V=W=\mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$, torej bazni obseg) in je $\ell(v)=av$ za konstanto a, je $\ell^{\otimes r}$ podana s konstanto a^r.

Primer 3.28 Naj bo $\ell:V\to V$ linearna preslikava, ki ima v neki bazi $e_1,\dots,e_n$ prostora V matriko $A=(a_{i,j})$. Eksplicitni račun pokaže, da so koeficienti matrik vnanjih potenc $\Lambda^r(\ell)$ deteminante $r\times r$ minorjev matrike A.
V primeru $n=r$ je $\Lambda^n(V)$ enorazsežni prostor z bazo $e=e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$ in je

$$\Lambda^n(\ell)(e)=(\ell e_1)\wedge(\ell e_2)\wedge\cdots\wedge(\ell e_n)=\det A\cdot e. \tag{3.22}$$

To lahko vidimo z naslednjim razmislekom. Člene v produktu na levi dobimo tako, da v vsakem izrazu $\ell e_j=\sum_{j=1}^n a_{i,j}e_i$ izberemo po en sumand $a_{i,j}e_i$ in jih klinasto zmnožimo. Neničeln rezultat lahko dobimo le v primeru, ko so izbrani indeksi $i=i(j)$ paroma disjunktni, torej dobljeni s permutacijo indeksov $1,2,\dots,n$. Pri preureditvi vektorjev v dobljenem produktu v naraven vrstni red dobimo znak permutacije π. To pa je ravno pravilo za izračun determinante matrike. $\square$

Primer 3.29 (Tenzorske potence enorazsežnega prostora) Če je V enorazsežni prostor z baznim vektorjem e in je $\ell:V\to V$ podana z $\ell(e)=ae$, kje je a skalar, potem je r-ta tenzorska potenca $V^{\otimes r}$ ravno tako enorazsežni prostor in preslikava $\ell^{\otimes r}:V^{\otimes r}\to V^{\otimes r}$ je podana z $\ell^{\otimes r}(e)=a^re$. V primeru ko je $a\neq 0$, torej je ℓ

izomorfizem, je dualna preslikava ℓ^* v dualni bazi e^* podana z $\ell^*(e^*) = a^{-1}e^*$. V tem primeru definiramo tenzorsko potenco z negativnim eksponentom kot

$$V^{\otimes(-r)} = (V^*)^{\otimes r}, \qquad V^{-1} = V^*.$$

Zaradi tega pogosto identificiramo dual V^* z inverzom V^{-1}, še posebno pri aplikaciji te operacije na vektorske svežnje premic (torej svežnje ranga 1), o čemer bomo nekoliko več povedali v naslednjem razdelku. $\square$

Kompoziciji linearnih preslikav $\ell_1 : V \to W$ in $\ell_2 : W \to U$ pripadata kompoziciji

$$(\ell_2 \circ \ell_1)^{\otimes r} = \ell_2^{\otimes r} \circ \ell_1^{\otimes r}, \qquad \Lambda^r(\ell_2 \circ \ell_1) = \Lambda^r(\ell_2) \circ \Lambda^r(\ell_1).$$

Odtod sledi, da so tenzorske in vnanje potence ter algebre kovariantni funktorji na kategoriji končno razsežnih vektorskih prostorov.

Poleg tega veljajo naslednje dualnostne relacije, ki sledijo neposredno iz definicij in dualnostnih parjenj, ki smo jih opisali:

$$(\ell^{\otimes r})^* = (\ell^*)^{\otimes r}, \qquad \Lambda^r(\ell)^* = \Lambda^r(\ell^*). \tag{3.23}$$

3.8 Tenzorski in vnanji produkti vektorskih svežnjev

Operacije multilinearne algebre, ki smo jih spoznali v prejšnjem razdelku, lahko prenesemo na vektorske svežnje z njihovo uporabo na vlaknih, podobno kot smo to storili pri direktni vsoti v razdelku 3.5. Konkretno, če sta $E \to X$ in $E' \to X$ vektorska svežnja ranga m in m', je njun tenzorski produkt

$$E \otimes E' \to X, \qquad (E \otimes E')_x = E_x \otimes E'_x \quad (x \in X)$$

vektorski sveženj ranga mm'. Če sta svežnja E in E' predstavljena na nekem odprtem pokritju $\mathscr{U} = \{U_i\}$ baze X s sveženjskima atlasoma s prehodnimi preslikavami $f_{i,j} : U_{i,j} \to GL_m(\mathbb{R})$ in $f'_{i,j} : U_{i,j} \to GL_{m'}(\mathbb{R})$, potem je $E \otimes E'$ podan na istem pokritju z atlasom, ki ima prehodne preslikave

$$f_{i,j} \otimes f'_{i,j} : U_{i,j} \to GL_{mm'}(\mathbb{R}), \qquad (f_{i,j} \otimes f'_{i,j})(x) = f_{i,j}(x) \otimes f'_{i,j}(x).$$

V prejšnjem razdelku smo videli, da so elementi matrike tenzorskega produkta dveh linearnih preslikav homogeni kvadratični polinomi v koeficientih matrik posameznih preslikav. Zato je tako dobljeni sveženjski atlas na svežnju $E \otimes E'$ istega reda gladkosti kot prvotna dva atlasa. V primeru kompleksnih ali holomorfnih vektorskih svežnjev velja isti sklep nad obsegom $\mathbb{C}$, torej je tenzorski produkt spet kompleksen oziroma holomorfen vektorski sveženj.

Na enak način definiramo tenzorske in vnanje potence vektorskega svežnja:

$$E^{\otimes r} = \bigcup_{x \in X} E_x^{\otimes r}, \qquad \Lambda^r(E) = \bigcup_{x \in X} \Lambda^r(E_x), \qquad \Lambda(E) = \bigoplus_{r=0}^{\operatorname{rang} E} \Lambda^r(E).$$

Prehodne preslikave med sveženjskimi kartami so homogene polinomske funkcije stopnje r v prehodnih preslikavah osnovnega svežnja E, zato se red gladkosti ohranja. Seveda lahko uvedemo analogne operacije na dualnem svežnju $E^* \to X$. Iz dualnosti (3.16), (3.21) in (3.23) sledijo ustrezne dualnosti na svežnjih:

$$(E^*)^{\otimes r} \cong (E^{\otimes r})^*, \qquad \Lambda^r(E^*) \cong \Lambda^r(E)^*. \tag{3.24}$$

Opisane konstrukcije lahko posplošimo na poljuben funktor $\mathscr{F}$ na kategoriji končno razsežnih vektorskih prostorov, ki je *gladek* v smislu, da je linearna preslikava $\mathscr{F}(\ell) : \mathscr{F}(E) \to \mathscr{F}(E')$ gladko odvisna od linearne preslikave $\ell : E \to E'$ med vektorskima prostoroma. V poljubnem paru baz govorimo o gladki odvisnosti matrike $\mathscr{F}(\ell)$ of matrike ℓ. Za vektorski sveženj $E \to X$ definiramo

$$\mathscr{F}(E) \;=\; \bigcup_{x \in X} \mathscr{F}(E_x).$$

Če je $\Phi : E \to E'$ morfizem vektorskih svežnjev ter je funktor $\mathscr{F}$ kovarianten, definiramo morfizem

$$\mathscr{F}(\Phi) : \mathscr{F}(E) \to \mathscr{F}(E'), \qquad \mathscr{F}(\Phi_x) : \mathscr{F}(E)_x \to \mathscr{F}(E')_x \;\; (x \in X).$$

V primeru kontravariantnega funtorja je definicija analogna, le puščice se obrnejo; taka sta npr. funktorja $E \rightsquigarrow (E^*)^{\otimes r}$ in $E \rightsquigarrow \Lambda^r(E^*)$.

Če je $E \to X$ vektorski sveženj ranga m, je njegov najvišji netrivialen vnanji produkt

$$\Lambda^m(E) = \det E \to X$$

sveženj premic (torej sveženj ranga 1), ki se imenuje tudi *determinantni sveženj* svežnja E. Razlog za to poimenovanje je v formuli (3.22), ki pove, da so prehodne funkcije svežnja $\det E$ determinante prehodnih preslikav svežnja E. V primeru holomorfnega svežnja $E \to X$ je $\det E \to X$ holomorfen sveženj premic.

Tenzorske in vnanje potence vektorskih svežnjev ter njihovih dualov so še posebej pomembne v primeru, ko je $E = TX \to X$ tangentni sveženj bazne mnogoterosti X. Elementi svežnjev $(TX)^{\otimes r}$ in $(T^*X)^{\otimes r}$ se imenujejo tenzorji na X in prerezi teh svežnjev so kovariantna oz. kontravariantna *tenzorska polja* na X.

Prerezi vnanjih produktov $\Lambda^r(T^*X)$ kotangentnega svežnja, torej alternirajoča kontravariantna tenzorska polja na X, se imenujejo *diferencialne forme* na X. Le-te igrajo izjemno pomembno vlogo pri integraciji na mnogoterostih (glej poglavje 6) ter pri razumevanju topoloških lastnosti mnogoterosti preko de Rhamove kohomologije in Poincaréjeve dualnosti (glej poglavje 7).

Če je X kompleksna mnogoterost dimenzije n, se najvišja tenzorska potenca holomorfnega kotangentnega svežnja

$$K_X \ = \ \Lambda^n(T^*X) = \det T^*X$$

imenuje *kanoničen svežen j* mnogoterosti X. Ta sveženj in njegove tenzorske potence $K_X^{\otimes r}$ imajo bistveno vlogo pri klasifikaciji kompaktnih kompleksnih mnogoterosti in na njihovih lastnostih (še posebej na dimenziji $d(r)$ prostora holomorfnih prerezov svežnja $K_X^{\otimes r}$) je osnovan pojem *Kodairove dimenzije* mnogoterosti X.

Poglavje 4
Transverzalnost

V tem poglavju najprej obravnavamo Morsejevo lemo in Sardov izrek o kritičnih vrednostih gladkih preslikav. Glavna tema poglavja je pojem transverzalnosti, izreki o transverzalnosti in primeri njihove uporabe. Med slednjimi so Morsejeve funkcije in predstavitev mnogoterosti kot ročajnike (handlebodies). Poglobljeno analizo teh področij lahko najdemo v monografijah Goresky in MacPherson [20], Milnor [32], Morse [36] in drugih.

4.1 Morsejeva lema in Sardov izrek

Naj bosta M^m in N^n mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^1$ in dimenzije m oziroma n.

Definicija 4.1 *Naj bo $f : M^m \to N^n$ diferenciabilna preslikava.*

1. *Točka $p \in M$ je* kritična točka *preslikave f, če je $\operatorname{rang}_p f < n = \dim N$. Točka, ki ni kritična, se imenuje* regularna točka *preslikave.*
2. *Točka $q \in N$ je* regularna vrednost *preslikave f, če za vse točke $p \in f^{-1}(q)$ velja*
$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang}(df_p : T_pM \to T_qN) = n = \dim N.$$
Vsaka točka $q \in N \setminus f(M)$ je regularna vrednost f (pogoj je na prazno izpolnjen). Točka $q \in N$, ki ni regularna vrednost f, se imenuje kritična vrednost.

Iz definicije sledi, da je $q \in N$ kritična vrednost preslikave f natanko tedaj, ko vlakno $f^{-1}(q)$ vsebuje vsaj eno kritično točko preslikave f.

Opomba 4.2 1. Če je $\dim M < \dim N$, potem je $q \in N$ regularna vrednost preslikave $f : M \to N$ natanko tedaj, ko $q \notin f(M)$.

2. Če je $\dim M \geq \dim N$, potem je $q \in N$ regularna vrednost preslikave f natanko tedaj, ko bodisi $q \notin f(M)$, bodisi $q \in f(M)$ in je f submerzija v vsaki točki $p \in f^{-1}(q)$.

V nadaljevanju bomo uporabljali naslednje topološke pojme, ki se nanašajo na velikost množice v topološkem prostoru.

Definicija 4.3 *Naj bo X topološki prostor.*

1. *Podmnožica $E \subset X$ je* množica prve kategorije*, če je E unija največ števno mnogo zaprtih nikjer gostih podmnožic prostora X.*
2. *Podmnožica $A \subset X$ je* množica druge kategorije*, če je presek največ števno mnogo odprtih povsod gostih podmnožic prostora X.*

Očitno je $E \subset X$ množica prve kategorije natanko tedaj, ko je njen komplement $A = X \setminus E$ množica druge kategorije. Pomemben je naslednji izrek.

Izrek 4.4 (R. Baire [5]) *V polnem metričnem prostoru ima vsaka množica prve kategorije prazno notranjost, vsaka množica druge kategorije pa je povsod gosta.*

Ker je topologija na vsaki topološki mnogoterosti porojena z neko kompletno funkcijo razdalje (metriko), Baireov izrek velja na vsaki mnogoterosti.

Topološki prostor X se imenuje *Baireov prostor*, če v njem velja lastnost v izreku 4.4. Izraz *generična točka* pomeni točko v neki množici druge kategorije v Baireovem prostoru, ki je odvisna od konkretne situacije. Take množice pojmujemo kot topološko velike, medtem ko so množice prve kategorije topološko majhne.

Množica E v $\mathscr{C}^1$ mnogoterosti N je *množica z mero nič*, če ima za vsako lokalno $\mathscr{C}^1$ karto $\phi : U \to U' \subset \mathbb{R}^m$ na M množica $\phi(E \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ Lebesguovo mero nič. Lahko je preveriti, da je ta pojem neodvisen od izbire $\mathscr{C}^1$ kart.

Naslednji izrek nam pove, da je množica kritičnih vrednosti gladke preslikave majhna tako v topološkem smislu kot tudi v smislu mere.

Izrek 4.5 (A. Sard, 1942 [39]) *Če je $f : M^m \to N^n$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$ za nek*

$$r \geq \max\{0, m-n\} + 1 \geq 1,$$

ima množica $f(\mathrm{Crit}(f)) \subset N$ njenih kritičnih vrednosti mero 0 v N in je množica prve kategorije v N.

Sardov izrek torej pove, da je generična točka $q \in N$ regularna vrednost gladke preslikave $f : M \to N$. Sardov izrek je natančen v smislu gladkosti preslikave; izrek ne velja za $r \leq \max\{0, m-n\}$. Izrek je bil pred tem dokazan za bolj gladke funkcije.

Posledica 4.6 (H. Whitney, 1936 [44]) *Če je $\dim M < \dim N$ in je $f : M \to N$ preslikava razreda $\mathscr{C}^1$, ima zaloga vrednosti $f(M)$ mero 0 v N.*

Naslednja posledica sledi iz trditve 1.66 in izreka 4.5.

Posledica 4.7 *Za skoraj vsako točko $q \in N$ je $f^{-1}(q)$ prazna ali pa podmnogoterost v M dimenzije* $\dim f^{-1}(q) = \dim M - \dim N$.

Pomemben poseben primer Sardovega izreka je naslednja *Morsejeva lema*.

Izrek 4.8 (A. P. Morse, 1939 [35]) *Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m. Za vsako funkcijo $f : M \to \mathbb{R}$ razreda $\mathscr{C}^m$ ima množica kritičnih vrednosti $f(\mathrm{Crit}(f)) \subset \mathbb{R}$ mero 0 in je množica prve kategorije.*

Izrek je natančen v smislu gladkosti. H. Whitney je namreč l. 1935 v [43] podal primer funkcije $f \in \mathscr{C}^{m-1}(\mathbb{R}^m)$, ki je nekonstantna na povezani množici kritičnih točk in ima njena množica kritičnih vrednosti pozitivno Lebesguovo mero v $\mathbb{R}$.

V našem dokazu (povzetem po monografiji M. Gromov [22]), ki je preprostejši od tistega v [35], bomo potrebovali nekoliko več gladkosti za funkcijo f, torej ne bomo dokazali optimalne verzije navedenega izreka.

Dokaz Dovolj je dokazati izrek v primeru, ko je M zaprta krogla (ali zaprt kvader) v $\mathbb{R}^m$. Mnogoterost M lahko namreč pokrijemo s končno ali števno podmnožicami, ki so difeomorfne zaprti krogli (ali zaprtemu kvadru) v $\mathbb{R}^m$. Unija največ števno mnogo množic mere nič in prve kategorije ima prav tako mero nič in je množica prve kategorije.

Naj bo torej $M = B \subset \mathbb{R}^m$ zaprta krogla in $f(x_1, \ldots, x_m)$ gladka funkcija na B. Množica kritičnih točk

$$\mathrm{Crit}(f) = \left\{ x \in B : \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0, \;\; j = 1, \ldots, m \right\}$$

je tedaj zaprta in zato kompaktna. Njena slika, to je množica kritičnih vrednosti $f(\mathrm{Crit}(f)) \subset \mathbb{R}$, je prav tako kompaktna. Zadošča dokazati, da ima $f(\mathrm{Crit}(f))$ Lebesguovo mero enako 0. Odtod sledi, da ima prazno notranjost in je zato prve kategorije. Dokaz poteka z indukcijo na m.

Začetni korak $m = 1$. B je zaprt interval v $\mathbb{R}$. Množica kritičnih točk

$$\mathrm{Crit}(f) = \{ x \in B : f'(x) = 0 \}$$

je zaprta in zato kompaktna. Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je odvod f' zvezna in zato enakomerno zvezna funkcija na B, obstaja $0 < \delta < 1$, tako da velja

$$x, x' \in B, \; |x - x'| < \delta \implies |f'(x) - f'(x')| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Označimo z $|B|$ dolžino B. Množico $\mathrm{Crit}(f)$ lahko pokrijemo s $k = [|B|/\delta] + 1$ intervali $I_1, \ldots, I_k$ dolžine $|I_j| < \delta$, tako da vsak I_j vsebuje neko kritično točko $x_j \in \mathrm{Crit}(f)$, torej $f'(x_j) = 0$.

Ocenimo sedaj dolžino slike $|f(I_j)|$. Za vsak par točk $x, x' \in I_j$ velja po Lagrangeu

$$|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x|,$$

kjer je $\xi \in I_j$ neka vmesna točka. Ker je $|I_j| < \delta$, je $|\xi - x_j| < \delta$ in zato $|f'(\xi)| = |f'(\xi) - f'(x_j)| < \varepsilon$ po oceni (4.1). Torej dobimo

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon\delta \ \text{ za vsak } x, x' \in I_j \implies |f(I_j)| \le \varepsilon\delta.$$

Ker je $f(\mathrm{Crit}(f)) \subset \bigcup_{j=1}^{k} f(I_j)$ in $k = [|B|/\delta] + 1$, sledi

$$|f(\mathrm{Crit}(f))| \le \sum_{j=1}^{k} |f(I_j)| \le k\varepsilon\delta \le ([|B|/\delta]+1)\delta\varepsilon \le (|B|+1)\varepsilon.$$

Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, je $|f(\mathrm{Crit}(f))| = 0$. Zato je $f(\mathrm{Crit}(f))$ kompaktna množica brez notranjosti.

Induktivni korak $m-1 \Rightarrow m$. Recimo, da izrek velja za funkcije na mnogoterostih dimenzije največ $m-1$. Za vsak multiindeks $I = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ označimo $|I| = i_1 + \ldots + i_m$ in

$$\partial^I f = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I} := \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}.$$

Kroglo B stratificiramo

$$B \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \ldots \supset \Sigma_m,$$

kjer je

$$\Sigma_k = \left\{ x \in B : \partial^I f = 0, \ \ 1 \le |I| \le k \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Torej je $\Sigma_1 = \mathrm{Crit}(f)$. Trdimo, da za vsak $k = 1, 2, \ldots, m-1$ velja:

$$S_k \stackrel{def}{=} \Sigma_k \setminus \Sigma_{k+1} \subset \bigcup_{|I|=k} H_I, \tag{4.2}$$

kjer je

$$H_I = \left\{ x \in B : \partial^I f(x) = 0 \text{ in } d(\partial^I f)(x) \ne 0 \right\}.$$

To pomeni, da v vsaki točki $x \in H_I$ vsaj en parcialen odvod funkcije $\partial^I f$ ni enak nič. Ker je H_I ničelna množica gladke funkcije $\partial^I f$, ki ima neničeln diferencial vzdolž H_I, je H_I gladka podmnogoterost dimenzije $m-1$.

Iz definicij sledi, da za točko $x \in B$ velja $x \in S_k$ natanko tedaj, ko je $\partial^I f(x) = 0$ za vsak multiindeks I z $|I| \le k$ in obstaja multiindeks $J = (j_1, \ldots, j_m)$ dolžine $|J| = k+1$, tako da je $\partial^J f(x) \ne 0$. Recimo, da je $j_l > 0$ za nek $l \in \{1, \ldots, m\}$. Naj bo $I = (j_1, \ldots, j_l - 1, \ldots, j_m)$. Tedaj je $\partial^I f(x) = 0$ in $\frac{\partial}{\partial x_l}(\partial^I f)(x) = \partial^J f(x) \ne 0$, torej $x \in H_I$. S tem je inkluzija (4.2) dokazana.

Videli smo, da je H_I gladka podmnogoterost dimenzije $m-1$ v krogli B. Po induktivni predpostavki izrek že velja za zožitev $f|_{H_I} : H_I \to \mathbb{R}$, zato je

$$|f(\mathrm{Crit}(f|_{H_I}))| = 0, \quad 1 \le |I| \le k. \tag{4.3}$$

Točka $x \in H_I$, ki je regularna točka zožitve $f|_{H_I} : H_I \to \mathbb{R}$, je očitno tudi regularna točka funkcije f na B in zato ni v $\mathrm{Crit}(f)$. Ker je $S_k \subset \mathrm{Crit}(f)$, sledi

$$S_k \subset \bigcup_{|I|=k} \mathrm{Crit}(f|_{H_I}).$$

Odtod in iz (4.3) sledi

$$|f(S_k)| = 0, \quad k = 1, \ldots, m-1.$$

Ker je

$$\mathrm{Crit}(f) = \Sigma_1 = S_1 \cup \ldots \cup S_{m-1} \cup \Sigma_m,$$

nam preostane pokazati le še, da je $|f(\Sigma_m)| = 0$. Na množici Σ_m so vsi parcialni odvodi f do reda m enaki 0 zato za vsako točko $x \in \Sigma_m$ velja

$$f(x') = f(x) + o(|x - x'|^m).$$

Podobno kot v primeru $m = 1$ vidimo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$x \in \Sigma_m, \;\; |x' - x| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon\delta^m.$$

Torej f preslika kroglo $K(x,\delta)$ s središčem $x \in \Sigma_m$ v interval dolžine $\leq \varepsilon\delta^m$. Ker lahko množico Σ_m pokrijemo z $N \lessapprox konst \cdot \delta^{-m}$ kroglami polmera δ, sledi

$$|f(\Sigma_m)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta^m \; \lessapprox \; konst \cdot \delta^{-m}\varepsilon\delta^m = konst \cdot \varepsilon$$

za neko konstanto, neodvisno od ε in δ. Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, sledi $|f(\Sigma_m)| = 0$. S tem je Morsejev izrek 4.8 dokazan.

Dokaz Sardovega izreka za preslikave $f = (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$.

Za $n = 1$ je to ravno Morsejev izrek (glej izrek 4.8).

$n = 2$: Naj bo $(f_1, f_2) : M \to \mathbb{R}^2$ gladka preslikava. Za funkcijo $f_1 : M \to \mathbb{R}$ izrek že velja, torej je skoraj vsako število $c_1 \in \mathbb{R}$ regularna vrednost funkcije f_1. (Komplement je množica z mero nič.)

Za vsako število $c_1 \in f_1(M) \setminus f_1(\mathrm{Crit}(f_1))$ je nivojna ploskev $\{f_1 = c_1\}$ gladka podmnogoterost v M. Po Morsejevem izreku za mnogoterosti dimenzije $\leq m-1$ je skoraj vsako število $c_2 \in \mathbb{R}$ regularna vrednost funcije $f_2 : \{f_1 = c_1\} \to \mathbb{R}$. Za tako izbrani števili c_1, c_2 je točka $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ regularna vrednost preslikave $f = (f_1, f_2) : M \to \mathbb{R}^2$. Iz Fubinijevega izreka sledi, da ima množica kritičnih vrednosti mero nič in je množica prve kategorije.

Očitno lahko argument nadaljujemo z indukcijo na n.

V primeru $n > m$ je vsaka točka $x \in M$ kritična točka preslikave. Da ima slika $f(M) \subset \mathbb{R}^n$ mero nič, lahko vidimo z oceno volumnov slik majhnih krogel v M. Diferenciabilna preslikava se v vsaki točki dobro prilega svojemu diferencialu, torej je slika majhne okolice dane točke blizu slike iste množice z linearno preslikavo, slednja pa leži v afinem podprostoru $\mathbb{R}^n$ z mero nič. Za ta argument, ki ga je podal Whitney leta 1936, potrebujemo le predpostavko, da je $f \in \mathscr{C}^1(M,\mathbb{R}^n)$.

Dokaz splošnega primera Sardovega izreka. Mnogoterosti M in N predstavimo kot uniji $M = \bigcup_j B_j$ in $N = \bigcup_j D_j$ največ števno mnogo kompaktnih podmnožic, tako da za vsak indeks j velja $f(\overline{B}_j) \subset \mathring{D}_j$. Lahko vzamemo, da je $\overline{B}_j$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^m$ in $\overline{D}_j$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$. Očitno je

$$f(\mathrm{Crit}(f)) = \bigcup_j f(\mathrm{Crit}(f)|_{\overline{B}_j}) \subset N.$$

Za množice $f(\mathrm{Crit}(f)|_{\overline{B}_j}$ že vemo, da so prve kategorije in imajo mero nič, zato je taka tudi množica kritičnih vrednosti $f(\mathrm{Crit}(f))$. □

4.2 Transverzalnost

V tem razdelku obravnavamo enega od najpomembnejših pojmov v teoriji gladkih mnogoterosti, to je pojem transverzalnosti, ki ga je v literaturo uvedel R. Thom leta 1955 [40], ključni izrek pa je dokazal leto zatem v [41].

Naj bodo M in $N \subset X$ gladke mnogoterosti (razreda vsaj $\mathscr{C}^1$), kjer je N podmnogoterost mnogoterosti X, in naj bo $f: M \to X$ diferenciabilna preslikava.

Definicija 4.9 *Preslikava $f: M \to X$ je* transverzalna *na podmnogoterost N v točki $p \in M$, kar označujemo $f \pitchfork_p N$, če je bodisi $f(p) \notin N$, bodisi $f(p) \in N$ ter velja*

$$df_p(T_pM) + T_{f(p)}N = T_{f(p)}X. \tag{4.4}$$

Preslikava f je transverzalna na N, $f \pitchfork N$, če je transverzalna na N v vsaki točki.

Pomemben poseben primer se tiče vloženih podmnogoterosti $M,N \subset X$ v neki ambientni mnogoterosti X. Pravimo, da se M in N sekata trasverzalno, $M \pitchfork N$, če za vsako točko $x \in M \cap N$ velja

$$T_xM + T_xN = T_xX.$$

Očitno je to ekvivalentno zahtevi, da je vložitev $M \hookrightarrow X$ transverzalna na N.

Opomba 4.10 (Transverzalnost na točko) Naj bo $N = \{q\}$ točka v X, torej podmnogoterost dimenzije 0. Tedaj je $T_qN = \{0\} \subset T_qX$. Preslikava $f: M \to X$ je transverzalna na točko q natanko tedaj, ko velja

$$df_p(T_pM) = T_qX \quad \text{za vsako točko} \quad p \in f^{-1}(q),$$

torej natanko tedaj, ko je q regularna vrednost preslikave f (glej def. 4.1). Pojem transverzalnosti je torej posplošitev pojma regularne vrednosti.

Transverzalnost je stabilen pogoj v naslednjem smislu.

Trditev 4.11 (Stabilnost transverzalnosti) *Naj bodo M in $N \subset X$ mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ $(r \geq 1)$. Množica vseh preslikav $f : M \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$, ki so transverzalne na podmnogoterost $N \subset X$ v vsaki točki dane kompaktne podmnožice $K \subset M$, je odprta v prostoru $\mathscr{C}^r(M,X)$ s šibko $\mathscr{C}^r$.*

Dokaz trditve je preprost in ga prepustimo bralcu. Isti rezultat velja globalno na M, če namesto šibke uporabimo fino (Whitneyevo) $\mathscr{C}^r$ topologijo na prostoru $\mathscr{C}^r(M,X)$. Razlika med obema topologijama je naslednja.

Pri *šibki* oziroma *kompaktno-odprti $\mathscr{C}^r$ topologiji* na prostoru $\mathscr{C}^r(M,X)$ sestavljajo okolico dane $\mathscr{C}^r$ preslikave $f : M \to X$ vse preslikave $g \in \mathscr{C}^r(M,X)$, ki so predpisano blizu f v $\mathscr{C}^r$ smislu na danem kompaktu $K \subset M$. To pomeni, da so g in njeni odvodi do reda r blizu vrednostim in ustreznim odvodom preslikave f na K. (Odvode preslikav primerjamo tako, da K in njegovo sliko $f(K)$ pokrijemo s končnim naborom lokalnih kart na M oz. X, tako da f preslika vsako od izbranih kart na M v eno od izbranih kart na X, in nato izmerimo velikost $\mathscr{C}^r$-norme razlike med f in g v teh izbranih parih kart. Tak način merjenja je sicer odvisen od izbire sistemov kart, dobljena topologija na $\mathscr{C}^r(M,X)$ pa je neodvisno od teh izbir.)

Pri fini Whitneyevi $\mathscr{C}^r$ topologiji na prostoru $\mathscr{C}^r(M,X)$ sledimo isti logiki, le da pokrijemo celotno mnogoterost M in njeno sliko $f(M) \subset X$ s končno ali števno mnogo kartami kot zgoraj in zahtevamo, da je razlika med f in g v $\mathscr{C}^r$ normi na teh parih kart manjša od predpisane pozitivne zvezne funkcijo $\varepsilon : M \to (0,\infty)$. Na vsakem kompaktu $K \subset M$ velja $\varepsilon \geq c > 0$ za neko konstanto $c = c(K,f) > 0$, zato z merjenjem na kompaktih dobimo šibko $\mathscr{C}^r$ topologijo. Ker pa lahko funkcija $\varepsilon > 0$ postaja vse manjša v neskončnosti, je fina $\mathscr{C}^r$ topologija strogo finejša od šibke $\mathscr{C}^r$ topologije, razen seveda v primeru ko je M kompaktna in topologiji sovpadata.

Ponazorimo fino Whitneyevo topologijo na najpreprostejšem primeru $M = X = \mathbb{R}$. Izberimo neko zvezno pozitivno funkcijo $\varepsilon : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Prirejeno bazno okolico $V(f,\varepsilon) \subset \mathscr{C}^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$ funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v fini $\mathscr{C}^r$ topologiji sestavljajo vse funkcije $g \in \mathscr{C}^r(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ki zadoščajo

$$|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| < \varepsilon(x) \quad \text{za vse } x \in \mathbb{R} \text{ in } k = 0,1,\ldots,r.$$

Naslednja trditev pojasni geometrijski pomen transverzalnosti.

Trditev 4.12 *Naj bosta M in X mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$. Če je preslikava $f : M \to X$ razreda $\mathscr{C}^r$ transverzalna na $\mathscr{C}^r$ podmnogoterost N mnogoterosti X, potem je praslika $f^{-1}(N)$ prazna množica ali pa podmnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ mnogoterosti M in velja*

$$\mathrm{codim}(f^{-1}(N),M) = \mathrm{codim}(N,X).$$

Poseben primer te trditve že poznamo (glej trditev 1.66 in opombo 4.10): če je $q \in f(M) \subset X$ regularna vrednost preslikave $f : M \to X$, potem je praslika $f^{-1}(q)$ podmnogoterost kodimenzije $\dim X$ mnogoterosti M.

Dokaz Naj bo $p \in f^{-1}(N)$ in $q = f(p) \in N$. Izberimo lokalne definicijske funkcije $g_1, \dots, g_k$ za N v neki odprti okolici $U \subset X$ točke q, tako da je

$$N \cap U = \{x \in U : g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0\}$$

in so diferenciali $dg_1, \dots, dg_k$ linearno neodvisni v vsaki točki $x \in U$. Torej je

$$k = \operatorname{codim}(N, X) \quad \text{in} \quad \bigcap_{i=1}^{k} \ker(dg_i)_q = T_q N.$$

Iz transverzalnostnega pogoja $df_p(T_pM) + T_qN = T_qX$ (glej (4.4)) sledi, da so zožitve diferencialov $dg_1, \dots, dg_k$ na vektorski podprostor $df_p(T_pM) \subset T_qX$ linearno neodvisne. Zato so diferenciali

$$d(g_i \circ f)_p = (dg_i)_q \circ df_p, \quad i = 1, \dots, k$$

linearno neodvisni na T_pM. Ker je

$$f^{-1}(N \cap U) = \{x \in f^{-1}(U) : (g_i \circ f)(x) = 0,\ i = 1, \dots, k\},$$

sledi iz linearne neodvisnosti omenjenih diferencialov, da je $f^{-1}(N)$ podmnogoterost M razreda $\mathscr{C}^r$ in kodimenzije k v neki okolici točke p. Ker to velja za vsako točko $p \in f^{-1}(N)$, trditev sledi. $\square$

Izrek 4.13 (Izrek o transverzalnosti; R. Thom, 1956 [41]) *Naj bo X gladka mnogoterosti in N zaprta gladka podmnogoterost. Vsako gladko preslikavo $f : M \to X$ lahko poljubno dobro aproksimiramo v fini $\mathscr{C}^\infty$ topologiji z gladko preslikavo $\tilde{f} : M \to X$, ki je transverzalna na N.*

Izrek velja tudi za mnogoterosti in preslikave končnega reda gladkosti; natančnejve se verzije in posplošitve ireka, glej npr. Goresky in MacPherson [20].

Podali bomo eleganten dokaz, ki ga je predstavil R. Abraham leta 1963 v članku [1]. Osnovna ideja je, da opazujemo gladko preslikavo

$$F : M \times \mathbb{R}^n \to X, \tag{4.5}$$

ki jo lahko razumemo kot družino gladkih preslikav $f_t = F(\cdot, t) : M \to X$, gladko odvisno od parametrov $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, kjer je $F(\cdot, 0) = f$ dana začetna preslikava, tako da F zadošča naslednji lastnosti.

Definicija 4.14 *Preslikava F* (4.5) *je* submerzivna družina *preslikav $M \to X$, če je za vsak $(x,t) \in M \times \mathbb{R}^n$ parcialni diferencial*

$$(\partial_t F)(x,t) : \mathbb{R}^n \to T_{F(x,t)} X$$

surjektiven. Ekvivalentno, $\mathbb{R}^n \ni t \mapsto F(x,t) \in X$ je submerzija za vsak $x \in M$.

Primer 4.15 Naj bo $X = \mathbb{R}^n$ in $f : M \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava. Tedaj je preslikava

$$F : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x,t) = f(x) + t$$

submerzivna družina in $F(\cdot,0) = f$.

Trditev 4.16 *Za vsako gladko preslikavo $f : M \to X$ obstaja submerzivna družina $F : M \times \mathbb{R}^n \to X$ za nek $n \in \mathbb{N}$, tako da je $F(\cdot,0) = f$.*

Dokaz Prvi del dokaza je enak kot v dokazu izreka 2.69 o obstoju cevastih okolic podmnogoterosti in ga na kratko ponovimo.

Na mnogoterosti X lahko najdemo končno mnogo vektorskih polj $v_1, \ldots, v_n$, ki napenjajo tangentni prostor $T_x X$ v poljubni točki $x \in X$. Naj bo $\phi_{j,t}$ tok polja v_j za čas t. Preslikava $F : M \times \mathbb{R}^n \to X$, definirana s predpisom

$$F(x,t) = F(x,t_1,\ldots,t_n) = \phi_{1,t_1} \circ \cdots \circ \phi_{n,t_n}(f(x)) \in X, \quad x \in M,$$

je definirana v neki odprti okolici $U \subset M \times \mathbb{R}^n$ podmnožice $M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}^n$ in zadošča pogojema $F(x,0) = f(x)$ in

$$\frac{\partial}{\partial t_j} F(x,t)\big|_{t=0} = v_j(f(x)), \quad x \in M,\ j = 1,\ldots,n.$$

Ker vektorji $v_1, \ldots, v_n$ napenjajo tangentni prostor mnogoterosti X v poljubni točki, je parcialni diferencial $\partial_t F(x,t)|_{t=0} : \mathbb{R}^n \to T_{f(x)} X$ surjektiven za vsak $x \in M$. Če okolico U primerno skrčimo okrog $M \times \{0\}$, je diferencial $\partial_t F(x,t) : \mathbb{R}^n \to T_{F(x,t)} X$ surjektiven za vsak $(x,t) \in U$.

Da bi dobili preslikavo, ki je submerzivna na vsem $M \times \mathbb{R}^n$, F nadomestimo z $F \circ \psi$, kjer je $\psi : M \times \mathbb{R}^n \to U \subset M \times \mathbb{R}^n$ gladka preslikava oblike $\psi(x,t) = (x, g(x,t))$, ki je difeomorfizem na svojo zalogo vrednosti in zadošča pogoju $\psi(x,0) = (x,0)$. Funkcija g je npr. lahko oblike

$$g(x,t) = \chi(x)\left(\mathrm{Arctg}(t_1), \ldots, \mathrm{Arctg}(t_n)\right), \quad x \in M,\ t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

kjer je $\chi > 0$ primerno izbrana gladka pozitivna funkcija na M. $\square$

Thomov transverzalnostni izrek 4.13 v šibki gladki topologiji (z aproksimacijo na kompaktih) sledi iz trditve 4.16 in naslednjega izreka.

Izrek 4.17 (R. Abraham 1963, [1]) *Če je $F : M \times \mathbb{R}^n \to X$ submerzivna družina gladkih preslikav in je $N \subset X$ gladka zaprta podmnogoterost, potem je za skoraj vsak $t \in \mathbb{R}^n$ preslikava $f_t := F(\cdot,t) : M \to X$ transverzalna na N.*

Beseda *skoraj vsak* v izreku je mišljena glede na Lebesguovo mero na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz Iz pogojev sledi, da je F submerzija, zato je množica

$$S := F^{-1}(N) \subset M \times \mathbb{R}^n$$

gladka podmnogoterost $M \times \mathbb{R}^n$ kodimenzije $d = \operatorname{codim}(N,X)$.

Označimo s $\pi : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ projekcijo $\pi(x,t) = t$ na drugi faktor.

Trditev 4.18 *Naslednji dve lastnosti sta ekvivalentni za vsak $t \in \mathbb{R}^n$:*

(a) *t je regularna vrednost projekcije $\pi|_S : S \to \mathbb{R}^n$.*
(b) *Preslikava $f_t = F(\cdot\,,t) : M \to X$ je transverzalna na N.*

Dokaz Fiksirajmo točko $(x,t) \in S$ in označimo $q = F(x,t) \in N$. Ker je $S = F^{-1}(N)$, je diferencial $dF_{(x,t)} : T_{(x,t)}S \to T_qN$ surjektiven. Točka $t \in \mathbb{R}^n$ je regularna vrednost projekcije $\pi|_S : S \to \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je $d\pi_{(x,t)} : T_{(x,t)}S \to T_t\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ surjektivna preslikava. Slednje velja natanko tedaj, ko je podmnogoterost $M \times \{t\} \subset M \times \mathbb{R}^n$ transverzalna na S v točki (x,t), kar pomeni

$$T_{(x,t)}(M \times \{t\}) + T_{(x,t)}S = T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}^m). \tag{4.6}$$

Ker je $F : M \times \mathbb{R}^n \to X$ submerzija in je $dF_{(x,t)}(T_{(x,t)}S) = T_qN$, velja (4.6) natanko tedaj, ko je

$$dF_{(x,t)}(T_{(x,t)}(M \times \{t\})) + T_qN = T_qX. \tag{4.7}$$

Upoštevaje $f_t = F(\cdot\,,t)$ in zato $dF_{(x,t)}(T_{(x,t)}(M \times \{t\})) = (df_t)_x(T_xM)$ vidimo, da je pogoj (4.7) ekvivalenten pogoju

$$(df_t)_x(T_xM) + T_qN = T_qX. \tag{4.8}$$

Slednje ravno pomeni, da je preslikava $f_t : M \to X$ transverzalna na N.

Obratno, iz (4.8) sledi (4.7) in nato (4.6), torej je t regularna vrednost projekcije $\pi|_S : S \to \mathbb{R}^n$. $\square$

Izrek 4.17 sedaj sledi neposredno iz trditve 4.18 in Sardovega izreka 4.5, ki pove, da je za skoraj vsak $t \in \mathbb{R}^n$ regularna vrednost projekcije $\pi|_S : S \to \mathbb{R}^n$. Za vsak tak t je preslikava $f_t = F(\cdot\,,t) : M \to X$ transverzalna na podmnogoterost N. Če izberemo t blizu 0, je f_t blizu $f_0 = f$ v gladki topologiji na prostoru $\mathscr{C}^\infty(M,X)$ enakomerno na danem kompaktu $K \subset M$.

Skica dokaza Thomovega transverzalnostnega izrek 4.13 z aproksimacijo v fini Whitneyevi topologiji na $\mathscr{C}^\infty(M,X)$. Mnogoterost M izčrpamo z naraščajočim zaporedjem kompaktov

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M.$$

Induktivno konstruiramo zaporedje gladkih preslikav $f_i : M \to X$ $(i \in \mathbb{N})$, tako da je za vsak $i \in \mathbb{N}$ preslikava f_i transverzalna na N na kompaktu K_i, aproksimira f poljubno dobro na neki okolici $U_i \subset M$ množice K_i, izven te okolice pa se ujema s preslikavo f. V induktivnem koraku z uporabo izreka 4.17 aproksimiramo preslikavo f_i na naslednjem kompaktu K_{i+1} z gladko preslikavo $f_{i+1} : M \to X$, ki je transverzalna na $N \subset X$ na množici K_{i+1}, nato pa jo modificiramo tako, da se ujema z f izven neke okolice K_{i+1}. S pravilno izbiro aproksimantov v induktivnih korakih dobimo v limiti gladko preslikavo $\tilde{f} = \lim_{i\to\infty} f_i : M \to X$, ki je transverzalna na N in leži v predpisani okolici začetne preslikave f v fini gladki topologiji. $\square$

Pojem transverzalnosti na enak način uvedemo za holomorfne preslikave. Trditev 4.12 (o prasliki podmnogoterosti s transverzalno preslikavo) in trditev 4.11 (o stabilnosti transverzalnosti) veljata tudi v holomorfnem primeru z istim dokazom. Večina ostalih trditev in izrekov v tem razdelku pa v splošnem ne velja v kompleksnem primeru. Konkretno, transverzalnostni izrek 4.13 v splošnem ne velja za holomorfne preslikave kompleksnih mnogoterosti, iz očitnih razlogov. Npr., vsaka holomorfna preslikava $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ je konstantna in zato njena edina vrednost ni regularna vrednost. Zanimivejši je naslednji primer.

Primer 4.19 Naj bo $X \subset \mathbb{C}^2$ domena oblike

$$X = \{(z,w) : |w| < r(|z|)\} \subset \mathbb{C}^2,$$

kjer je $r : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ pozitivna omejena zvezna funkcija. Zaloga vrednosti poljubne holomorfne preslikave $f = (f_1, f_2) : \mathbb{C} \to X$ leži v neki premici $\mathbb{C} \times \{c\} \subset X$ ($c \in \mathbb{C}$), saj je druga komponenta f_2 omejena na $\mathbb{C}$ in zato konstantna. Če dodatno predpostavimo $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0$, je $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \times \{0\}$. V tem primeru nobena nekonstantna holomorfna preslikava $f : \mathbb{C} \to X$ ni transverzalna na kompleksno krivuljo

$$C = \{(z,w) \in X : w = z^2(z-1)^2\}.$$

Dejansko, slika $f(\mathbb{C})$ leži v premici $\mathbb{C} \times \{0\}$ in ker funkcija $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ni konstantna, lahko njena zaloga vrednosti izpusti največ eno točko po malem Picardovem izreku. Torej $f(\mathbb{C})$ vsebuje vsaj eno od točk $(0,0)$ in $(1,0)$, v teh točkah pa je tangentna premica na krivuljo C enaka $\mathbb{C} \times \{0\}$. $\square$

Kljub temu tudi v kompleksnem velja verzija transverzalnostnega izreka, če je M Steinova mnogoterost, to je zaprta kompleksna podmnogoterost nekega kompleksnega evklidskega prostora $\mathbb{C}^n$ (glej str. 45). Preden povemo ta izrek, omenimo še drug razred kompleksnih mnogoterosti, ki igra pomembno vlogo.

Definicija 4.20 *Kompleksna mnogoterost X se imenuje* Oka mnogoterost*, če lahko vsako holomorfno preslikavo $f : U \to X$ z neke odprte konveksne množice $U \subset \mathbb{C}^n$ (za poljuben $n \in \mathbb{N}$) aproksimiramo enakomerno na kompaktih v U s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to X$.*

Razred Oka mnogoterosti je avtor uvedel v literaturo leta 2009 v [15]. Ime nosijo o japonskem matematiko Kiyoshi Oka, ki je v obdobju 1934–1962 rešil vrsto fundamentalnih problemov kompleksne analize. Diskusijo in lastnosti tega pomembnega razreda kompleksnih mnogoterosti lahko najdemo v monografiji [17] in v preglednih člankih [18, 16]. Omenimo naj, da so vse kompleksne Liejeve grupe in kompleksno homogene mnogoterosti Oka mnogoterosti. Prav tako je komplement $\mathbb{C}^n \setminus K$ poljubne kompaktne konveksne množice $K \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) Oka mnogoterost.

Glavni izrek teorije Oka mnogoterosti med drugim pove naslednje.

Izrek 4.21 (Poseben primer Izreka 5.4.4 v [17]) *Naj bo M Steinova mnogoterost in X Oka mnogoteorst X. Vsaka zvezna preslikava $f : M \to X$ je homotopna neki holomorfni preslikavi $\tilde{f} : M \to X$. Če je poleg tega dana preslikava f holomorfna na neki zaprti kompleksni podmnogoterosti $M' \subset M$ in na okolici neke kompaktne $\mathscr{O}(M)$-konveksne množice $K \subset M$, lahko homotopijo $f_t : M \to X$ $(t \in [0,1])$ od $f = f_0$ do holomorfne preslikave $\tilde{f} = f_1$ izberemo tako, da miruje na podmnogoterosti M' in je za vsak $t \in [0,1]$ preslikava f_t holomorfna na K in poljubno enakomerno blizu $f = f_0$ na K.*

Velja še vrsta drugih lastnosti tega tipa, ki so del izreka [17, Theorem 5.4.4]. (Predpostavka, da je začetna zvezna preslikava $f : M \to X$ definirana na vsej mnogoterosti X je potreba zaradi topoloških razlogov, če imata M in X netrivialno topologijo. Če je mnogoterost X topološka kontraktibilna, je ta predpostavka nebistvena.)

Izrek 4.21 pomeni, da imajo holomorfne preslikave Steinovih mnogoterosti v Oka mnogoterosti sorodne lastnosti kot gladke preslikave v smislu aproksimacijskih ter interpolacijskih lastnosti, po drugi strani pa tudi kot holomorfne funkcije $M \to \mathbb{C}$ na Steinovih mnogoterostih. To je v bistvenem nasprotju s holomorfnimi preslikavami v kompleksne mnogoterosti X, ki so hiperbolične v smislu S. Kobayashija [29], kjer mnoge Steinove mnogoterosti M (npr. kompleksni evklidski prostori) ne dopuščajo nobenih nekonstatnih holomorfnih preslikav $M \to X$.

Naslednji izrek je poseben primer [17, Theorem 8.8.5].

Izrek 4.22 (Transverzalnosti izrek za Steinove mnogoterosti) *Naj bo N gladka ali kompleksna zaprta podmnogoterost kompleksne mnogoterosti X. Če je M Steinova mnogoterost, $f : M \to X$ holomorfna preslikava in K kompaktna množica v M, lahko f aproksimiramo poljubno dobro enakomerno na K s holomorno preslikavo $g : U \to X$, definirano na neki odprti okolici $U \subset M$ množice K, tako da je g transverzalna na N.*

Če je X mnogoterost Oka, lahko najdemo holomorfno preslikavo $g : M \to X$, ki je povsod transverzalna na N in aproksimira f poljubno dobro na kompaktu K.

Podrobno diskusijo in dokaz tega izreka lahko bralec najde v [17, Sect. 8.8]; na tem mestu ga bomo le skicirali.

Dokaz je v osnovi soroden tistemu v gladkem primeru, z nekaj spremembami. Pri dokazu trditve 4.16 o obstoju submerzivne družine F moramo zožiti domeno F na množico oblike $U \times \mathbb{B}$, kjer je $U \subset M$ relativno kompaktna Steinova okolica množice $K \subset M$ in je $\mathbb{B}$ enotna krogla v $\mathbb{C}^n$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Razlog je v tem, da na mnogoterosti X v splošnem nimamo netrivialnih kompletnih holomorfnih vektorskih polj, ki bi nam dale globalno definirano submerzivno družino. Obstrukcija je vsebinske narave, saj X morda ne vsebuje nekonstantnih holomorfnih slik kompleksnih evklidskih prostorov. Tudi drugi del dokaza, ko smo $M \times \mathbb{R}^n$ difeomorfno skrčili na majhno okolico $M \times \{0\}^n$ v $M \times \mathbb{R}^n$, v holomorfnem primeru odpove.

Po tej zožitvi domene lahko na enak način dokažemo Abrahamov izrek 4.17, ki nam da holomorfno preslikavo $f_t : U \to X$, transverzalno na podmnogoterost $N \subset X$ v vsaki točki množice K. S tem smo dokazali prvi del izreka 4.22.

Če je X Oka mnogoterost, lahko dobljeno preslikavo f_t (ki jo sedaj imenujmo f_1) aproksimiramo poljubno dobro na $K_1 := K$ s holomorfno preslikavo $\tilde{f} : M \to X$ po osnovnem izreku teorije Oka mnogoterosti (glej izrek 4.21). Sedaj lahko uporabimo isti argument kot zgoraj na večjem kompaktu $K_2 \subset M$, ki vsebuje K_1, in dobimo novo holomorfno preslikavo $f_2 : M \to X$, ki je transverzalna na N na množici K_2 in aproksimira preslikavo $f_1 : U \to X$ iz prvega koraka poljubno dobro na K_1. Proces induktivno nadaljujemo in v limiti najdemo holomorfno preslikavo $g = \lim_{i\to\infty} f_i : M \to X$, ki je povsod transverzalna na N in aproksimira začetno preslikavo f na prvi množici $K = K_1$. Na vsakem koraku je bistvenega pomena trditev 4.11 o stabilnosti transverzalnosti.

Transverzalnostni izrek velja v nekaterih posebnih primerih tudi za ne-Steinove kompleksne mnogoterosti. Klasičen *Bertinijev izrek* pove, da je skoraj vsak projektiven podprostor $\mathbb{CP}^k \subset \mathbb{CP}^n$ $(k < n)$ transverzalen na dano zaprto projektivno (algebraično) podmnogoterost $N \subset \mathbb{CP}^n$. Razlog je v tem, da projektivna grupa $PGL_n(\mathbb{C})$ deluje tranzitivno na $\mathbb{CP}^n$ kot grupa avtomorfizmov.

4.3 Uporaba transverzalnosti v presečni teoriji

Naj bo Z gladka mnogoterost in $X, Y \subset Z$ sklenjeni kompaktni podmnogoterosti.

Če je $\dim X + \dim Y < \dim Z$, se X in Y generično ne sekata v Z. Natančneje, če eno ali obe od teh podmnogoterosti malce perturbiramo, postaneta transverzalni, kar zaradi dimenzijskega pogoja pomeni, da se ne sekata.

Če je $\dim X + \dim Y = \dim Z$, potem je po primerno izbrani generični perturbaciji X in Y v Z njun presek $X \cap Y$ podmnogoterost dimenzije 0, torej končna množica točk. Ta situacija je stabilna v smislu, da se pri nadaljnji majhni perturbaciji presečne točke malce premaknejo, a njihovo skupno število se ne spremeni. Naj bo $p \in X \cap Y$ presečna točka, v kateri se X in Y sekata transverzalno:

$$T_pX + T_pY = T_pZ, \qquad T_pX \cap T_pY = \{0\}.$$

Taka točka je izolirana v X in Y. Če so vse tri mnogoterosti X, Y, Z orientirane, lahko točki $p \in X \cap Y$ priredimo število $\delta(p) = \pm 1$ glede na to, ali se orientaciji na tangetnih prostorih T_pX in T_pY dopolnita do $+$ ali do $-$ orientacije na T_pZ. To število $\delta(p)$ se imenujemo *orientirano presečno število* podmnogoterosti X in Y v točki $p \in X \cap Y$. Ker je zaradi kompaktnosti presečnih točk le končno mnogo, lahko definiramo globalno orientirano presečno število X in Y v Z:

Definicija 4.23 *Število* $X \cdot Y = \sum_{p \in X \cap Y} \delta(p)$ *je* orientirano presečno število *podmnogoterosti X in Y v mnogoterosti Z.*

Pomemben netrivialen rezultat je, da je presečno število $X \cdot Y$ neodvisno od gladkih deformacij podmnogoterosti X in Y v Z. Zato je smiselna naslednja definicija.

Definicija 4.24 *Če je X kompaktna orientirana podmnogoterost orientirane mnogoterosti Z in je* $\dim Z = 2\dim X$*, je* samopresečno število $X \cdot X$ *definirano kot presečno število X z generično deformacijo same sebe v Z, ki seka X transverzalno.*

Če mnogoterosti $X, Y \subset Z$ niso orientabilne, lahko definiramo (samo-) presečno število modulo 2; tudi to število je neodvisno od deformacij X in Y v Z.

Primer 4.25 Naj bo X kompaktna orientirana mnogoterost dimenzije n in $\pi : E \to X^n$ vektorski sveženj ranga n z orientiranim totalnim prostorom E. Identificirajmo X z ničelnim prerezom svežnja E. Samopresečno število ničelnega prereza v E se imenuje *Eulerjevo število vektorskega svežnja*

$$\chi(E) = X \cdot X.$$

Če $E = TX$ tangentni sveženj mnogoterosti X, je po Hopfovem izreku

$$\chi(TX) = X \cdot X = \chi(X)$$

ravno *Eulerjeva karakteristika* mnogoterosti X, ki jo lahko izračunamo iz poljubne triangulacije X. Podmnogoterost $X' \subset TX$, ki je majhna deformacija ničelnega prereza $X \subset TX$, je graf nekega vektorskega polja V in presečno število $X \cdot X'$ je tedaj enako število ničel polja V, šteto s predznakom $\pm$ glede na orientacijo. □

Naloga 4.26 Naj bo $C \subset \mathbb{CP}^2$ kompleksna projektivna krivulja

$$C = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0 \right\},$$

kjer je P homogen polinom stopnje d. Dokaži, da je presečno število krivulje C s projektivno premico $\Lambda = \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ enako d. (Pri tem je potrebno presečne točke šteti z algebraičnimi večkratnostmi.) Trditev prevedi na dejstvo, da ima vsak polinom stopnje d na $\mathbb{C}$ natanko d ničel. □

Pomemben poseben primer presečnega števila je *stopnja preslikave*. Naj bosta M in N kompaktni, povezani, orientirani gladki mnogoterosti iste dimenzije in naj bo $f : M \to N$ gladka preslikava (razreda vsaj $\mathscr{C}^1$). Generična točka $q \in N$ je tedaj regularna vrednost preslikave f.

Definicija 4.27 *(Predpostavke kot zgoraj.) Stopnja preslikave $f : M \to N$ je presečno število preslikave f z generično točko $q \in N$.*

Opišimo stopnjo bolj konkretno. Za vsako regularno vrednost $q \in N$ je praslika $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ končna množica točk v M. V vsaki točki p_i definiramo $\delta(p_i) = 1$, če diferencial $df_{p_i} : T_{p_i}M \to T_qN$ ohranja orientaciji in $\delta(p_i) = -1$, če df_{p_i} obrne orientacijo. *Stopnja preslikave $f : M \to N$* je število

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^{k} \delta(p_i) \in \mathbb{N}.$$

To število je neodvisno od izbire regularne vrednosti $q \in N$ in dejansko pomeni presečno število f s točko $\{q\} \subset N$. Če mnogoterosti nista orientabilni, lahko definiramo presečno število modulo dva, torej kot element $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$.

Rezultat v prejšnji nalogi je poseben primer splošnejšega izreka.

4.4 Brstično transverzalnostni izrek

Izrek 4.13 je poseben primer splošnejšega izreka, ki se v literaturi v angleškem jeziku imenuje *jet transversality theorem*. Najprej obrazložimo pojem jeta preslikave; slovenska beseda je *brstič* in govorimo o *brstično transverzalnostnem izreku*.

Naj bosta M in N mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^r$. Za točko $p \in M$ označimo s $\mathscr{C}^r_p(M,N)$ množico vseh $\mathscr{C}^r$ preslikav $f : U \to N$ iz odprtih okolic $p \in U \subset M$ točke p. Na $\mathscr{C}^r_p(M,N)$ uvedemo ekvivalenčno relacijo z zahtevo, da je $f \sim_p g$ natanko tedaj, ko je $f(p) = g(p)$ in imata funkciji f in g isti Taylorjev polinom reda r v poljubnem paru lokalnih kart na M in N okrog točk p oz. $f(p)$. Drugače povedano, v paru lokalnih kart so vrednost in vsi parcialni odvodi do reda r razlike $f - g$ v točki p enaki 0. S pomočjo verižnega pravila preverimo, da je pogoj neodvisen od izbire para lokalnih kart v danih $\mathscr{C}^r$ atlasih na M in N. Prostor ekvivalenčnih razredov

$$J^r_p(M,N) = \mathscr{C}^r_p(M,N)/\sim_p$$

se imenuje *prostor r-brstičev preslikav $M \to N$ v točki $p \in M$*, element te množice pa je *brstič reda r v p*.

V primeru $M = \mathbb{R}^m$ in $N = \mathbb{R}^n$ je $J^r_p(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ ravno prostor Taylorjevih polinomov reda r preslikav $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Če fiksiramo še točko $q \in N$ in opazujemo le preslikave $f \in \mathscr{C}^r_p(M,N)$ z $f(p) = q$, dobimo množico brstičev $J^r_{p,q}(M,N) \subset J^r_p(M,N)$. Disjunktna unija

$$J^r(M,N) := \bigsqcup_{p \in M} J^r_p(M,N) = \bigsqcup_{p \in M,\ q \in N} J^r_{p,q}(M,N)$$

je *prostor r-brstičev preslikav $M \to N$*.

Primer 4.28 Prostor 0-brstičev je $J^0(M,N) = M \times N$, torej kartezični produkt obeh mnogoterosti. Prostor 1-brstičev je

$$J^1(M,N) = \big\{(p,q,\lambda) : p \in M,\ q \in N,\ \lambda : T_pM \to T_qN \text{ linearna preslikava}\big\}.$$

Prostori brstičev imajo naravno hierarhijo, saj r-brstič enolično določa r'-brstič za vsak $r' \in \{0,1,\dots,r\}$. Imamo torej *pozabljivo projekcijo*

$$pr_{r,r'} : J^r(M,N) \to J^{r'}(M,N),$$

ki pozabi (ignorira) odvode reda $> r'$ dane preslikave. Pri predstavitvi brstičev s Taylorjevimi polinomi ta projekcija preslika Taylorjev polinom reda r v Taylorjev polinom nižjega reda. Projekciji

$$pr_M : J^r(M,N) \to M, \qquad pr_N : J^r(M,N) \to N$$

priredita brstiču $j^r_p f \in J^r_{p,q}(M,N)$ njegovo izvorno točko $p = pr_M(j^r_p f)$ in destinacijsko točko $q = f(p) = \pi_N(j^r_p f)$.

Če sta M in N mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^k$ za nek $k \geq r$, lahko na prostor $J^r(M,N)$ naravno uvedemo strukturo mnogoterosti razreda $\mathscr{C}^{k-r}$. Opišimo osnovno idejo.

Za poljubno trojico nenegativnih celih števil $m,n,r \in \mathbb{Z}_+$ označimo s $\mathscr{P}^r_{m,n}$ množico vseh polinomskih preslikav $P = (P_1,P_2,\ldots,P_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, katerih komponente P_j so polinomi reda največ r na $\mathbb{R}^m$ z vrednostjo $P_j(0) = 0$. Očitno je $\mathscr{P}^r_{m,n}$ kartezični produkt n kopij prostora $\mathscr{P}^r_{m,1}$ skalarnih polinomov reda r na $\mathbb{R}^m$ brez konstantnega člena. Vsaka trojica $(p,q,P) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{P}^r_{m,n}$ določa preslikavo

$$\mathbb{R}^m \ni x \longmapsto q + P(x-p) \in \mathbb{R}^n,$$

katere r-jet v p (torej element množice $J^r_{p,q}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$) je določen s (p,q,P) in ta prireditev je bijektivna. Torej lahko identificiramo

$$J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \big\{(p,q,P) : p \in \mathbb{R}^m,\ q \in \mathbb{R}^n,\ P \in \mathscr{P}^r_{m,n}\big\} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{P}^r_{m,n}.$$

To je evklidski prostor $\mathbb{R}^N$ dimenzije

$$N = \dim J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = m + n + \dim \mathscr{P}^r_{m,n} = m + n(1 + \dim \mathscr{P}^r_{m,1}),$$

kjer je $\dim \mathscr{P}^r_{m,1}$ enaka številu monomov $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$ z $1 \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leq r$. Koeficiente teh monomov v zapisu polinoma $P \in \mathscr{P}^r_{m,n}$ vzamemo za evklidske koordinate na $\mathscr{P}^r_{m,n} = J^r_{0,0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$; slednje predstavljajo parcialne odvode reda $\leq r$ polinoma P v $0 \in \mathbb{R}^m$.

Pri transformacij koordinat na $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ se koordinate na $J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ transformirajo z elementarnimi operacijami (vsote, produkti), v katerih nastopajo parcialni odvodi do reda r prehodnih preslikav med kartami. Ti odvodi so razreda $\mathscr{C}^{k-r}$, če so prehodne preslikave razreda $\mathscr{C}^k$; torej so prehodne preslikave na prostoru $J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ razreda $\mathscr{C}^{k-r}$. S tem dobimo atlas razreda $\mathscr{C}^{k-r}$ na $J^r(M,N)$ za poljuben par $\mathscr{C}^k$ mnogoterosti M in N.

Vsaki preslikav $f : M \to N$ razreda $\mathscr{C}^r$ priredimo *r-brstično razširitev*

$$j^r f : M \to J^r(M,N), \qquad j^r_p f \in J^r_p(M,N) \text{ za vsak } p \in M,$$

tako da je $j^r_p f$ ravno r-brstič preslikave f v točki p. (V lokalnih koordinatah to pomeni njen Taylorjev polinom stopnje r.) Na primer,

$$j_p^0 f = (p, f(p)) \in J^0(M,N) = M \times N,$$
$$j_p^1 f = (p, f(p), df_p) \in J^1(M,N).$$

Če v 1-brstiču $j_p^1 f$ izpustimo izvorno točko $p \in M$, dobimo ravno tangentno preslikavo $Tf : TM \to TN$.

Sedaj lahko formuliramo Thomov brstično transverzalnostni izrek. Za poenostavitev formulacije opazujmo le gladke ($\mathscr{C}^\infty$) mnogoterosti in preslikave med njimi; v tem primeru so tudi prostori brstičev gladke mnogoterosti.

Izrek 4.29 (Brstično transverzalnostni izrek) *Naj bosta X in Y gladki mnogoterosti in naj bo $Z \subset J^r(X,Y)$ zaprta gladka podmnogoterost prostora r-brstičev preslikav $X \to Y$. Potem je za skoraj vsako gladko preslikavo $f : X \to Y$ njena r-brstična preslikava $j^r f : X \to J^r(X,Y)$ transverzalna na podmnogoterost Z.*

Izreka ne bomo podrobno dokazali, povedali pa bomo osnovno idejo. Podroben dokaz lahko najdemo npr. v monografiji Goresky in MacPherson [20].

Predpostavimo zaradi preprostosti razlage, da je X odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$. Recimo, da je $F : X \times \mathbb{R}^N \to Y$ neka gladka submerzivna družina preslikav (glej definicijo 4.14 in trditev 4.16). Tako kot prej označimo s $\mathscr{P}^r = \mathscr{P}^r_{n,N}$ prostor vseh polinomskih preslikav $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ stopnje največ r, le da sedaj vključimo še konstanten člen. Množica koeficientov takih polinomov je vektorski prostor $(\mathbb{R}^N)^k = \mathbb{R}^{kN}$ za nek $k = k(n,r) \in \mathbb{N}$. Za vsak element $a = (a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{R}^N)^k$ (kjer je $a_i \in \mathbb{R}^N$ za vsak $i = 1, \ldots, k$) označimo s $P(\cdot, a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ prirejen polinom v $x \in \mathbb{R}^n$ s koeficienti a in vrednostmi v $\mathbb{R}^N$. Preslikava

$$\Phi : X \times \mathscr{P}^r \to Y, \quad \Phi(x,a) = F(x, P(x,a)) \in Y$$

ima tedaj lastnost, da je njena r-brstična razširitev glede na spremenljivko x (s spremenljivko $a \in \mathbb{R}^{kN}$ kot parametrom)

$$j^r \Phi : X \times \mathbb{R}^{kN} \to J^r(X,Y), \quad (x,a) \mapsto j_x^r \Phi(\cdot, a)$$

submerzivna družina. Torej je po osnovnem transverzalnostnem izreku za skoraj vsak $a \in \mathbb{R}^{kN}$ preslikava $j^r\Phi(\cdot,a) : X \to J^r(X,Y)$ transverzalna na dano zaprto podmnogoterost $Z \subset J^r(X,Y)$. Če izberemo a blizu 0, je polinom $P(\cdot,a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ blizu ničelnemu polinomu enakormeno na kompaktih.

Če je X poljubna mnogoterost, jo pokrijemo s kartami in sledimo opisani konstrukciji v vsaki karti posebej. Polinome, ki jih uporabimo v neki karti, pomnožimo s primerno gladko funkcijo s kompaktnim nosilcem v dani karti.

Opomba 4.30 Transverzalnostni izrek za stratificirane podmnogoterosti.

Transverzalnostna izreka 4.13 in 4.29 veljata tudi v primeru, ko je $N \subset X$ oziroma $Z \subset J^r(M,X)$ gladka zaprta *stratificirana podmnogoterost*, ki izpolnjuje Whitneyev pogoj (a).

Zaprta podmnožica $N \subset X$ gladke mnogoterosti X je stratificirana gladka podmnogoterost, če obstaja končno zaporedje

$$N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k = \varnothing \tag{4.9}$$

zaprtih podmnožic $N_i \subset X$, tako da je za vsak $i = 0, 1, \ldots, k-1$ množica

$$S_i = N_i \setminus N_{i+1} \quad \text{(stratum)}$$

gladka podmnogoterost. Preslikava $f : M \to X$ je transverzalna na stratificirano podmnogoterost N (glede na izbrano stratifikacijo (4.9)), če je transverzalna na vsak stratum S_i v stratifikaciji. Whitneyev pogoj (a) je tehnični pogoj o tem, kako se S_i obnaša v okolici množice $\overline{N}_i \setminus N_i \subset N_{i+1}$. Ta pogoj zagotovi, da je množica gladkih preslikav $f : M \to X$, ki so transverzalne na N, odprta v šibki $\mathscr{C}^1$ Whitneyevi topologiji. Glej monografijo [20] za več o tej temi.

Generična dimenzija za imerzije. Kot primer uporabe izreka 4.29 ter njegove posplošitve za stratificirane podmnogoterosti (glej opombo 4.30) bomo dokazali bomo naslednji izrek.

Izrek 4.31 *Če je X gladka mnogoterost dimenzije, potem je generična gladka preslikava $X \to \mathbb{R}^k$ za $k \geq 2\dim X$ imerzija.*

Dokaz Naj bo $\dim X = n \in \mathbb{N}$. V prostoru 1-brstičev

$$J^1(X, \mathbb{R}^k) = \{(x, y, \lambda) : x \in X,\ y \in \mathbb{R}^k,\ \lambda : T_xX \to T_y\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \text{ linearna}\}$$

definirajmo zaprto podmnožico

$$Z = \{(x, y, \lambda) \in J^1(X, \mathbb{R}^k) : \operatorname{rang} \lambda < n\}. \tag{4.10}$$

Očitno je preslikava $f : X \to \mathbb{R}^k$ je imerzija natanko tedaj, ko njena 1-brstična razširitev $j^1 f : X \to J^1(X, \mathbb{R}^k)$ ne seka podmnožice Z.

Linearna preslikava $\lambda : T_xX \cong \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je podana s $k \times n$ matriko A. Pogoj $\operatorname{rang} \lambda < n$ je določen z enačbami, ki povedo, da je determinanta vsakega $n \times n$ minorja matrike A enaka nič. Izmed teh enačb ima pri vsaki matriki vsaj $k - n + 1$ enačb linearno neodvisne diferenciale. Npr., če je $\operatorname{rang} A = n - 1$, izberemo v njej nek $(n-1) \times n$ minor z linearno neodvisnimi vrsticami. Denimo, da je to kar prvih $n - 1$ vrstic. Potem je pogoj $\operatorname{rang} B < n$ za vse matrike B, ki so dovolj blizu A, določen z $n - k + 1$ enačbami, ki jih dobimo tako, da pogledamo $n \times n$ minorje, sestavljene iz prvih $n - 1$ vrstic matrike B skupaj z eno izmed preostalih $n - k + 1$ vrstic in zahtevamo, da je njihova determinanta enaka nič. Če je ta pogoj izpolnjen, sledi $\operatorname{rang} B = n - 1$. Teh $n - k + 1$ enačb za koeficiente matrike je med seboj neodvisnih, zato je množica matrik ranga $n - 1$ podmnogoterost kodimenzije $n - k + 1$ prostora $\mathrm{Mat}^{n,k}$ vseh $n \times k$ matrik. Matrike z nižjim rangom sestavljajo nižje razsežne podmnogoterosti v $\mathrm{Mat}^{n,k}$. S tem dobimo stratifikacijo

$$\mathrm{Mat}^{n,k} = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_{n+1} = \varnothing,$$

katere stratum $S_i = M_i \setminus M_{i+1}$ sestavljajo vse matrike ranga $n-i$ in ta stratum je podmnogoterost. Ugotovili smo, da je

$$\mathrm{codim}(S_1, \mathrm{Mat}^{n,k}) = k - n + 1,$$

naslednji stratumi S_i za $i > 1$ pa imajo višjo kodimenzijo.

Podmnožica $Z \subset J^r(X,Y)$ (4.10) ima nad vsako točko $(x,y) \in X \times Y$ vlakno $Z_{x,y}$, ki je izomorfno množici $M_1 \subset \mathrm{Mat}^{n,k}$ vseh matrik ranga $\leq n-1$. Odtod sledi, da je kodimenzija Z v mnogoterosti $J^r(X,Y)$ enaka $k-n+1$.

Iz brstično transverzalnostnega izreka za stratificirane podmnogoterosti (glej izrek 4.29 in opombo 4.30) sledi, da v primeru

$$n = \dim X < \mathrm{codim}(Z) = k - n + 1$$

za generično izbrano gladko preslikavo $f : X \to \mathbb{R}^k$ prirejena brstična preslikava $j^1 f : X \to J^1(X, \mathbb{R}^k)$ ne seka Z, zato je f imerzija. Pogoj $n < k - n + 1$ je ekvivalenten $2n \leq k$. Izrek 4.31 je s tem dokazan. $\square$

Podobno lahko dokažemo naslednji izrek. Dodatno dimenzijo lahko uporabimo za to, da ločimo vsak par točk, ki jih imerzija $X \to \mathbb{R}^{2\dim X}$ identificira.

Izrek 4.32 *Če je X gladka mnogoterost, potem je generična gladka preslikava $X \to \mathbb{R}^k$ za $k \geq 2\dim X + 1$ injektivna imerzija.*

4.5 Morsejeve funkcije

Naj bodo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$ in naj bo $\rho : U \to \mathbb{R}$ neka $\mathscr{C}^2$ funkcija na domeni $U \subset \mathbb{R}^n$.

Hessejeva forma funkcije ρ v točki $x \in U$ je simetrična kvadratična forma $\mathrm{Hess}_\rho(x) = \mathrm{Hess}_\rho(x; \cdot)$ na tangetnem prostoru $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, ki je definirana z

$$\mathrm{Hess}_\rho(x;\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_k}(x)\, \xi_j \xi_k, \qquad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Matrika $H_\rho(x) = \left(\frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ Hessejeve forme je Jacobijeva matrika *gradientne preslikave* $\nabla \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial x_n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$. Njena sled je *Laplacejev operator*:

$$\mathrm{sled}\, H_\rho(x) = \Delta \rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}(x). \tag{4.12}$$

Hessejeva forma se naravno pojavi kot člen drugega reda v Taylorjevem razvoju ρ:

$$\rho(x+\xi) = \rho(x) + d\rho_x(\xi) + \frac{1}{2}\mathrm{Hess}_\rho(x;\xi) + o(|\xi|^2).$$

Pri spremembi koordinat $x = \phi(y)$ se Hessejeva forma transformira po pravilu

$$\mathrm{Hess}_{\rho\circ\phi}(y;\xi) = \mathrm{Hess}_\rho(x; d\phi_y(\xi)), \tag{4.13}$$

prirejeni matriki pa zadoščata

$$H_{\rho\circ\phi}(y) = J\phi(y)^t H_\rho(x) J\phi(y). \tag{4.14}$$

Tu je $J\phi(y)$ Jacobijeva matrika preslikave ϕ v točki y.

Naslednji pojem je bistven v analizi topologije s pomočjo gladkih funkcij izčrpanja. Imenuje se po Marstonu Morseju, ki je to teorijo obravnaval v monografiji lea 1932; glej [36].

Definicija 4.33 *Kritična točka $x \in U$ funkcije ρ (to je točka, v kateri je $\nabla\rho(x) = 0$) se imenuje* Morsejeva točka*, če je Hessejeva forma* $\mathrm{Hess}_\rho(x)$ *nedegenerirana; ekvivalentno, Hessejeva matrika $H_\rho(x)$ ima maksimalni rang n.*

V tem primeru se število $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ negativnih lastnih vrednosti Hessejeve matrike $H_\rho(x)$ imenuje Morsejev indeks *kritične točke x.*

Funkcija ρ je Morsejeva, če so vse njene kritične točke Morsejeve.

Iz $H_\rho(x) = J(\nabla\rho)(x)$ sledi, da je kritična točka x Morsejeva natanko tedaj, ko ima gradientna preslikava $\nabla\rho : U \to \mathbb{R}^n$ maksimalni rang n v x.

Naj bo $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ Morsejeva kritična točka funkcije ρ. Izrek Sylvestra pove, da za vsako nedegenerirano simetrično $n\times n$ matriko H obstaja obrnljiva $n \times n$ matrika A, tako da je

$$A^t H A = I_k = \mathrm{diag}\big(\overbrace{-1,\ldots,-1}^{k},\overbrace{+1,\ldots,+1}^{n-k}\big)$$

diagonalna matrika, ki ima prvih k lastnih vrednosti -1, preostalih $n-k$ pa $+1$. Iz (4.14) vidimo, da linearna zamenjava koordinat $x \mapsto Ax$ privede ρ v naslednjo *Morsejevo normalno formo* v 0, ki jo je opisal Marston Morse leta 1932 [36]:

$$\rho(x) = \rho(0) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots x_n^2 + o(|x|^2). \tag{4.15}$$

Odtod sledi, da je Morsejeva kritična točka izolirana, torej v neki njeni odprti okolici ni drugih kritičnih točk. Ker so kritične točke rešitve enačbe $\nabla\rho(x) = 0$, to sledi tudi iz formule $H_\rho(x) = J(\nabla\rho)(x)$ in izreka o inverzni preslikavi.

Iz formule (4.13) vidimo, da se pojem Morsejeve kritične točke in Morsejevega indeksa ohranja pri $\mathscr{C}^2$ zamenjavi koordinat, zato sta ta dva pojma definirana tudi za $\mathscr{C}^2$ funkcije na $\mathscr{C}^2$ mnogoterostih.

Lahko je videti, da je množica vseh Morsejevih funkcij na $\mathscr{C}^2$ mnogoterosti M odprta v fini $\mathscr{C}^2$ Whitneyevi topologiji na prostoru $\mathscr{C}^2(M)$.

Iz brstično transverzalnostnega izreka 4.29 sledi naslednja trditev.

Trditev 4.34 *Vsako $\mathscr{C}^2$ funkcijo $M \to \mathbb{R}$ lahko aproksimiramo poljubno dobro v fini $\mathscr{C}^2$ topologiji z Morsejevo funkcijo, katere kritične točke ležijo na različnih nivojnicah in ki imajo v okolici vsake kritične točke obliko* (4.15) *brez ostanka.*

Dokaz Zaradi enostavnosti si najprej oglejmo primer, ko je M odprta množica v $\mathbb{R}^n$. V prostoru $J^2(M,\mathbb{R})$ vseh 2-brstičev funkcij na M definiramo zaprto podmnožico

$$Z = \left\{ j_x^2 f : x \in M,\ \nabla f(x) = 0,\ \det H_f(x) = 0 \right\}.$$

Množica Z torej sestoji iz vseh 2-brstičev, ki predstavljajo ne-Morsejeve kritične točke funkcij na M.

Množico Z lahko stratificiramo v obliki $Z = Z_0 \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_m = \varnothing$, tako da je vsaka razlika $S_k = Z_k \setminus Z_{k+1}$ (stratum) podmnogoterost. Stratum najvišje dimenzije

$$S_0 = Z \setminus Z_1 = \{x \in Z : \operatorname{rang} H_f(x) = n-1\}$$

in je podan z $n+1$ neodvisnimi enačbami (n enačb $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0,\ j = 1,\ldots,n$ in še enačba $\det H_f(x) = 0$), zato je kodimenzije $n+1$ v $J^2(M,\mathbb{R})$. Ostali stratumi so nižje dimenzije.

Iz izreka 4.29 sledi, da je za skoraj vsako gladko funkcijo $f : M \to \mathbb{R}$ njena 2-brstiča razširitev $j^2 f : M \to J^2(M,\mathbb{R})$ transverzalna na Z, kar iz dimenzijskih razlogov pomeni, da je $(j^2 f)(M) \cap Z = \varnothing$. Slednje ravno pomeni, da so vse kritične točke funkcije f Morsejeve.

Pogoju, da kritične točke ležijo na različnih nivojnicah, zlahka zadostimo zaradi odprtosti množice Morsejevih funkcij v fini $\mathscr{C}^2$ topologiji.

Zadnji del trditve se dokaže tako, da ostanek $o(|x|^2)$ v (4.15) pomnožimo s primerno izbrano funkcijo, ki je enaka nič v majhni okolici kritične točke in je enaka 1 izven malo večje okolice; glej [17, Lemma 3.10.3].

Podobno dokažemo trditev na vsaki gladki mnogoterosti, saj lahko podmnožico Z definiramo v poljubni lokalni karti na M in je njena definicija neodvisna od izbire karte. $\square$

4.6 Gladke mnogoterosti kot ročajniki

Trditev 4.34 omogoča opis vsake gladke mnogoterosti kot *ročajnika*, ki je dobljen z zaporednim dodajanjem ročajev. Najprej opišimo slednji pojem.

Naj bo D^k zaprta enotna krogla v $\mathbb{R}^k$. Njen rob $\partial D^k = S^{k-1}$ je $(k-1)$-razsežna sfera. (V primeru $k=0$ je $D^0 = \{0\}$ točka in $\partial D^0 = \varnothing$.) Produkt

$$H = H^{k,q} = D^k \times D^q$$

je *standardni ročaj* indeksa k in kodimenzije $m = k + q$. Njegov središčni k-razsežni disk (oz. krogla)

$$E = D^k \times \{0\}^q \subset H \tag{4.16}$$

se imenuje *stržen* ročaja, sferni cilinder $\partial D^k \times D^q = S^{k-1} \times D^q$ pa je *priključna množica* ročaja.

Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije $m \geq 1$ z robom ∂M, $k \in \{1, \ldots, m\}$ in

$$\phi : \partial D^k \times D^q = S^{k-1} \times D^q \to \partial M, \quad k + q = m,$$

gladek difeomorfizem na svojo sliko $\phi(S^{k-1} \times D^q) \subset \partial M$. Množica

$$\widetilde{M} = M \cup_\phi H,$$

ki jo dobimo iz disjunktne unije $M \sqcup H$ z identifikacijo vsake točke $x \in S^{k-1} \times D^q$ z njeno sliko $\phi(x) \in bM$, se imenuje *ročajnik*, dobljen z lepljenjem ročaja indeksa k na M z lepilno preslikavo ϕ.

Če primerno zgladimo vogale vzdolž $\phi(S^{k-1} \times S^{q-1})$, je $\widetilde{M}$ gladka mnogoterost z robom

$$\partial \widetilde{M} = \big(\partial M \setminus \phi(S^{k-1} \times D^q)\big) \cup_\phi (D^k \times S^{q-1}).$$

Opazimo, da ima $\widetilde{M}$ deformacijsko retrakcijo na $M \cup_\phi E$, kjer je $E \cong D^k$ (4.16) stržen ročaja H, ki je prilepljen vzdolž robne sfere $\partial E \cong S^{k-1}$ na rob ∂M s preslikavo ϕ.

S kirurgija tega tipa lahko opišemo spremembo topološke strukture podnivojnice gladke funkcije v Morsejevi kritični točki. Naslednji izrek je eden od osnovnih rezultatov Morsejeve teorije.

Izrek 4.35 *Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije m, $\rho : M \to \mathbb{R}$ gladka Morsejeva funkcija in $a < b$ regularni vrednosti ρ, tako da je množica*

$$M_{a,b} := \{x \in M : a \leq \rho(x) \leq b\}$$

kompaktna. Potem velja naslednje.

(a) *Če $M_{a,b}$ ne vsebuje nobene kritične točke funkcije ρ, so podnivojnice*

$$M_t = \{x \in M : \rho(x) \leq t\}$$

za $t \in [a,b]$ paroma difeomorfne in M_t je gladek deformacijski retrakt M_s za vsak par $a \leq t < s \leq b$.

(b) *Če $M_{a,b}$ vsebuje natančno eno kritično točko funkcije ρ in ima ta točka Morsejev indeks k, je M_b difeomorfna M_a z dodanim ročajem indeksa k. V primeru $k = 0$ je M_b is difeomorfna disjunktni uniji M_a in kompaktne m-razsežne krogle.*

V primeru (a) lahko najdemo difeomorfizem

$$M_{a,b} \xrightarrow{\cong} \{x \in M : \rho(x) = a\} \times [0,1]$$

z uporabo toka gladkega vektorskega polja V, ki zadošča $V(\rho) > 0$ na $M_{a,b}$. Lahko vzamemo kar gradient funkcije ρ. Če V pomnožimo s primerno izbrano pozitivno funkcijo, bo tok ϕ_t polja V preslikal nivojnico $\{\rho = a\}$ difeomorfno na $\{\rho = a+t\}$ za vsak $t \in [0, b-a]$. S tem dobimo difeomorfizem množice $M_{a,b}$ na produkt $\{\rho = a\} \times [0,1]$, z ustrezno modifikacijo pa tudi difeomorfizem $M_a = \{\rho \le a\}$ na $M_b = \{\rho \le b\}$.

Primer (b) lahko vidimo povsem eksplicitno z uporabo primera (a) ter analizo spremembe podnivojnice M_t pri prehodu kritične točke z uporabo modelne kvadratične Morsejeve funkcije (4.15). V okolici kritične točke se namreč ρ ujema s tako funkcijo v primerno izbranih lokalnih koordinatah.

Iz trditve 4.34 sledi, da ima vsaka mnogoterost M Morsejevo funkcijo izčrpanja $\rho : M \to \mathbb{R}$. To pomeni, da lahko zgradimo M z zaporednim dodajanjem ročajev indeksa med 0 do $m = \dim M$. Vsaka kritična točka nam da nov ročaj. Ob prehodu lokalnega minimuma funkcije ρ dobimo novo povezano komponento podnivojnice, ob prehodu lokalnega maksimuma pa nalepimo na podnivojnico disk maksimalne dimenzije $m = \dim M$ in s tem kompaktificiramo ustrezen konec mnogoterosti. Ročaji indeksa $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ predstavljajo hiperbolične točke. Ročaji, ki jih prilepimo na različnih korakih procesa, se lahko med seboj topološko krajšajo in natančna analiza topologije končne mnogoterosti ni preprosta.

Ročajna struktura ploskev. Naj bo M gladka ploskev in $\rho : M \to \mathbb{R}$ gladka Morsejeva funkcija izčrpanja. Za vsako regularno vrednost c funkcije ρ je nivojnica $\{\rho = c\}$ unija končno mnogo gladkih Jordanovih krivulj, $M_c = \{\rho \le c\}$ pa je kompaktna ploskev z gladkim robom $\partial M_c = \{\rho = c\}$.

Če ρ nima kritičnih vrednosti na intervalu $[a,b]$, je

$$M_{a,b} = \{x \in M : a \le \rho(x) \le b\} = M_b \setminus \mathring{M}_a$$

unija končno mnogo kompaktnih kolobarjev, enega za vsako povezano komponento nivojnice $\{\rho = a\}$ (glej izrek 4.35 (a)).

Kaj se zgodi v lokalnih minimumih in lokalnih maksimumih smo že opisali.

Naj bo sedaj $p \in M$ kritična točka z Morsejevim indeksom ena. Lahko vzamemo, da je to edina kritična točka na nivojnici $\{\rho = \rho(p)\}$. Izberimo števili $a < \rho(p) < b$ dovolj blizu $\rho(p)$, tako da je p edina kritična točka funkcije ρ na kompaktni množici $\{a \le \rho \le b\}$. Izrek 4.35 (b) pove, da je $M_b = \{\rho \le b\}$ difeomorfna ročajniku, ki ga dobimo s tem, da na podnivojnico $M_a = \{\rho \le a\}$ prilepimo trak $H = [-1,1]^2$ (ročaj indeksa 1), tako da se stranici $\{\pm 1\} \times [-1,1]$ traku H difeomorfno prilepita na disjunkta loka $I_\pm \subset \partial M_a$. Glede lege teh lokov imamo naslednje možnosti.

(i) I_+ in I_- ležita v isti povezani komponenti nivojnice $\partial M_a = \{\rho = a\}$.
(ii) I_+ in I_- ležita v isti povezani komponenti podnivojnice $M_a = \{\rho \le a\}$, toda v različnih povezanih komponentah njenega roba ∂M_a.
(iii) I_+ and I_- ležita v različnih povezanih komponentah množice M_a.

Dodatne podprimere dobimo z upoštevanjem orientabilnostnega tipa priključitve ročaja. Če je M_a orientabilna in je trak H na obeh lokih prilepljen v pravilni smeri upoštevaje koherentno orientacijo roba ∂M_a, je tudi M_b orientabilna; v nasprotnem primeru je nenorientabilna.

Denimo, da smo v orientabilnem primeru.

V primeru (i) imata ploskvi M_a in M_b isti topološki rod, rob ∂M_b pa ima eno povezano komponento več kot ∂M_a.

V primeru (ii) je $\mathrm{gen}(M_b) = \mathrm{gen}(M_a) + 1$, število povezanih komponent roba pa se zmanjša za 1. V tem primeru je $M_{a,b}$ *par hlač* (to je kompaktna ploskev roda ena s tremi robnimi komponentami) skupaj s končno mnogo paroma disjunktnimi kolobarji (glej sliko 4.1).

V primeru (iii) ročaj H povezuje različni povezani komponenti podnivojnice M_a, rod se ne spremeni in število povezanih komponent roba se zmanjša za 1.

Eulerjevo število ploskve se zmanjša za 1 v primerih (i) and (ii) in se poveča za 1 v primeru (iii).

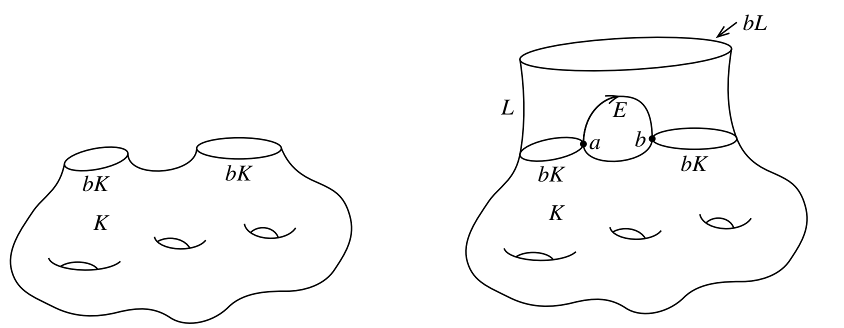


Fig. 4.1 Par hlač

Na sliki vidimo spodnji del K z dvema robnima komponentama. Nanj smo najprej nalepili lok E, pripet v robnih točkah iz različnih komponent roba ∂K. Nato smo lok odebelili, kot da bi nalepili trak H. Zatem smo dobljeno domeno povečali brez spremembe topologije do končne domene L. Zgornji del $L \setminus K$ je par hlač.

Poglavje 5
Liejeve grupe in Liejeve algebre

5.1 Definicija Liejeve grupe in primeri

Definicija 5.1 *1.* Realna Liejeva grupa *je gladka mnogoterost G, ki je hkrati grupa, tako da so algebraične operacije (produkt $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ in inverz $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$) gladke preslikave.*

2. Kompleksna Liejeva grupa *je kompleksna mnogoterost G, ki je hkrati grupa, tako da so grupne operacije holomorfne.*
3. *Naj bo G Liejeva grupa. Podmnožica $H \subset G$ je* Liejeva podgrupa*, če je podgrupa in obenem podmnogoterost Liejeve grupe G.*

Primer 5.2 (Primeri Liejevih grup.)

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ je komutativna (abelova) Liejeva grupa.
   $(\mathbb{C}^n, +)$ je kompleksna Liejeva grupa.
2. *Splošna linearna grupa*

   $$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$$

   nad $\mathbb{R}$ je odprta podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^{n^2}$ in je realno-algebraična Liejeva grupa.

   Produkt $(A, B) \mapsto A \cdot B$ je bilinearna operacija v koeficientih matrik.

   Inverz $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ je racionalna preslikava.
3. *Splošna linearna grupa* $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$ nad $\mathbb{C}$ je odprta podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{C}^{n^2}$ in je kompleksno-algebraična Liejeva grupa.
4. *Specialna linearna grupa*

   $$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

   nad $\mathbb{R}$ je zaprta Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{R})$.

Število $1 \in \mathbb{R}$ je regularna vrednost polinomske funkcije $GL_n(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{R}$, zato je $SL_n(\mathbb{R})$ gladka algebraična hiperploskev v $GL_n(\mathbb{R})$.

5. Specialna linearna grupa $SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$ nad $\mathbb{C}$ je kompleksno-algebraična Liejeva podgrupa (hiperploskev) kompleksne Liejeve grupe $GL_n(\mathbb{C})$.
6. *Ortogonalna grupa* $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^T A = I\}$ nad $\mathbb{R}$ je algebraična Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$.
Če definiciji zamenjamo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$, dobimo *kompleksno ortogonalno grupo* $O_n(\mathbb{C})$, ki je kompleksno algebraična podmnogoterost $GL_n(\mathbb{C})$.
Ni težko videti, da je $O_n(\mathbb{R})$ definirana z $n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ neodvisnimi enačbami v $GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, zato je
$$\dim_{\mathbb{R}} O_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$
Podobno je
$$\dim_{\mathbb{C}} O_n(\mathbb{C}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$
7. *Unitarna grupa* $U_n = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \overline{A}^T A = I\}$ je zaprta realna Liejeva podgrupa splošne linearne grupe $GL_n(\mathbb{C})$ nad $\mathbb{C}$, ni pa kompleksna podmnogoterost $GL_n(\mathbb{C})$. V resnici je $U(n)$ *povsem realna podmnogoterost* $GL_n(\mathbb{C})$, kar pomeni, da njen tangenten prostor v poljubni točki ne vsebuje nobenega netrivialnega kompleksnega podprostora. Njena realna dimenzija je
$$\dim_{\mathbb{R}} U_n = n^2 = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} GL_n(\mathbb{C}).$$
Grupa $GL_n(\mathbb{C})$ je kompleksifikacija podgrupe U_n in jo vsebuje kot maksimalno povsem realno podgrupo.
8. *Specialna ortogonalna grupa nad* $\mathbb{R}$,
$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\} = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R}),$$
je zaprta Liejeva podgrupa kodimenzije 1 ortogonalne grupe $O_n(\mathbb{R})$. Podobno je
$$SO_n(\mathbb{C}) = \{A \in O_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\} = O_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C}),$$
$$SU_n(\mathbb{C}) = \{A \in U_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\} = U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C}).$$
Očitno je $U_1 = S^1 \subset \mathbb{C}$ enotna krožnica v $\mathbb{C}$. Imamo kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov
$$1 \longrightarrow SU_n \longrightarrow U_n \xrightarrow{\det} U_1 = S^1 \longrightarrow 1.$$
9. Za $n > 2$ ima ortogonalna grupa $O_n(\mathbb{R})$ fundamentalno grupo izomorfno $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Njen enostavno povezan dvojni krov je *spinska grupa* $Spin_n$. Obstaja

kratko eksaktno zaporedje homomorfizmov

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Spin_n \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow 1.$$

10. Če je $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_k$ diskretna aditivna pogrupa v $\mathbb{R}^n$, je kvocient $\mathbb{R}^n/\Gamma$ je Liejeva grupa z operacijo $+$, podedovano iz $\mathbb{R}^n$. Vsaka Liejeă grupa $\mathbb{R}^n/\Gamma$ se imenuje (realen) torus. Ta grupa je kompaktna natanko tedaj, ko ima podgrupa $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ maksimalni rang enak n.
11. Podobno kot v prejšnji točki je za vsako diskretno aditivno podgrupo $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ kvocient $\mathbb{C}^n/\Gamma$ kompleksna Liejeva grupa, ki se imenuje *kompleksen torus*.

Naj bo $1 \in G$ enota Liejeve grupe G. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo levo množenje z g:

$$l_g : G \to G, \quad l_g(g') = gg' \text{ za vsak } g' \in G$$

in desno množenje z g:

$$r_g : G \to G, \quad r_g(g') = g'g \text{ za vsak } g' \in G.$$

Obe preslikavi l_g, r_g sta difeomorfizma z inverzoma

$$(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}, \quad (r_g)^{-1} = r_{g^{-1}}.$$

Za vsak par $g, h \in G$ veljajo naslednje lastnosti:

$$l_{hg} = l_h \circ l_g, \quad r_{hg} = r_g \circ r_h, \quad l_h \circ r_g = r_g \circ l_h.$$

Definicija 5.3 *Vektorsko polje v na Liejevi grupi G se imenuje* levo invariantno, *če je $(l_g)_* v = v$ za vsak $g \in G$, in* desno invariantno, *če je $(r_g)_* v = v$ za vsak $g \in G$.*

5.2 Liejeva algebra in invariantna vektorska polja

Definicija 5.4 *Naj bo G Liejeva grupa z enoto* 1. *Njena* Liejeva algebra *je*

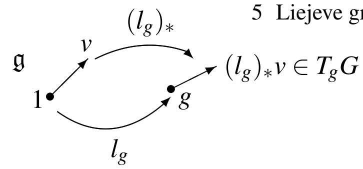
$$\mathfrak{g} := T_1 G = \textit{tangentni prostor na } G \textit{ v enoti } 1 \in G.$$

Zaenkrat je $\mathfrak{g}$ samo vektorski prostor, a bomo na njem naravno vpeljali Liejev oklepaj, tako da bo postal Liejeva algebra.

Vsakemu elementu $v \in \mathfrak{g}$ priredimo vektorsko polje $V = \tilde{v}$ na G s predpisom:

$$V_g = d(l_g)|_1 \cdot v = (l_g)_* v \in T_g G, \quad g \in G. \tag{5.1}$$

Očitno je V gladko vektorsko polje na G, saj so grupne operacije gladke.



Trditev 5.5 *Vektorsko polje V (5.1) na G je levo invariantno. Če je W levo invariantno vektorsko polje na G z $W_1 = v = V_1$, je $W = V$.*

Dokaz Prva trditev sledi iz naslednjega računa, ki velja za vsak par $g, h \in G$:

$$(l_h)_*(V_g) = (l_h)_*(l_g)_* v = (l_h \circ l_g)_* v = (l_{hg})_* v = V_{hg} = V_{l_h(g)}.$$

Druga trditev sledi iz $W_g = (l_g)_* v = V_g$ za vsak $g \in G$, pri čemer prva enakost velja, ker je W levo invariantno. □

Na podoben način elementu $v \in \mathfrak{g}$ priredimo vektorsko polje

$$\widetilde{V}_g = d(r_g)_1\, v = (r_g)_* v \in T_g G, \qquad g \in G.$$

Kot zgoraj vidimo, da je polje $\widetilde{V}$ desno invariantno, to je, $(r_h)_* \widetilde{V} = \widetilde{V}$ za vsak $h \in G$.

Opomba 5.6 V splošnem je $V \neq \widetilde{V}$, razen če je G abelova grupa.

Primer 5.7 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$ (enota grupe je 0)
Liejeva algebra $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
$\tilde{v} = V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (vektor $v = V_0$ translatiramo po $\mathbb{R}^n$)

2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $v \in T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, l_x je množenje z x. Prirejeno levo invariantno vektorsko polje je $V_x = vx\frac{\partial}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.
Bazno levo invariantno vektorsko polje, ki pripada $1 \in T_1\mathbb{R} = \mathbb{R}$, je $x\frac{\partial}{\partial x}$.

Trditev 5.8 *Če sta V, W levo invariantni vektorski polji na G, potem so tudi vektorska polja $V + W$, cV ($c \in \mathbb{R}$) in $[V, W]$ levo invariantna.*

Dokaz Naj bo l poljubno levo množenje na G. Potem je

$$l_*(V + W) = l_*V + l_*W = V + W,$$

ker sta V in W levo invariantni. Podobno

$$l_*(cV) = c(l_*V) = cV, \quad l_*([V, W]) = [l_*V, l_*W] = [V, W].$$

Trditev je dokazana. □

Označimo z $\mathfrak{X}(G)$ Liejevo algebro vseh gladkih vektorskih polj na G. Liejev oklepaj na $\mathfrak{X}(G)$ je komutator polj:

$$(V,W) \longmapsto [V,W] = L_V W.$$

Oglejmo si vložitev, ki jo podaja (5.1):

$$T_1 G = \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G), \quad \mathfrak{g} \ni v \xmapsto{\Phi} V \in \aleph(G).$$

Iz trditve 5.8 sledi, da je slika vložitve $\Phi : \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\aleph(G)$ vseh vektorskih polj.

Posledica 5.9 *Obstaja natanko ena struktura Liejeve algebre na tangentnem prostoru $\mathfrak{g} = T_1 G$, za katero je vložitev $\Phi : \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejev izomorfizem $\mathfrak{g}$ na podalgebro levo invariantnih polj na G.*

Trditev 5.10 *Tangentni sveženj vsake Liejeve grupe G je trivialen.*

Dokaz Izberimo bazo $v_1, \ldots, v_n$ vektorskega prostora $T_1 G = \mathfrak{g}$. Naj bodo $V^1, \ldots, V^n$ pripadajoča levo invariantno vektorska polja na G. Ker je

$$V^j_g = d(l_g)_1 \cdot v_j, \quad g \in G, \; j = 1, \ldots, n$$

in je levo množenje $l_g : G \to G$ difeomorfizem grupe G, so vektorji $V^1_g, \ldots, V^n_g$ baza tangetnega prostora $T_g G$ za vsak $g \in G$. Preslikava

$$G \times \mathbb{R}^n \ni (g, (c_1, \ldots, c_n)) \xmapsto{\Phi} \sum_{j=1}^{n} c_j V^j_g \in T_g G$$

je izomorfizem vektorskih svežnjev. $\square$

Trditev 5.11 *Vsako levo invariantno (ali desno invariantno) vektorsko polje na Liejevi grupi je kompletno, to je, njegov tok ϕ_t obstaja za vsak $t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz Naj bo V levo invariantno vektorsko polje na G in $\gamma(t)$ $(t \in I \subset \mathbb{R})$ njegova tokovnica z $\gamma(0) = 1 \in G$. Izberimo element $g \in G$ in si oglejmo pot

$$\lambda(t) = l_g(\gamma(t)) = g \cdot \gamma(t) \in G, \quad t \in I.$$

Velja $\lambda(0) = g\,\gamma(0) = g$ in

$$\dot\lambda(t) = (l_g)_* \dot\gamma(t) = (l_g)_* V_{\gamma(t)} = V_{g\gamma(t)} = V_{\lambda(t)}, \quad t \in I.$$

Torej je $\lambda(t)$ $(t \in I)$ tokovnica polja V, ki je v času $t = 0$ v točki g. To pomeni, da fundamentalna domena toka polja V vsebuje množico $G \times I \subset G \times \mathbb{R}$. Odtod sledi, da je V kompletno (njegova fundamentalna domena je $G \times \mathbb{R}$). $\square$

Trditev 5.12 *Tokovnica $\gamma(t)$ levo invariantnega vektorskega polja V skozi enoto $\gamma(0) = 1 \in G$ je enoparametrična podgrupa grupe G:*

$$\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma(s) \;\; \textit{za vsak } s,t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$ in si oglejmo poti

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t+s), \qquad \mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(s)\gamma(t).$$

Obe sta tokovnici polja V, ki sta pri $t = 0$ v točki $\gamma(s)$. Zaradi enoličnosti tokovnic sledi, da sovpadata in trditev sledi. $\square$

Primer 5.13 1. $G = (\mathbb{R}^n, +)$
$\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$[\cdot,\cdot] = 0$ ker je G abelova
Levo invariantna polja so konstantna polja
$v, w \in \mathfrak{g}$, $[v,w] = [V,W]_0$ (ker imata V,W konstantne koeficiente), $V_0 = v$, $W_0 = w$.

2. $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n = T_I GL_n(\mathbb{R}) = T_I\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \times n$ matrike), $I =$ identična matrika, $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n$, V^A pripadajoče levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$, $X \in GL_n(\mathbb{R})$
$\gamma(t) = I + tA \in GL_n(\mathbb{R})$ za majhne $|t|$, $\gamma(0) = I$, $\dot\gamma(0) = A$ tangentni vektor poti γ.

$$\begin{aligned}(V^A)_X &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} l_X \cdot \gamma(t)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(I+tA)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (X+tXA)\\ &= XA \in T_X GL_n(R) \cong \mathbb{R}^{n\times n}.\end{aligned}$$

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{n\times n}$ z $X = (x_{ij})$:

$$(V^A)_X = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Vsota $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}$ je element (i,j) matrike XA, ki predstavlja levo invariantno vektorsko polje V^A v točki X. Naj bo še $B \in \mathfrak{gl}_n$ in

$$(V^B)_X = \sum_{l,m=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n} x_{lp}b_{pm}\right)\frac{\partial}{\partial x_{lm}}.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}\left[V^A, V^B\right] &= \sum_{i,j,k,l,m,p}\left(x_{ik}a_{kj}\frac{\partial(x_{lp}b_{pm})}{\partial x_{ij}}\frac{\partial}{\partial x_{lm}} - x_{lp}b_{pm}\frac{\partial(x_{ik}a_{kj})}{\partial x_{lm}}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right) =\\ &= \sum_{i,j,k,m} x_{ik}a_{kj}b_{jm}\frac{\partial}{\partial x_{im}} - \sum_{i,j,k,p} x_{ip}b_{pk}a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\end{aligned}$$

Sedaj poglejmo vrednosti pri $X = I$: $x_{ip} = \delta_{ip}$, $x_{ik} = \delta_{ik}$. Dobimo

$$\left[V^A, V^B\right]_I = \underbrace{\sum_{i,j,m} a_{ij} b_{jm}}_{(AB)_{im}} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \underbrace{\sum_{i,j,k} b_{ik} a_{kj}}_{(BA)_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \rightsquigarrow AB - BA.$$

Torej je $[V^A, V^B]$ levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$, ki pripada matriki $[A,B] = AB - BA \in \mathfrak{gl}_n$.
$\mathfrak{gl}_n = (\mathbb{R}^{n\times n}, [\cdot,\cdot])$, kjer je Liejev oklepaj $[\cdot,\cdot]$ matrični komutator.

Izračunajmo še tok vektorskega polja $V^A_X = XA$, $X \in GL_n(\mathbb{R})$. Njegova tokovnica $t \mapsto X(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ skozi $X(0) = I$ zadošča

$$\dot{X}(t) = V^A_{X(t)} = X(t)A.$$

Rešitev te matrične diferencialne enačbe je

$$X(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Ker je tok levo invarianten, sledi, da je $\phi_t(X) = Xe^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$.

Desno invariantno vektorsko polje, prirejeno matriki $A \in \mathfrak{gl}_n$, je $\widetilde{V}_X = AX$ $(X \in GL_n(\mathbb{R}))$ in njegov tok je $\psi_t(X) = e^{tA}X$. V tem primeru je

$$[\widetilde{V}^A, \widetilde{V}^B] = BA - AB = -[A,B] = -[V^A, V^B].$$

5.3 Eksponentna preslikava na Liejevi grupi

Naj bo G Liejeva grupa. Definirali bomo preslikavo

$$\exp : \mathfrak{g} = T_1 G \to G.$$

Modelni primer: $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \times n$ matrike);

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Eksponentno prelikavo na poljubni Liejevi grupi definiramo na naslednji način. Vektorju $v \in \mathfrak{g}$ smo priredili levo invariantno polje V na G s predpisom

$$V_g = (dl_g)_1 v \in T_g G, \quad g \in G.$$

Ker je polje V kompletno, obstaja tokovnica $\phi_t(1)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Sedaj definiramo

$$\exp v = \phi_1(1).$$

V primeru, ko je $G = GL_n(\mathbb{R})$, $v = A \in \mathfrak{gl}_n$, $\phi_t^A(I) = e^{tA}$, dobimo

$$\exp(A) = \phi_1^A(I) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Preslikava $\exp : \mathfrak{g} \to G$ je gladka, $\exp(0) = 1$.

Trditev 5.14 *Diferencial eksponentne preslikave* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *v* $0 \in \mathfrak{g}$ *je identična preslikava na Liejevi algebri* $\mathfrak{g}$*:*

$$d\exp|_0 : T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_1 G = \mathfrak{g}, \qquad d\exp|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}.$$

Dokaz Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje na G. Označimo z $\lambda_v(t) = \phi_t^v(1)$ tok polja V. Po definiciji je torej $\exp(v) = \lambda_v(1)$ za vsak $v \in \mathfrak{g}$.
Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Ker je sV levo invariatno polje, prirejeno vektorju $sv = sV|_1 \in \mathfrak{g}$, je preslikava $t \mapsto \lambda_{sv}(t)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $1 \in G$. Trdimo:

$$\lambda_{sv}(t) = \lambda_v(st). \tag{5.2}$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt}\lambda_v(st) = \underbrace{\frac{d}{du}\lambda_v(u)}_{V_{\lambda_v(st)}}\underbrace{\frac{du}{dt}}_{s} = s \cdot V_{\lambda_v(st)}.$$

To pomeni, da je tudi $t \mapsto \lambda_v(st)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $1 \in G$. Iz enoličnosti tokovnic sledi $\lambda_{sv}(1) = \lambda_v(s)$ in je formula (5.2) dokazana. Če vstavimo v to formulo $t = 1$, dobimo

$$\exp(sv) = \lambda_{sv}(1) = \lambda_v(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Z odvajanjem po s pri $s = 0$ sledi

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sv) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \lambda_v(s) = v.$$

Ker je $s \mapsto sv \in \mathfrak{g}$ pot s tangentnim vektorjem v, je po geometrijski definiciji diferenciala leva stran zgornje enačbe enaka $d\exp|_0 \cdot v$. Enačba torej pove:

$$d\exp|_0 \cdot v = v, \quad v \in \mathfrak{g}.$$

Opomba 5.15 Izrek o inverzni preslikavi pove, da $\exp : \mathfrak{g} \to G$ preslika neko okolico $0 \in \mathfrak{g}$ v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ difeomorfno na neko okolico identitete $1 \in G$. V splošnem ta preslikava ni surjektivna na G in lahko ima kritične točke.

Dominanten sprej na Liejevi grupi. S translacijo eksponentne preslikave z grupnim produktom dobimo *dominanten sprej* na G. To je še posebej zanimivo na kompleksnih Liejevih grupah, kjer sledi, da je vsaka taka grupa Oka mnogoterost. Konstrukcija je naslednja. Naj bo $\dim G = n$. Produkt $G \times \mathfrak{g} \cong G \times \mathbb{R}^n$ je trivialen vektorski sveženj nad G. Definiramo preslikavo $s : G \times \mathfrak{g} \to G$ s predpisom

$$s(g, v) = ge^v = l_g(e^v), \quad s(g, 0) = g.$$

Njen diferencial v točki $(g, 0)$ iz ničelnega prereza je linearna preslikava

$$ds_{(g,0)} : T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g}) \to T_g G.$$

Tangentni prostor $T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g})$ je direktna vsota $T_g G \oplus T_0 \mathfrak{g}$, kjer je drugi sumand tangenta na vlakno (t.i. vertikalni tangentni prostor v točki $(g, 0)$). Zožitev diferenciala na drugo komponento $\mathfrak{g}$ je enak diferencialu preslikave $\mathfrak{g} \ni v \mapsto l_g(e^v)$ pri $v = 0$. Po verižnem pravilu je ta enak

$$d(l_g)_1 \circ d(e^v)_0 = d(l_g)_1 : \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} T_g G,$$

torej je izomorfizem.

5.4 Liejeve podgrupe in podalgebre

Naj bosta G in G' Liejevi grupi in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ njuni Liejevi algebri.

Definicija 5.16 *Gladka preslikava $F : G \to G'$, ki je hkrati homomorfizem grup, se imenuje* homomorfizem Liejevih grup.

Naslednjo trditev naj bi dokazali na vajah.

Trditev 5.17 *Naj bo $F : G \to G'$ homomorfizem Liejevih grup.*

1. *Za vsako levo invariantno vektorsko polje V na G obstaja natanko eno levo invariantno polje $\widetilde{V}$ na G', tako da velja $dF_g V_g = \widetilde{V}_{F(g)}$ za vsak $g \in G$.*
2. *Diferencial $dF_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ v identiteti $1_G \in G$ je homomorfizem Liejevih algeber.*
3. *Jedro $\ker dF_1$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*
4. *Slika $dF_1(\mathfrak{g})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$.*
5. *Rang preslikave F je konstanten (neodvisen od točke $g \in G$).*
6. *Jedro $H = \ker F = \{g \in G : F(g) = 1_{G'}\}$ je Liejeva podgrupa grupe G.*

Posledica 5.18 *Če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, je njena Liejeva algebra $\mathfrak{h} = T_1 H$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g} = T_1 G$.*

Dokaz Uporabimo prejšnjo trditev za inkluzijo $F : H \hookrightarrow G$. $\square$

Primer 5.19 Naj bo $\mathfrak{gl}_n$ Liejeva algebra vseh $n \times n$ matrik s komutatorjem. Liejeva algebra $\mathfrak{sl}_n$ specialne linearne grupe $SL_n(\mathbb{R})$ je enaka

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n : \mathrm{sl} A = 0\}.$$

To vidimo takole. Naj bo $A \in \mathfrak{sl}_n$. Tedaj obstaja pot

$$X(t) = I + tA + O(t^2) \in SL_n(\mathbb{R}),$$

torej $\det X(t) = \det(I + tA + O(t^2)) = 1$ za vsak t. Če odvajamo po t pr $t = 0$, dobimo

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(I + tA + O(t^2)) = \mathrm{sl} A.$$

Velja tudi obratno: vsaka matrika A z ničelno sledjo leži v $\mathfrak{sl}_n$.

Podobno vidimo, da je Liejeva algebra $\mathfrak{o}_n$ ortogonalne grupe $O_n(\mathbb{R})$ enaka

$$\mathfrak{o}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n : A + A^T = 0\}.$$

To dobimo z odvajanjem enačbe

$$(I + tA + O(t^2))(I + tA^T + O(t^2)) = I$$

pri $t = 0$. Liejeva algebra $\mathfrak{o}_n$ torej sestoji iz antisimetričnih matrik.

Sedaj bomo dokazali naslednji izrek v obratni smeri.

Izrek 5.20 *Naj bo G Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g} = T_1 G$. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa $H \subset G$ z Liejevo algebro $\mathfrak{h} = T_1 H$.*

Dokaz Izberemo bazo $v_1, \ldots, v_d \in \mathfrak{h} = \mathbb{R}^d$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_d$ prirejena levo invariantna polja. Ta napenjajo podsveženj $E \subset TG$ ranga d tangentnega svežnja TG z vlaknom

$$E_g = \mathrm{Lin}\{V_1(g), \ldots, V_d(g)\}, \quad g \in G.$$

Trdimo, da je E involutiven podsveženj. V ta namen moramo dokazati, da je komutator $[V_j, V_k]$ tangenten na E za vsak $j, k = 1, \ldots, d$. To polje je levo invariantno vektorsko polje, ki pripada komutatorju $[v_j, v_k] \in \mathfrak{g}$. Ker je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra, je $[v_j, v_k] \in \mathfrak{h}$, torej je

$$[v_j, v_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} v_i, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Ker se operacije na vektorjih iz $\mathfrak{g}$ ujemajo z operacijami na prirejenih levo invariantnih vektorskih poljih, odtod sledi

$$[V_j, V_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} V_i.$$

Polje na desni pa je seveda tangentno na E, saj je linearna kombinacija tangentnih polj. Torej je E involutiven.
Po Frobeniusovemu izreku obstaja natanko ena povezana maksimalna integralna podmnogoterost $H \subset G$ skozi točko 1. H je injektivno imerzirana podmnogoterost v G, ki je dobljena kot orbita tokov vektorskih polj $V_1, \ldots, V_d$ skozi 1. Lokalno v okolici $1 \in G$ dobimo H z eksponenciranjem vektorjev iz Liejeve algebre $\mathfrak{h}$. Ni težko dokazati, da je H tudi podgrupa grupe G. □

Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek.

Izrek 5.21 (Ado) *Vsaka končno dimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfna neki Liejevi podalgebri $\mathfrak{gl}_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$.*

Posledica 5.22 *Za vsako Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ obstaja povezana Liejeva grupa G, ki ima $\mathfrak{g}$ za svojo Liejevo algebro: $T_1 G = \mathfrak{g}$.*

Če je $\widehat{G} \xrightarrow{\pi} G$ univerzalni krov ($\widehat{G}$ enostavno povezana Liejeva grupa), potem je π lokalni difeomorfizem:

$$T_1 \widehat{G} = T_1 G = \mathfrak{g}$$

Opomba 5.23 V splošnem univerzalni krov neke matrične Liejeve grupe (podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$) ni matrična grupa.

Primer 5.24 SO_{2n}, $n \geq 2$. Npr., SO_4 ima fundamentalno grupo $\pi_1(SO_4) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin_4 \xrightarrow[\text{krov}]{\text{dvolistni univerzalni}} SO_4 \to 1$$

Primer 5.25

$$1 \to S^3 = SU_2 \hookrightarrow U_2 \xrightarrow{det} S^1 = U_1 \to 1,$$

$$\pi_1(U_2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

5.5 Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe

Vsako Liejevo grupo G lahko vložimo v grupo difeomorfizmov Diff$G$ tako, da vsakemu elementu $g \in G$ priredimo levi produkt s tem elementom:

$$G \hookrightarrow \mathrm{Diff} G, \quad g \mapsto l_g.$$

Avtomorfizem Liejeve grupe G je difeomorfizem $G \to G$, ki je tudi grupni homomorfizem. Množico vseh avtomorfizmov označimo z Aut$G$. Levo množenje l_g ni avtomorfizem Liejeve grupe, ker identiteto preslika v g.

Primer 5.26 Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo *notranji avtomorfizem* $\sigma_g \in \mathrm{Aut}\, G$ s predpisom

$$\sigma_g(h) = ghg^{-1}, \quad h \in G.$$

Preverimo, da je to res avtomorfizem:

$$\sigma_g(h_1 h_2) = gh_1 h_2 g^{-1} = gh_1 g^{-1} gh_2 g^{-1} = \sigma_g(h_1) \cdot \sigma_g(h_2).$$

Naj bo G povezana Liejeva grupa in $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$. Diferencial α_* preslika vsako levo invariantno polje na G v levo invariantno polje; torej α_* inducira Liejev izomorfizem Liejeve algebre levo invariantnih vektorskih polj na G samo nase. Njegova vrednost v identiteti $1 \in G$ je torej Liejev izomorfizem

$$d\alpha_1 : T_1 G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}.$$

Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje: $V_1 = v$. Označimo $w = d\alpha_1(v) \in \mathfrak{g}$ in W levo invariantno polje z $W_1 = w$. Potem je $\alpha_* V = W$. Označimo s ϕ_t tok polja V in s ψ_t tok polja W. Iz $\alpha_* V = W$ sledi

$$\alpha \circ \phi_t = \psi_t \circ \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uporabimo to identiteto pri $t = 1$ in na začetnem elementu $1 \in \mathfrak{g}$:

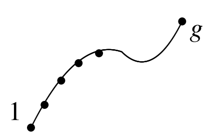
$$\alpha \circ \phi_1(1) = \psi_1 \circ \alpha(1) = \psi_1(1).$$

Po definiciji eksponentne preslikave je $e^v = \phi_1(1)$ in $e^w = \psi_1(1)$. Zgornja enačba torej pove:

$$\alpha(e^v) = e^w = e^{d\alpha_1 \cdot v}.$$

Posledica 5.27 *Če je G povezana Liejeva grupa in je $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ avtomorfizem z $d\alpha_1 = \mathrm{Id}$, potem je $\alpha = \mathrm{Id}_G$.*

Dokaz Če je $d\alpha_1 = \mathrm{Id}$, sledi $\alpha(e^v) = e^v$, $\forall v \in \mathfrak{g}$. Vemo, da je množica $U = \{e^v \in G : v \in \mathfrak{g}\}$ okolica $1 \in G$. Ker je na tej okolici $\alpha = \mathrm{Id}$ in je G povezana, sledi $\alpha = \mathrm{Id}_G$. Razlog je v tem, da lahko vsak element $g \in G$ zapišemo kot končen produkt $g = g_1 g_2 \dots g_N$ elementov $g_j \in U$.



$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_N, \qquad \forall g_j = e^{v_j}$$
$$\alpha(g) = \alpha(e^{v_1})\alpha(e^{v_2}) \dots \alpha(e^{v_N}) = g$$

S tem je posledica dokazana. □

Dobili smo torej reprezentacijo grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}\, G$ kot grupo linearnih avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Aut}\, G \ni \alpha \mapsto d\alpha_1 \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g} = \text{ grupa vseh Liejevih avtomorfizemov } \mathfrak{g}.$$

Ta reprezentacija je zvesta (faithful), kar je ravno prejšnja posledica.

Oglejmo si sedaj prirejeno reprezentacijo podgrupe vseh konjugiranj σ_g:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Aut}\, G & \xrightarrow{\text{dif. v 1}} & \mathrm{Aut}\mathfrak{g} \\ g & \longmapsto & \sigma_g & \stackrel{Ad}{\longmapsto} & d(\sigma_g)_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Ad : G &\to \ \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g} \quad \text{je adjungirana reprezentacija } G \\ g &\mapsto d(\sigma_g)_1 \end{aligned}$$

Z diferenciranjem preslikave $Ad : G \to \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ v identiteti $1 \in G$ dobimo adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ v $\mathrm{End}\mathfrak{g}$:

$$d(Ad)_1 : T_1 G = \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} T_1 \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g} = \mathrm{End}\mathfrak{g}.$$

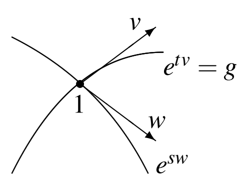
Trditev 5.28 *Za vsak $v \in \mathfrak{g}$ velja*

$$ad(v)w = [w, v], \qquad w \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz Izberemo lokalne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na G v okolici $1 \in G$, $x(1) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Naj bosta

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \ni v \rightsquigarrow V &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \mathfrak{g} \ni w \rightsquigarrow W &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

levo invariantni vektorski polji na G. Fiksirajmo $t \in \mathbb{R}$.



$$\sigma_g(e^{sw}) = g e^{sw} g^{-1} = e^{tv} e^{sw} e^{-tv}$$

Za fiksen t je

$$Ad(e^t v) w = d\sigma(e^{tv}) \Big|_1 \cdot w = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sigma(e^{tv}) e^{sw}.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo:

$$ad(v)w = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Ad(e^{tv})w) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\right|_{t=s=0} e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Z Liejevim razvojem toka ni težko videti, da je ta izraz enak $[w, v]$. $\square$

Poglavje 6
Diferencialne forme in integracija

Do sedaj smo se ukvarjali z diferencialnim računom na mnogoterostih, v tem poglavju pa bomo spoznali integracijo na mnogoterostih. V ta namen si bomo najprej ogledali pojem diferencialnih form in se seznanili z operacijami z njimi. Poleg običajnih algebraičnih operacij, ki sledijo dejstvu, da so diferencialne forme prerezi vnanjih potenc kotangentnega svežnja (torej prerezi vektorskih svežnjev), uvedemo algebraično operacijo vnanji produkt in diferencialni operaciji povlek in vnanji diferencial. Slednja je posplošitev operacij kot so diferencial in gradient funkcije, rotor in divergenca vektorskega polja in podobno.

Integral diferencialne forme na mnogoterosti je posplošitev pojma integrala vektorskega polja vzdolž orientirane krivulje (cirkulacija) ter integrala pretoka vektorskega polja skozi orientirano ploskev v evklidskem prostoru (fluks). Diferencialne forme in njihove posplošitve, *potoki*, so objekti, ki vsebujejo analogno informacijo kot mere in se pri zamenjavi koordinat transformirajo enako kot klasičen n-terni integral na domenah v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$, ob pogoju, da ta zamenjava koordinat ohranja orientacijo. Definiramo lahko torej integral diferencialne n-forme na orientirani n-razežni mnogoterosti, v kolikor ni problemov s konvergenco (in teh ni na kompaktnih mnogoterostih ali za forme s kompaktnim nosilcem).

Diferencialne forme imajo tudi pomembno dodatno vlogo, saj lahko z njimi detektiramo topološko strukturo mnogoterosti. Konkretno lahko vsako kohomološko grupo gladke mnogoterosti z realnimi ali kompleksnimi koeficienti izrazimo kot kvocient vektorskega prostora sklenjenih diferencialnih form danega reda (torej takih z vnanjim diferencialmo nič) in njegovim podprostorom vseh eksaktnih form (diferencialov), torej s povsem analitično informacijo. Ta predstavitev kohomoloških grup se imenuje *de Rhamova kohomologija* mnogoterosti.

Poleg integrala diferencialne forme bomo definirali tudi pojem volumske mere na Riemannovi mnogoterosti, to je mnogoterost opremljena z Riemannovo metrike. Z uporabo volumske forme lahko definiramo integral skalarne funkcije na mnogoterosti, pri čemer orientabilnost ne igra vloge. To je posplošitev pojma ploskovnega integrala prve vrste, torej integrala funkcije po ploskovni meri.

6.1 Kotangentni sveženj in diferencialne 1-forme

Kotangentni sveženj T^*X gladke mnogoterosti X je dualni sveženj tangentnega svežnja TX:

$$T^*X \;=\; (TX)^* \;=\; \bigsqcup_{x\in X} T_x^*X$$

Elementi kotangentnega prostora T_x^*X v točki $x \in X$ so linearni funkcionali $T_x^*X \to \mathbb{R}$ na tangetnem prostoru in se imenujejo *tangentni kovektorji* v točki x. Ta pojem smo spoznali že v razdelku 3.6 (glej primer 3.22), kjer smo tudi opisali sveženjski atlas na T^*X ter prehodne preslikave.

Prerez $\alpha : X \to T^*X$ kotangentnega svežnja se imenuje *diferencialna* 1*-forma* (ali na kratko 1-forma) na mnogoterosti X. Diferencialne 1-forme na X torej sestavljajo vektorski prostor $\Gamma(X, T^*X)$ vseh prerezov kotangentnega svežnja.

Če je X mnogoterost razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r > 0$, je njen kotangentni sveženj $T^*X \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathscr{C}^{r-1}$. V tem primeru je diferencialna 1-forma α razreda $\mathscr{C}^s$ za nek $s \le r-1$, če je preslikava $\alpha : X \to T^*X$ razreda $\mathscr{C}^s$. Vektorski prostor vseh takih 1-form bomo označili z

$$\mathscr{D}_s^1(X).$$

V primeru $s = \infty$ (ali če s ni določen) bomo spodnji indeks izpustili in pisali $\mathscr{D}^1(X)$.

Vsaka $\mathscr{C}^r$ funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ določa 1-formo dg (diferencial funkcije g) razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ s predpisom

$$dg_x \cdot v \;=\; v(g), \qquad v \in T_xX.$$

To je vrednost tangentnega vektorja $v \in T_xX$ na funkciji g (ekvivalentno, odvod g v točki x v smeri vektorja v).

Če je $x = (x_1, \dots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ lokalna karta na odprti podmnožici $U \subset X$, so diferenciali koordinatnih funkcij $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ v vsaki točki $p \in U$ baza kotangetnega prostora T_p^*X, ki je dualna bazi $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ tangentnega prostora T_pX, saj je

$$\langle dx_i, \partial/\partial x_j\rangle \;=\; \partial x_i/\partial x_j \;=\; \delta_{i,j} \quad \text{(Kroneckerjev delta)}.$$

Vsako diferencialno 1-formo $\alpha \in \mathscr{D}^1(X)$ lahko na podmnožici $U \subset X$ enolično zapišemo v obliki

$$\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i,$$

kjer so koeficienti $a_i : U \to \mathbb{R}$ funkcije na U. Iz definicij sledi, da je 1-forma α razreda $\mathscr{C}^s$ za nek $s < r$ (kjer je mnogoterost X razreda $\mathscr{C}^r$) natanko tedaj, ko so njeni koeficienti v poljubni $\mathscr{C}^r$ karti na X funkcije razreda $\mathscr{C}^s$.

Prostor $\mathscr{D}_s^1(X)$ vseh 1-form razreda $\mathscr{C}^s$ na X je vektorski prostor in modul nad komutativno algebro $\mathscr{C}^s(X) = \mathscr{D}_s^0(X)$. Algebraične operacije na 1-formah se v lokalnih koordinatah izražajo kot običajna vsota in produkt po komponentah:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)dx_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} (a_i(x)+b_i(x))dx_i,$$

$$f(x)\sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(x)a_i(x)dx_i, \qquad f \in \mathscr{C}^s(X).$$

6.2 Diferencialne forme višjega reda

Za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$ naj bo

$$\Lambda^k T^*M \;=\; \bigsqcup_{x\in X} \Lambda^k T_x^* X$$

k-ti vnanji produkt kotangetnega svežnja mnogoterosti X. To operacijo smo že spoznali v razdelkih 3.7 in 3.8. V posebnem je

$$\Lambda^0 T^*X \cong X \times \mathbb{R}$$

trivialen sveženj ranga 1 nad X in $\Lambda^1 T^*X = T^*X$. Elementi vlakna $\Lambda^k T_x^*X$ se imenujejo *k-kovektorji*, ali kovektorji reda k. Vsak k-kovektor za $k \geq 1$ je linearna kombinacija z realnimi koeficienti *razcepnih k-kovektorjev* oblike

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \tag{6.1}$$

kjer so $\alpha_i \in T_x^*X$ 1-kovektorji. Vnanji (klinasti) produkt $\wedge$ ima naslednje lastnosti:

- **Antikomutativnost:** za poljubna $\alpha \in \Lambda^p T_x^*X$ in $\beta \in \Lambda^q T_x^*X$ je $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} T_x^*X$ in velja
$$\alpha \wedge \beta \;=\; (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$
- **Bilinearnost:** za poljubne $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^p T_x^*X$ in $\beta \in \Lambda^q T_x^*X$ je
$$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta \;=\; \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$$
$$\beta \wedge (\alpha_1 + \alpha_2) \;=\; \beta \wedge \alpha_1 + \beta \wedge \alpha_2.$$
- **Asociativnost:** $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

Torej je $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$, če sta oba kovektorja lihega reda in $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$, če je vsaj eden od njiju sodega reda. V posebnem velja

$$\alpha \wedge \alpha \;=\; 0 \quad \text{za vsak } \alpha \in \Lambda^k T_x^*X \text{ za lih } k \in \mathbb{N}.$$

Splošno pravilo antikomutativnosti sledi iz posebnega za 1-kovektorje, ki antikomutirajo, in dejstva, da je vsak k-kovektor linearna kombinacija razcepnih k-kovektorjev oblike (6.1). Pri komutaciji p-kovektorja in q-kovektorja moramo narediti pq transpozicij, zato dobimo znak $(-1)^{pq}$.

Diferencialna k-forma na X je prerez svežnja $\Lambda^k T^*X$. Lokalni opis je naslednji. Izberimo lokalno karto $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ na odprti podmnožici U mnogoterosti X. Diferenciali koordinatnih funkcij $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ so tedaj baza kotangetnega prostora T_x^*X v vsaki točki $x \in U$. Prirejeno bazo vnanjega produkta $\Lambda^k T_x^*X$ za poljuben $x \in U$ sestavljajo razcepni k-kovektorji oblike

$$dx_I \;=\; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \tag{6.2}$$

kjer je $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ multiindeks dolžine $\#I = k$ in $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Torej je

$$\operatorname{rang} \Lambda^k T^*X \;=\; \dim \Lambda^k T_x^*X \;=\; \binom{n}{k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Za vsako permutacijo π množice $\{1, \ldots, k\}$ velja

$$dx_{i_{\pi(1)}} \wedge dx_{i_{\pi(2)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{\pi(k)}} \;=\; (-1)^{\operatorname{sign}(\pi)} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Če se kakšen indeks ponovi, je element enak 0. Opazimo tudi, da je

$$\Lambda^n(T_x^*X) \;=\; \{c\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n : c \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

kjer je $n = \dim X$ in je

$$\Lambda^k(T_x^*X) \;=\; \{0\} \;\text{ za } k > \dim X.$$

Diferencialne forme reda $k \in \mathbb{Z}_+$, oziroma *k-forme* na mnogoterosti X so prerezi vektorskega svežnja $\Lambda^k T^*X$. V primeru $k = 0$ so to funkcije na X. Naj bo sedaj $k \ge 1$. V lokalni karti $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ $(n = \dim X)$ na odprti podmnožici $U \subset X$ ima vsaka k-forma enoličen zapis oblike

$$\alpha \;=\; \sum_{\#I=k} a_I(x) dx_I, \tag{6.3}$$

kjer je dx_I bazni kovektor (6.2) in so $a_I(x)$ funkcije na U. Če je X razreda $\mathscr{C}^r$, so svežnji $\Lambda^k T^*X$ razreda $\mathscr{C}^{r-1}$ in lahko govorimo o diferencialnih k-formah razreda $\mathscr{C}^s$ za poljuben $0 \le s \le r-1$. Prostor vseh takih form označimo z

$$\mathscr{D}_s^k(X), \qquad \mathscr{D}_\infty^k(X) \;=\; \mathscr{D}^k(X).$$

Diferencialna k-forma je razreda $\mathscr{C}^s$ natanko tedaj, ko ima v vsakem koordinatnem zapisu njen predstavnik (6.3) koeficiente $a_I \in \mathscr{C}^s(U)$. Analogno kot v primeru $k = 1$ je $\mathscr{D}_s^k(X)$ vektorski prostor in modul nad komutativno algebro $\mathscr{C}^s(X)$.

Klinasti produkt $\wedge$ na kovektorjih inducira analogno operacijo na prerezih, torej diferencialnih formah, z istimi lastnostmi. Za vsak par $p, q \in \mathbb{Z}_+$ imamo bilinearno, asociativno, antikomutativno operacijo

$$\wedge : \mathscr{D}^p(X) \times \mathscr{D}^q(X) \mapsto \mathscr{D}^{p+q}(X), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta.$$

Direktna vsota

$$\mathscr{D}(X) \;=\; \bigoplus_{k=0}^{\dim X} \mathscr{D}^k(X)$$

z operacijo $\wedge$ je *gradirana algebra* in modul nad algebro $\mathscr{D}^0(X) = \mathscr{C}^\infty(X)$.

Kot primer zapišimo formulo za klinasti produkt poljubnih dveh 1-form v lokalnih koordinatah:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(x)dx_j\right) \;=\; \sum_{i<j}\big(a_i(x)\cdot b_j(x) - a_j(x)\cdot b_i(x)\big)dx_i \wedge dx_j.$$

Pri integraciji diferencialnih form igrajo najpomembnejšo vlogo forme najvišjega reda $n = \dim X$. Naj bodo $x = (x_1,\ldots,x_n)$ lokalne koordinate na $U \subset X$ in

$$\alpha_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)dx_j, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Razmislek pokaže (glej (3.22)), da je v tem primeru

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \;=\; \det\big(a_{i,j}(x)\big)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{6.4}$$

Dejansko, člene v produktu na levi dobimo tako, da v vsaki formi α_i izberemo po en sumand $a_{i,j}(x)dx_j$, nato pa te sumande klinasto zmnožimo. Neničeln rezultat lahko dobimo le v primeru, ko so izbrani indeksi $j = j(i)$ paroma disjunktni, torej dobljeni s permutacijo indeksov $1,2,\ldots,n$. Pri preurejanju diferencialov $dx_{j(i)}$ v naravni vrstni red se pojavi še znak permutacije π. To pa je ravno pravilo za izračun determinante matrike na desni strani v formuli (6.4).

Vsebinsko gledano so k-kovektorji $\alpha \in \Lambda^k T_x^* X$ v točki $x \in X$ alternirajoči k-linearni funkcionali na tangetnem prostoru $T_x X$, oziroma (ekvivalentno) linearni funkcionali na k-tem vnanjem produktu $\Lambda^k T_x X$ tangentnega prostora $T_x X$. Na razcepnih vektorjih in kovektorjih je bilinearno parjenje definirano takole:

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle \;=\; \det\big(\langle \alpha_i, v_j\rangle\big)_{i,j=1}^{k}. \tag{6.5}$$

(Nekateri avtorji dodajo pred determinanto faktor $1/k!$.) Na primer:

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2, v_1 \wedge v_2 \rangle \;=\; \langle \alpha_1, v_1\rangle\langle \alpha_2, v_2\rangle - \langle \alpha_1, v_2\rangle\langle \alpha_2, v_1\rangle.$$

Za splošnejše k-vektorje in k-kovektorje se dualno parjenje razširi po linearnosti. Če v lokalnih koordinatah $(x_1,\ldots,x_n)$ označimo bazna koordinatna vektorska polja z $\partial_i = \partial/\partial x_i$, dobimo za vsak par urejenih multiindeksov I,J dolžine k:

$$\langle dx_I, \partial_J \rangle \;=\; \langle dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \partial_{j_1} \wedge \partial_{j_2} \wedge \ldots \wedge \partial_{j_k} \rangle \;=\; \delta_{I,J},$$

kjer je $\delta_{I,I} = 1$ in $\delta_{I,J} = 0$ za $I \neq J$. To pomeni, da k-kovektorji dx_I (6.2) za vse urejene multiindekse I dolžine k sestavljajo bazo prostora $\Lambda^k T_x^* X$, ki je dualna bazi

$$\partial_I = \partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge \ldots \wedge \partial_{i_k}$$

prostora k-vektorjev $\Lambda^k T_x X$.

Opisana dualnost se prenese na diferencialne k-forme in *alternirajoča k-vektorska polja*; slednja se imenujejo tudi *alternirajoča kovariantna tenzorska polja*. Rezultat parjenja med k-formo α in alternirajočim k-vektorskim poljem je funkcija na X. Na primer, če so $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ diferencialne 1-forme in so $v_1, \ldots, v_k$ vektorska polja na X, je rezultat parjenja funkcija, podana s formulo (6.5).

Notranji produkt forme z vektorskim poljem. Sedaj bomo uvedli še eno algebraično operacijo, to je *notranji produkt* forme α z vektorskim poljem v. Če je $\alpha \in \mathscr{D}^k(X)$ za $k \geq 1$ in v gladko vektorsko polje v na X, je notranji produkt $v \rfloor \alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(X)$ (ali kontrakcija α z v) definiran s predpisom

$$\langle v \rfloor \alpha, v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \langle \alpha, v \wedge v_2 \wedge \cdots v_k \rangle, \tag{6.6}$$

kjer so $v_2, \ldots, v_k$ poljubna vektorska polja na X. Torej eno spremenljivo fiksiramo. Druge oznake, ki se uporabljajo v literaturi, so

$$v \rfloor \alpha = \alpha(v \wedge \cdot) = i_v \alpha.$$

Primer 6.1 Diferencialna $(n+1)$-forma na $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\omega = dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

se imenuje *standardna volumska forma* na $\mathbb{R}^{n+1}$. Naj bo

$$v = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

radialno vektorsko polje. Notranji produkt tega polja z ω je enak

$$\alpha = v \rfloor \omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

kjer strešica nad členom pomeni, da je ta člen izpuščen. To formo bomo ponovno srečali v primeru 6.7. V posebnem primeru $n = 1$ dobimo

$$(x\partial_x + y\partial_y) \rfloor dx \wedge dy = x dy - y dx.$$

Podobno je

$$\partial_x \rfloor dx \wedge dy = dy, \qquad \partial_y \rfloor dx \wedge dy = -dx.$$

6.3 Povlek diferencialnih form

Naj bosta X in Y gladki mnogoterosti in $f: X \to Y$ gladka preslikava. Kar bomo povedali, velja tudi za mnogoterosti in preslikave razreda $\mathscr{C}^r$ za nek $r \geq 1$.

Diferencial preslikave v točki $x \in X$ je linearna preslikava $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$. Dualna preslikava

$$f_x^* \;=\; (df_x)^* : T_{f(x)}^* Y \to T_x^* X$$

je podana s predpisom

$$\langle f_x^* \alpha, v \rangle \;=\; \langle \alpha, df_x(v) \rangle, \quad v \in T_x X,\ \alpha \in T_{f(x)}^* Y.$$

Naj bodo $y = (y_1, \ldots, y_m)$ lokalne koordinate na Y v okolici točke $f(x)$. Kovektor $\alpha \in T_{f(x)}^* Y$ je oblike

$$\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{m} c_i \, dy_i|_{f(x)} \;=\; dg_{f(x)},$$

kjer je $g = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ linearna funkcija v koordinatah $y_1, \ldots, y_m$. Odtod sledi

$$\langle f_x^* \alpha, v \rangle \;=\; \langle f_x^*(dg), v \rangle \;=\; \langle dg_{f(x)}, df_x(v) \rangle \;=\; d(g \circ f)_x(v), \quad v \in T_x X,$$

pri čemer smo v zadnji enakosti uporabili verižno pravilo. S tem smo dokazali

$$f_x^*(dg) \;=\; d(g \circ f)_x \tag{6.7}$$

za poljubno diferenciabilno funkcijo g na Y v okolici točke $f(x)$. Če pišemo $f = (f_1, \ldots, f_m)$, kjer je $f_j = y_j \circ f$, dobimo za $g = y_j$:

$$f^*(dy_j) \;=\; d(y_j \circ f) \;=\; df_j.$$

Povlek poljubne 1-forme α na Y definiramo po vlaknih:

$$(f^* \alpha)(x) \;=\; (f_x^*)(\alpha(f(x)).$$

Operacija f^* je linearna na vlaknih, saj je dual diferenciala. Zato je tudi povlek diferencialnih form linearna operacija $f^* : \mathscr{D}^1(Y) \longmapsto \mathscr{D}^1(X)$. Na funkcijah (0-formah) je povlek z f preprosto kompozicija z f:

$$f^* g \;=\; g \circ f, \quad g \in \mathscr{D}^0(Y).$$

V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na X in $y = (y_1, \ldots, y_m)$ na Y ter ob zapisu $f = (f_1, \ldots, f_m)$ dobimo naslednjo formulo za povlek poljubne 1-forme $\alpha \in \mathscr{D}^1(Y)$:

$$f^* \sum_{j=1}^{m} a_j(y) dy_j \;=\; \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x)) f_x^* dy_j \;=\; \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x))\, d(f_j(x))$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j(f(x)) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} dx_i \; = \; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_j(f(x)) \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \right) dx_i .$$

Če sta mnogoterosti X, Y in preslikava $f : X \to Y$ razreda $\mathscr{C}^r$ ter je $\alpha \in \mathscr{D}_s^1(Y)$ za nek $s < r$, potem iz zgornje formule vidimo, da je $f^*\alpha \in \mathscr{D}_s^1(X)$.

Z uporabo multilinearnosti se povlek razširi na k-forme za poljuben k z zahtevo

$$f^*(\alpha \wedge \beta) \; = \; f^*\alpha \wedge f^*\beta. \tag{6.8}$$

V koordinatah se povlek splošne diferencialne k-forme izraža takole:

$$f^* \sum_{\#I=k} a_I(y) dy_I \; = \; \sum_{\#I=k} a_I(f(x)) df_I(x) \; = \; \sum_{\#I=k} a_I(f(x)) df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}. \tag{6.9}$$

Očitno je $f^* : \mathscr{D}^k(Y) \to \mathscr{D}^k(X)$ linearna preslikava in homomorfizem modulov nad prostoroma gladkih funkcij na bazah X in Y.

Posebej pomemben je povlek n-forme s preslikavo med n-razsežnimi mnogoterostmi. V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in za preslikavo $y = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ iz (6.4) sledi

$$f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) \; = \; df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \; = \; \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{6.10}$$

Ta formula je ključna pri definiciji integrala n-forme na n-mnogoterosti, saj pokaže, da se n-forma transformira po istem pravilu kot zamenjava koordinat v n-ternem integralu, razen za znak determinante. Ta razlika je pomembna in pomeni, da lahko integriramo n-formo le po orientabilni n-razsežni mnogoterosti.

Omenimo še, da je povlek kontravariantno funktorialen:

$$(g \circ f)^*\alpha \; = \; f^*(g^*\alpha).$$

6.4 Vnanji diferencial

Poleg že obravnavanih algebraičnih operacijah, ki delujejo po točkah, uvedemo še operacijo diferenciranja form, ki se imenuje *vnanji diferencial*. To je $\mathbb{R}$-linearna operacija, ki zvišuje red forme za 1 ter znižuje njeno gladkost za 1:

$$d : \mathscr{D}_s^k(X) \longrightarrow \mathscr{D}_{s-1}^{k+1}(X).$$

Zaradi preprosti oznak bomo v nadaljevanju obravnavali gladke forme na gladkih mnogoterostih; vse povedano se smiselno posploši na forme in preslikave končnega reda gladkosti. Konstrukcija je povzeta v naslednjem izreku.

Izrek 6.2 *Na vsaki gladki mnogoterosti X z vnanjo algebro* $\mathscr{D}(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} \mathscr{D}^k(X)$ *obstaja natanko ena* $\mathbb{R}$*-linearna preslikava* $d : \mathscr{D}(X) \to \mathscr{D}(X)$ *stopnje* $+1$*, to je,* $d : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k+1}(X)$ *za* $k = 0, 1, \ldots, \dim X$*, ki zadošča naslednjim lastnostim.*

1. *Za funkcije* $f \in \mathscr{D}^0(X) = \mathscr{C}^\infty(X)$ *je* df *običajni diferencial.*
2. *d je antiderivacija za klinasti produkt:*

$$d(\alpha \wedge \beta) \;=\; d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad \text{za } \alpha \in \mathscr{D}^p(X) \text{ in } \beta \in \mathscr{D}^q(X).$$

3. $d^2 = d \circ d = 0$.
4. *Če je* $U \subset X$ *odprta podmnožica in* $\alpha \in \mathscr{D}^k(X)$*, je* $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$.

Operator d zadošča tudi naslednji lastnosti:

5. *Če je* $f : X \to Y$ *gladka preslikava, velja*

$$d(f^*\alpha) \;=\; f^*(d\alpha) \quad \text{za vsako formo } \alpha \in \mathscr{D}(X).$$

Točka 4. zagotovi, de je d *lokalen operator*, kar pomeni, da je izračun možen v lokalnih koordinatah. V točki 5. je operator d na levi vnanji odvod na X, operator d na desni pa vnanji odvod na Y. Poseben primer točke 5. je inkluzija $f : X \hookrightarrow Y$ podmnogoterosti v ambientno mnogoterost.

Dokaz Točka 1. natanko določa diferencial funkcije. V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na odprti podmnožici $U \subset X$ je

$$df \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Ker je v koordinatah vsaka k-forma oblike (6.3), $\alpha = \sum_{\#I=k} a_I(x) dx_I$, je upoštevaje linearnost operatorja d in zahteve 2., 3. in 4. edina možna definicija

$$d \sum_{\#I=k} a_I(x) dx_I \;=\; \sum_{\#I=k} da_I(x) \wedge dx_I. \tag{6.11}$$

Iz točke 5. bo sledilo, da je dobljeni rezultat neodvisen od koordinat.

Najprej preverimo, da je tako definiran diferencial antiderivacija, torej zadošča zahtevi 2. Zaradi linearnosti zadošča preveriti pogoj na razcepnih formah:

$$\begin{aligned} d(a dx_I \wedge b dx_J) &= d(ab dx_I \wedge dx_J) \\ &= d(ab) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= b da \wedge dx_I \wedge dx_J + a db \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d(a dx_I) \wedge b dx_J + (-1)^p a dx_I \wedge d(b dx_J). \end{aligned}$$

Faktor $(-1)^p$ se pojavi, ker smo diferencial db komutirali s p-formo dx_I.

Sedaj preverimo točko 3. V primeru, da je $\alpha = f$ funkcija, dobimo upoštevaje (6.11)

$$\begin{aligned} d(df) &= d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\wedge dx_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_j\wedge dx_i \\ &= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)dx_i\wedge dx_j. \end{aligned}$$

Če je funkcija f razreda $\mathscr{C}^2$, so njeni parcialni odvodi neodvisni od vrstnega reda odvajanja in zgornji izraz je enak 0, zato je $d^2 f = 0$. Na formah višjega reda dobimo

$$d(d(a dx_I)) = d(da\wedge dx_I) = d^2 a\wedge dx_I - da\wedge d^2 x_I = 0.$$

Sedaj preverimo točko 5. V primeru 0-forme to lastnost že poznamo iz (6.7):

$$f^*(da) = d(a\circ f). \tag{6.12}$$

Dokaz je sledil iz definicije povleka in diferenciala funkcije in je bil neodvisen od koordinat. Z uporabo te lastnosti in do sedaj dokazanih lastnosti 1.-3. v izreku bomo sedaj preverili točko 5. za preslikavo $f = (f_1,\dots,y_m)$ v paru lokalnih koordinat $x = (x_1,\dots,x_n)$ na X in $y = (y_1,\dots,y_m)$ na Y. Zaradi aditivnosti povleka in diferenciala zadošča lastnost dokazati za primer, ko je $\alpha = a dy_I = a dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_k}$.

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &\overset{(6.9)}{=} d(a\circ f\cdot df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_k}) \\ &\overset{2,3}{=} d(a\circ f)\wedge df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_k} \\ &\overset{(6.12)}{=} f^*(da)\wedge df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_k} \\ &\overset{(6.8)}{=} f^*(da\wedge dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_k}) \\ &\overset{(6.11)}{=} f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

Iz lastnosti 5. za prehodno preslikavo med parom lokalnih koordinat sledi, da je definicija vnanjega diferenciala (6.11) dobra v smislu, da je rezultat neodvisen od izbire koordinat. S tem je izrek 6.2 dokazan.

Definicija 6.3 *Diferencialna forma $\alpha\in\mathscr{D}(X)$ se imenuje* sklenjena*, če je $d\alpha = 0$. Forma $\alpha\in\mathscr{D}^k(X)$ se imenuje* eksaktna*, če je $\alpha = d\beta$ za neko formo $\beta\in\mathscr{D}^{k-1}(X)$. (Če je $k=0$, je α funkcija in slednja se imenuje eksaktna le v primeru, da je $\alpha = 0$.)*

Iz lastnosti $d^2 = 0$ (točka 3. v izreku 6.2) sledi, da je prostor eksaktnih k-form vektorski podprostor vektorskega prostora sklenjenih k-form. Njun kvocient se imenuje k-ta *de Rhamova kohomološka grupa*:

$$H^k_{dR}(X) = \frac{\{\alpha\in\mathscr{D}^k(X) : d\alpha = 0\}}{\{d\beta : \beta\in\mathscr{D}^{k-1}(X)\}} = \frac{\ker\big(d:\mathscr{D}^k(X)\to\mathscr{D}^{k+1}(X)\big)}{\operatorname{im}\big(d:\mathscr{D}^{k-1}(X)\to\mathscr{D}^k(X)\big)}$$

V resnici je $H^k_{dR}(X)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.
Očitno je 0-forma, torej funkcija, sklenjena natanko tedaj, ko je konstantna na vsaki povezani komponenti mnogoterosti X. Če je X povezana, sledi

$$H^0_{dR}(X) \;=\; \mathbb{R}.$$

V splošnem je $H^0_{dR}(X) = \mathbb{R}^m$, če ima X m povezanih komponent. Očitno je

$$H^k_{dR}(X) \;=\; 0 \;\text{ za }\; k > \dim X.$$

Pomemben *de Rhamov izrek* pove, da je grupa $H^k_{dR}(X)$ odvisna le od topoloških (natančneje, od homotopskih) lastnosti mnogoterosti X in je naravno izomorfna kohomološki grupi $H^k(X,\mathbb{R})$, ki jo dobimo npr. s simplicialno kohomologijo. Prvi pomemben korak v dokazu tega izreka je naslednja lema.

Lemma 6.4.1 (Poincaréjeva lema). *Če je X odprta konveksna množica v $\mathbb{R}^n$, je vsaka sklenjena diferencialna k-forma na X za $k \geq 1$ eksaktna. Torej je $H^k_{dR}(X) = 0$ za vsak $k \geq 1$. V posebnem je vsaka n-forma na konveksni domeni v $\mathbb{R}^n$ eksaktna.*
Isti rezultat velja, če je X kontraktibilna mnogoterost.

Dokaz leme 6.4.1 za kvader. Naj bodo $x = (x_1,\ldots,x_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^n$. Izberimo točko $p = (p_1,\ldots,p_n) \in X$. Za $n = 1$ je trditev očitna: 1-forma $\alpha = a(x)dx$ je sklenjena in je enaka $d\beta$, kjer je $\beta(x) = \int^x a(t)dt$. Nadaljujemo induktivno. Denimo, da trditev velja za $n-1$. Vsako k-formo $\alpha \in \mathscr{D}^k(X)$, kjer je X kvader v $\mathbb{R}^n$, lahko zapišemo v obliki

$$\alpha \;=\; \sum_{\#I=k-1} a_I(x)dx_I \wedge dx_n + \alpha'(x),$$

kjer je vsota po multiindeksih I dolžine $k-1$ s komponentami v $\{1,\ldots,n-1\}$, k-forma α' pa ne vsebuje diferenciala dx_n. Pišimo $x = (x', x_n)$ in definirajmo $(k-1)$-formo

$$\beta_1 \;=\; (-1)^{k-1} \sum_{\#I=k-1} \int_{p_n}^{x_n} a_I(x',t)dt \cdot dx_I.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} d\beta_1 \;&=\; (-1)^{k-1} \sum_{\#I=k-1} a_I(x',x_n)dx_n \wedge dx_I + \text{členi brez } dx_n \\ &=\; \sum_{\#I=k-1} a_I(x)dx_I \wedge dx_n + \text{členi brez } dx_n. \end{aligned}$$

Razlika $\alpha - d\beta_1$ je oblike

$$\alpha_1 \;=\; \alpha - d\beta_1 \;=\; \sum_{\#J=k} b_J(x)dx_J,$$

kjer je J multiindeks s komponentami v $\{1,\ldots,n-1\}$. Iz

$$d\alpha_1 \;=\; d\alpha - d^2\beta_1 \;=\; d\alpha \;=\; 0$$

in primerjave z izrazom

$$0 \;=\; d\alpha_1 \;=\; \sum_{\#J=k} \frac{\partial b_J(x)}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_J + \text{členi brez } dx_n$$

sledi $\frac{\partial b_J(x)}{\partial x_n} = 0$ za vsak J. Torej so koeficienti b_J neodvisni od spremenljivke x_n. To pomeni, da je sklenjena k-forma α_1 neodvisna od spremenljivke x_n in jo lahko pojmujemo kot sklenjeno k-formo na $(n-1)$-razsežnem kvadru. Po induktivni predpostavki je $\alpha_1 = d\beta_2$ za neko $(k-1)$-formo β_2. Sledi

$$\alpha \;=\; \alpha_1 + d\beta_1 \;=\; d\beta_2 + d\beta_1 \;=\; d\beta$$

za $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Induktivni korak je zaključen in lema dokazana. □

Primer 6.4 Na domeni $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ si oglejmo 1-formo

$$\alpha \;=\; \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Preprost račun pokaže, da je $d\alpha = 0$. Vendar α ni eksaktna. Dejansko je

$$d\arctan\frac{y}{x} \;=\; \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(x^{-1}dy - x^{-2}ydx\right) \;=\; \alpha.$$

Funkcija $\arctan\frac{y}{x}$ je večlična in priraste za 2π vzdolž vsake poti v $\mathbb{R}^2_*$, ki enkrat obkroži izhodišče v pozitivni smeri. Če bi bila α tudi diferencial neke enolične funkcije $f(x,y)$ na $\mathbb{R}^2_*$, bi bila razlika $f(x,y) - \arctan(y/x)$ sklenjena, torej lokalno konstantna in zato konstantna, ker je domena $\mathbb{R}^2_*$ povezana. To je očitno protislovje.

Primer 6.5 (Volumska forma) Diferencialna n-forma ω na n-razsežni mnogoterosti X, ki je v vsaki točki $x \in X$ različna od 0, se imenuje *volumska forma*. V poljubnih lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na X je taka forma oblike

$$\omega \;=\; a(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

kjer je $a(x) \neq 0$ za vsak x. Forma

$$\omega_0 \;=\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{6.13}$$

je *standardna volumska forma* na $\mathbb{R}^n$. Podobno je

$$\omega \;=\; \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

volumska forma na $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$.

V tej smeri imamo naslednji izrek.

Izrek 6.6 *Gladka mnogoterost X ima volumsko formo natanko tedaj, ko je X orientabilna. V tem primeru je orientacia na X določena z izborom volumske forme ω, pri čemer dve volumski formi ω, ω' določata isto orientacijo na X natanko tedaj, ko je $\omega' = f\omega$ za neko pozitivno funkcijo f na X.*

Dokaz Denimo, da je ω volumska forma na X. Za poljubno lokalno karto $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ na odprti povezani množici $U \subset X$ je tedaj $\omega|_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, kjer je f funkcija brez ničel na U. Če po potrebi nadomestimo x_1 z $-x_1$, dosežemo da je $f > 0$. S tem konstruiramo atlas $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ na X, tako da v vsaki lokalni karti (U_i, ϕ_i) velja $\omega_i|_{U_i} = f_i \phi_i^* \omega_0$, kjer je ω_0 volumska forma (6.13) na $\mathbb{R}^n$ in je f_i pozitivna funkcija na U_i. Trivialno je preveriti, da ima prehodna preslikava $\phi_{i,j} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ tedaj pozitivno Jacobijevo determinanto, torej ohranja orientacijo. To pomeni, da je $\mathscr{U}$ orientiran atlas na X.
Obratno, če je $\mathscr{U} = \{(U_i, \phi_i)\}$ orientiran atlas na X, je $\omega_i = \phi_i^* \omega_0$ volumska forma na U_i za vsak i in $\omega_i = f_{i,j} \omega_j$ z $f_{i,j} > 0$ na $U_{i,j}$ za poljuben par indeksov i, j. Če je χ_i particija enote na X s supp$\chi_i \subset U_i$, je $\omega = \sum_i \chi_i \omega_i$ volumska forma na X.
Zadnja trditev v izreku je očitna posledica povedanega. $\square$

Primer 6.7 Na $\mathbb{R}^{n+1}$ s koordinatami $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ si oglejmo n-formo

$$\alpha \;=\; \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

kjer strešica pomeni, da je člen izpuščen. Očitno je

$$d\alpha \;=\; (n+1)\, dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

Naj bo $\iota : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ vložitev (inkluzija) enotne n-sfere v $\mathbb{R}^{n+1}$. Povlek $\iota^*\alpha$ na n-sfero S^n (ali na katerokoli sklenjeno kompaktno hiperploskev v $\mathbb{R}^{n+1}$) ni eksaktna, dasiravno je sklenjena (saj je vsaka n-forma na n-razsežni mnogoterosti sklenjena). To preprosto sledi iz Stokesovega izreka v razdelku 6.8. Ta izrek med drugim pove, da je integral vsake eksaktne n-forme po sklenjeni n-razsežni orientirani mnogoterosti enak 0, integral zgornje forme α pa nam da ravno volumen n-sfere S^n. V resnici je $\iota^*\alpha$ volumska forma na S^n, prirejena zožitvi evklidske metrike na sfero; glej primer 6.21.
Oglejmo si primer z $n = 1$; tedaj je $\alpha = x dy - y dx$ na $\mathbb{R}^2$. Če parametriziramo enotno krožnico $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ z njeno ločno dolžino t, je $x = \cos t,\ y = \sin t$ in povlek forme α na S^1 je v koordinati t enak

$$\cos t \cdot d \sin t - \sin t \cdot d \cos t \;=\; \cos^2 t \cdot dt + \sin^2 t \cdot dt \;=\; dt.$$

Ta forma očitno ni eksaktna, saj je funkcija $t = \arctan(y/x)$ večlična na krožnici.

Diferencialne forme s posebnimi lastnostmi so osnova različnih pomembnih geometrij. Omenimo dva taka primera.

Primer 6.8 (Simplektična forma) Naj bodo $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ koordinate na $\mathbb{R}^{2n}$. Diferencialna 2-forma

$$\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \tag{6.14}$$

se imenuje *standardna simplektična forma* na $\mathbb{R}^{2n}$. Očitno je

$$d\omega \;=\; 0, \qquad \omega \;=\; d\sum_{i=1}^{n} x_i dy_i, \qquad \omega^n \;=\; n!\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Vsaka sklenjena 2-forma ω na $2n$-razsežni mnogoterosti X^{2n}, katere najvišja potenca ω^n je volumska forma, se imenuje *simplektična forma* na X in par (X, ω) je *simplektična mnogoterost*. Po Darbouxjevem izreku je vsaka simplektična forma lokalno v okolici poljubne točke ekvivalentna standardni simplektični formi (6.14). Natančneje, obstajajo lokalne koordinate, v katerih je forma oblike (6.14).

Primer 6.9 (Kontaktna forma) Naj bodo $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, z)$ koordinate na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Diferencialna 1-forma

$$\alpha \;=\; dz + \sum_{i=1}^{n} x_i\, dy_i \tag{6.15}$$

se imenuje *standardna kontaktna forma* na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Očitno je

$$d\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i,$$

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \;=\; n!\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n \wedge dz.$$

Vsaka 1-forma α na orientabilni $(2n+1)$-razsežni mnogoterosti X^{2n+1}, za katero je $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ volumska forma, se imenuje *kontaktna forma* in par (X, α) je *kontaktna mnogoterost*. Tudi v tem primeru velja Darbouxjevem izrek, da je vsaka kontaktna forma lokalno v okolici poljubne točke ekvivalentna standardni kontaktni formi (6.15) do pozitivnega multiplikativnega faktorja.

Zveza med simplektičnimi in kontaktnimi strukturami. Simplektične in kontaktne strukture so v tesni zvezi. Naj bo α kontantna forma (6.15) na $\mathbb{R}^{2n+1}$. Če $\mathbb{R}^{2n+1}$ vložimo kot hiperravnino $\mathbb{R}^{2n+1} \times \{0\} = \{w = 0\} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, kjer smo dodatno koordinato označili z w, je

$$\omega \;=\; d(e^w \alpha) \;=\; e^w (dw \wedge \alpha + d\alpha) \tag{6.16}$$

simplektična forma na $\mathbb{R}^{2n+2}$, saj je očitno eksaktna (torej sklenjena) in je

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} \;&=\; e^{(n+1)w}(n+1)!\, dw \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^n \\ &=\; e^{(n+1)w}(n+1)!\, dw \wedge dz \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Simplektična forma ω (6.16) na $\mathbb{R}^{2n+2}$ se imenuje *simplektizacija* kontaktne forme α, podane z (6.15).

Podobno lahko simplektiziramo vsako kontaktno mnogoterost (X,α), če vzamemo $Z=\mathbb{R}\times X$ in $\omega = d(e^w\alpha)$, kjer je w koordinata na prvem faktorju $\mathbb{R}$.

Obratno, naj bo ω simplektična forma na mnogoterosti X dimenzije $\dim X = 2n \geq 4$. Vektorsko polje v na X se imenuje *Liouvilleovo polje* forme ω, če velja

$$d(v \rfloor \omega) \;=\; \omega.$$

V primeru, ko je ω standardna simplektična forma (6.14) na $\mathbb{R}^{2n}$ in je

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dobimo

$$v \rfloor \omega \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i, \qquad d(v \rfloor \omega) \;=\; \omega,$$

torej je v Liouvilleovo polje forme ω. (Liouvilleovo polje ni enolično določeno.) Naj bo $\Sigma \subset X$ poljubna hiperploskev, ki je transverzalna na Liouvilleovo polje v, torej $v_p \notin T_p\Sigma$ za vsak $p \in \Sigma$. V tem primeru je zožitev 1-forme $\theta = v \rfloor \omega$ na $T\Sigma$ kontaktna forma na Σ, kar vidimo iz naslednjega računa:

$$\theta \wedge (d\theta)^{n-1} \;=\; (v \rfloor \omega) \wedge \omega^{n-1} \;=\; \frac{1}{n} v \rfloor \omega^n.$$

Ker je polje v transverzalno na Σ, je $v \rfloor \omega^n$ volumska forma na Σ.

6.5 Tenzorska polja

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ dimenzije n z bazo $e_1,\dots,e_n$. Njegova k-ta tenzorska potenca $V^{\otimes k}$ je vektorski prostor z bazo

$$e_I \;=\; e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

za vse multiindekse $I=(i_1,\dots,i_k)$ dolžine k z $1 \leq i_j \leq n$ za $j=1,\dots,k$. Komponente multiindeksa sedaj niso urejene in lahko imamo ponovitve. Torej je

$$\dim V^{\otimes k} \;=\; n^k \;=\; (\dim V)^k.$$

V posebnem je $V^{\otimes 1}=V$ in $V^{\otimes 0}=\mathbb{R}$. Elementi prostora $V^{\otimes k}$ se imenujejo k-tenzorji nad V; vsakega lahko enolično zapišemo v obliki

$$\sum_{\#I=k} c_I e_I \;=\; \sum_{\#I=k} c_I e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}.$$

Direktna vsota

$$\mathscr{T}(V) \;=\; \oplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

se imenuje *tenzorska algebra* nad V. Operacija $\otimes$ je linearna v vsakem faktorju:

$$(c_1v_1+c_2v_2)\otimes w \;=\; c_1v_1\otimes w+c_2v_2\otimes w, \quad w\otimes(c_1v_1+c_2v_2) \;=\; c_1w\otimes v_1+c_2w\otimes v_2$$

kjer so $v_1,v_2\in V^{\otimes p},\; w\in V^{\otimes q},\; c_1,\; c_2\in\mathbb{R}$, zgornji element pa leži v $V^{\otimes(p+q)}$. Poleg tega je asociativna:

$$(u\otimes v)\otimes w \;=\; u\otimes(v\otimes w).$$

Med tenzorsko potenco $V^{\otimes k}$ in potenco $V^{*\otimes k}$ dualnega prostora V^* obstaja naravno neizrojeno bilinearno parjenje $V^{*\otimes k}\times V^{\otimes k}\to\mathbb{R}$, podano s predpisom

$$\langle v_1^*\otimes v_2^*\otimes\cdots\otimes v_k^*, v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k\rangle \;=\; \prod_{i=1}^{k}\langle v_i^*, v_i\rangle.$$

Pri tem je $\langle v_i^*, v_i\rangle\in\mathbb{R}$ vrednost kovektorja $v_i^*\in V^*$ na vektorju $v_i\in V$.
Če je $e_1^*,\ldots,e_n^*$ baza dualnega prostora V^*, ki je dualna bazi $e_1,\ldots,e_n$ prostora V, potem je družina

$$e_I^* \;=\; e_{i_1}^*\otimes e_{i_2}^*\otimes\cdots\otimes e_{i_k}^*, \qquad \#I=k$$

baza tenzorske potence $V^{*\otimes k}$, ki je dualna bazi $e_I=e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}$ potence $V^{\otimes k}$. Odtod sledi dualnost

$$(V^{\otimes k})^*\cong V^{*\otimes k}.$$

Opazujemo tudi mešane tenzorske produkte prostora V in njegovega duala. Naslednji primer je posebej zanimiv.

Primer 6.10 Naj bosta V in W končno razsežna vektorska prostora nad $\mathbb{R}$. Tedaj je

$$V^*\otimes W\cong \mathrm{Hom}(V,W),$$

to je, $V^*\otimes W$ je naravno izomorfen prostoru $\mathrm{Hom}(V,W)$ vseh $\mathbb{R}$-linearnih preslikav $V\to W$. Izomorfizem $V^*\otimes W\cong\mathrm{Hom}(V,W)$ je podan s prireditvijo

$$V^*\otimes W\ni v^*\otimes w\mapsto L_{v^*,w}\in\mathrm{Hom}(V,W), \quad L_{v^*,w}(u) \;=\; \langle v^*,u\rangle w \quad (u\in V).$$

Če je $e_1,\ldots,e_n$ baza prostora V, $e_1^*,\ldots,e_n^*$ dualna baza dualnega prostora V^* in $f_1,\ldots,f_m$ baza prostora W, je linearna preslikava $L: V\to W$, ki ima v tem paru baz matriko $A=(a_{i,j})$, podana z

$$L \;=\; \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} a_{i,j}\, e_i^*\otimes f_j.$$

Primer 6.11 Vsaka bilinearna preslikava $\lambda : V \times V \to \mathbb{R}$ je podana z linearno preslikavo $\tilde{\lambda} : V \otimes V \to \mathbb{R}$, torej z elementom prostora $(V \otimes V)^* = V^* \otimes V^*$. Če je $e_1, \ldots, e_n$ baza prostora V in $e_1^*, \ldots, e_n^*$ dualna baza dualnega prostora V^*, je torej vsaka bilinearna preslikava $\lambda : V \times V \to \mathbb{R}$ oblike

$$\lambda \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, e_i^* \otimes e_j^*.$$

Njena vrednost na paru vektorjev $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ in $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$ je

$$\langle \lambda, v \otimes w \rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j}\, \langle e_i^*, v \rangle \langle e_j^*, w \rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} u_i w_j.$$

Preslikava λ je skalarni produkt na V, če je njena matrika $(\lambda_{i,j})$ simetrična in pozitivno definitna. $\square$

Tenzorski produkt vektorskih prostorov lahko posplošimo na vektorske svežnje. Tako definiramo tenzorske potence tangentnega in kotangentnega svežnja:

$$TX^{\otimes k} \;=\; \bigsqcup_{x \in X} T_x X^{\otimes k}, \qquad T^*X^{\otimes k} \;=\; \bigsqcup_{x \in X} T_x^* X^{\otimes k}.$$

Prerezi svežnja $T^*X^{\otimes k}$ so v lokalnih koordinatah $x = (x_1, \ldots, x_n)$ na $U \subset X$ oblike

$$\alpha \;=\; \sum_{\#I = k} a_I(x) dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k},$$

kjer so a_I funkcije na U. Tako polje se imenuje *k-kontravariantno tenzorsko polje*. Podobno so prerezi svežnja $TX^{\otimes k}$ v lokalnih koordinatah oblike

$$v \;=\; \sum_{\#I = k} a_I(x) \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k},$$

kjer je $\partial_i = \partial / \partial x_i$. Tak v se imenuje *k-kovariantno tenzorsko polje*.
Vrednost razcepnega k-kovektorja $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k$ na k-vektorju $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ je

$$\Big\langle \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k, v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \Big\rangle \;=\; \prod_{i=1}^{k} \langle \alpha_i, v_i \rangle.$$

Odtod sledi, da k-kovektorji $dx_I = dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k}$ za (neurejene) multiindekse I dolžine k sestavljajo dualno bazo k-vektorjem $\partial_J = \partial_{j_1} \otimes \partial_{j_2} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_k}$:

$$\langle dx_I, \partial_J \rangle \;=\; \delta_{I,J}.$$

Tenzor $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$, kjer sta α, β 1-formi, deluje na tenzorju $v \otimes w$ takole:

$$\begin{aligned}\langle \alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha, v\otimes w\rangle &= \langle \alpha\otimes\beta, v\otimes w\rangle - \langle \beta\otimes\alpha, v\otimes w\rangle\\ &= \langle \alpha, v\rangle\langle \beta, w\rangle - \langle \beta, v\rangle\langle \alpha, w\rangle\\ &= \langle \alpha\wedge\beta, v\wedge w\rangle.\end{aligned}$$

Zato pogosto identificiramo $\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha$ z $\alpha\wedge\beta$.

Opomba 6.12 Vnanja algebra $\Lambda(V)=\oplus_{k=0}^{\dim V}$ nad vektorskim prostorom V kvocient tenzorske algebre $\oplus_{k=0}^{\infty}V^{\otimes k}$ po dvostranskem idealu, ki je generiran z vsemi elementi oblike $v\otimes v$ za $v\in V$. Iz

$$(v+w)\otimes(v+w) \;=\; v\otimes v+v\otimes w+w\otimes v+w\otimes w$$

sledi, da se pri prehodu na kvocient tenzorji $v\otimes w+w\otimes v$ prelikajo v 0. To ravno pomeni, da v kvocientu, kjer pišemo operacijo z $\wedge$, velja $v\wedge w=-w\wedge v$.

6.6 Riemannova metrika in volumska forma

Definicija 6.13 (Riemannova metrika) Riemannova metrika *g na mnogoterosti X je polje skalarnih produktov* $g_x : T_xX\times T_xX\to\mathbb{R}$ *na tangentnih prostorih.*

Ekvivalentno, Riemannova metrika g je prerez svežnja $T^*X^{\otimes 2}$, torej kontravariantno tenzorsko polje reda 2, tako da je $g_x\in T_x^*X^{\otimes 2}$ simetrična pozitivno definitna forma na T_xX za vsak $x\in X$. Iz primera 6.11 sledi, da se v lokalnih koordinatah $x=(x_1,\dots,x_n)$ metrika g izraža v obliki

$$g \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\,dx_i\otimes dx_j. \tag{6.17}$$

Njena matrika $G=(g_{i,j})$ je simetrična in pozitivno definitna. Metrika g je gladka razreda $\mathscr{C}^s$, če so taki njeni koeficienti $g_{i,j}(x)$. Vrednost metrike g na paru vektorski polj $v=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ in $w=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ je

$$\langle g, v\otimes w\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)v_i(x)w_j(x) \;=\; G(x)V(x)\cdot W(x), \tag{6.18}$$

kjer je $G(x)v(x)$ produkt matrike G z vektorjem $V=(v_1,\dots,v_n)^T$, dobljeni vektor pa je skalarno pomnožen z $W=(w_1,\dots,w_n)^T$.

Primer 6.14 1. Osnovni in najpreprostejši primer je evklidska metrika na $\mathbb{R}^n$:

$$ds^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} dx_i\otimes dx_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} dx_i^2, \quad G \;=\; \mathrm{Id}. \tag{6.19}$$

Ukrivljenost evklidske metrike je identično enaka nič.

2. Naslednji pomemben primer je *sferična metrika*

$$g \;=\; \frac{1}{(1+|x|^2)^2}\sum_{i=1}^{n} dx_i^2, \tag{6.20}$$

ki jo dobimo iz evklidske metrike na $\mathbb{R}^{n+1}$ zožene na tangentni sveženj enotne sfere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, če slednjo stereografsko projiciramo na $\mathbb{R}^n$ iz točke $N = (0,\dots,0,1)$. Ta metrika ima konstantno ukrivljenost $+4$.

3. Tretji primer je *Poincaréjeva metrika* na enotni krogli $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, ki je enaka

$$g_P \;=\; \frac{1}{(1-|x|^2)^2}\sum_{i=1}^{n} dx_i^2. \tag{6.21}$$

Ta metrika ima konstantno negativno ukrivljenost -4.

4. Če domeno $D \subset \mathbb{R}^2$ s koordinatama (u,v) imerziramo v $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ z gladko preslikavo $f : D \to \mathbb{R}^n$, dobimo na D inducirano metriko

$$g \;=\; \sum_{i=1}^{n}(df_i)^2 \;=\; |f_u|^2 du\otimes du + 2f_u\cdot f_v(du\otimes dv + dv\otimes du) + |f_v|^2 dv\otimes dv,$$

ki se imenuje *prva fundamentalna forma* ploskve $S = f(D) \subset \mathbb{R}^n$.

5. Isto idejo lahko uporabimo za poljubno imerzijo $f : X \to Y$. Če je g Riemannova metrika na Y, dobimo inducirano metriko f^*g na X, definirano z

$$\big\langle (f^*g)_x, v\otimes w\big\rangle \;=\; \big\langle g_{f(x)}, df_x v\otimes df_x w\big\rangle, \qquad v,w \in T_xX. \tag{6.22}$$

Definicija 6.15 *Naj bosta (X,g) in $(Y,\tilde g)$ Riemannovi mnogoterosti. Preslikava $f : X \to Y$ razreda $\mathscr{C}^1$ je* izometrična*, če velja $g = f^*\tilde g$ (glej* (6.22)*). Če je poleg tega f difeomorfizem, se f imenuje izometrija.*

Iz definicije sledi, da je vsaka izometrična preslikava imerzija. Obratno, za poljubno imerzijo $f : X \to Y$ in Riemannovo metriki $\tilde g$ na Y je $g = f^*\tilde g$ Riemannova metrika na X, v kateri je preslikava f izometrična.

Metrika g na mnogoterosti X je lokalno izometrična evklidski metriki ds^2 (6.19) natanko tedaj, ko za poljubno točko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset X$ in lokalna karta $\phi = (x_1,\dots,x_n) : U \to \mathbb{R}^n$, tako da je $g|_U = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$.

Zamenjava koordinat v Riemannovi metriki. Oglejmo si, kako se izraz (6.17) za Riemannovo metriko g spremeni pri zamenjavi koordinat. Denimo, da je v koordinatah $x = (x_1,\dots,x_n)$ metrika g na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ podana z (6.17):

$$g \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x)\, dx_i \otimes dx_j, \qquad G = (g_{i,j}).$$

Naj bo $\widetilde D \subset \mathbb{R}^n$ druga domena in $\psi : \widetilde D \to D$ difeomorfizem. Označimo s

$$P \;=\; D\psi : \widetilde{D} \to GL_n(\mathbb{R})$$

njeno Jacobijevo matriko. Za vektorsko polje $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ na $\widetilde{D}$ označimo z $V = (v_1, \ldots, v_n)^T$ vektor njegovih koeficientov. Tedaj je $\psi_* v$ vektorsko polje na D, podano z matriko koeficientov $(PV)(\psi^{-1}(x))$, torej

$$(\psi_* v)(x) \;=\; \sum_{i=1}^n (PV)(\psi^{-1}(x))_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Če je $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ drugo vektorsko polje na $\widetilde{D}$ in $W = (w_1, \ldots, w_n)^T$ pripadajoč stolpec koeficientov, dobimo iz formule (6.18) za Riemannovo metriko $\tilde{g} = \psi^* g$ na $\widetilde{D}$ z matriko koeficientov $\widetilde{G}$ naslednji izraz:

$$\widetilde{G}V \cdot W \;=\; \langle \tilde{g}, v \otimes w \rangle \;=\; \langle g, \psi_* v \otimes \psi_* w \rangle \;=\; (G \circ \psi)(PV) \cdot PW \;=\; P^T (G \circ \psi) PV \cdot W.$$

Odtod sledi zveza za matriki metrik g in $\tilde{g}$:

$$\widetilde{G} \;=\; P^T (G \circ \psi) P, \qquad \det \widetilde{G} \;=\; \det(G \circ \psi) \cdot (\det P)^2. \tag{6.23}$$

Volumska forma Riemannove metrike. Riemannovi metriki g na orientirani mnogoterosti X priredimo volumsko formo Ω na naslednji način. Na lokalni karti $U \subset X$ s pozitivno orientiranimi koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$ naj bo

$$g \;=\; \sum_{j,k=1}^n g_{j,k}\, dx_j \otimes dx_k, \qquad G \;=\; (g_{j,k}).$$

Z Gram–Schmidtovo metodo najdemo 1-forme $\phi_1, \ldots, \phi_n$ na U, ki sestavljajo pozitivno orientirano g-ortonormalno bazo kotangentnega prostora $T_x^* X$ v vsaki točki $x \in U$. Metrika g je v tej bazi enaka

$$g \;=\; \sum_{i=1}^n \phi_i \otimes \phi_i.$$

(Forme ϕ_i lahko lokalno izberemo kot eksaktne diferenciale, $\phi_i = dx_i$, natanko tedaj, ko je g lokalno izometrična evklidski metriki ds^2 (6.19) na $\mathbb{R}^n$.) Prirejeno *volumsko formo* $\Omega = \Omega_g$ na U definiramo z

$$\Omega \;=\; \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

To pomeni, da ima Ω vrednost 1 na vsaki pozitivno orientirani g-ortonormalni bazi tangentnega svežnja TX na U. Lahko je videti, da izraz ni odvisen od izbire baze z navedenima lastnostima. Če izrazimo $\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} dx_j$ $(i = 1, \ldots, n)$, dobimo

$$g \;=\; \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} dx_j \right) \otimes \left(\sum_{k=1}^n p_{i,k} dx_k \right) \;=\; \sum_{j,k=1}^n g_{j,k} dx_j \otimes dx_k,$$

kjer je

$$g_{j,k} \;=\; \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} p_{i,k}, \qquad j,k = 1,\dots,n$$

Če označimo $G = (g_{j,k})$ in $P = (p_{i,j})$, zgornja formula pomeni

$$G \;=\; P^T P, \qquad \det G \;=\; (\det P)^2.$$

Po drugi strani iz formule (6.4) za spremembo volumske forme sledi

$$\begin{aligned} \Omega \;&=\; \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n \;=\; (\det P)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &=\; \sqrt{\det G}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned} \tag{6.24}$$

6.7 Gradient, rotor, divergenca in Laplace

V tem razdelku si bomo ogledali primerjavo vnanjega diferenciala form z diferencialnimi operacijami na skalarnih in vektorskih poljih.

Gradient. Diferencial funkcije f je intrinzična količina, to je 1-forma df, ki ima v poljubnem koordinatnem sistemu $x = (x_1,\dots,x_n)$ izraz $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

V evklidskih koordinatah ima iste koeficiente tudi *gradient* $\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Vendar ta količina ni intrinzična in se pri zamenjavi koordinat ne ohranja.

Interpretacija gradienta, ki omogoča posplošitev, je naslednja. Naj bo g Riemannova metrika na mnogoterosti X. V vsaki točki $x \in X$ je torej g_x skalarni produkt na tangentnem prostoru T_xX. Po Rieszovem izreku lahko vsak linearen funkcional $\lambda : T_xX \to \mathbb{R}$, torej element kotangentnega prostora T_x^*X, enolično predstavimo kot skalarni produkt z nekim vektorjem $v \in T_xX$:

$$\lambda \;=\; g_x(v,\cdot) \;=\; v \rfloor g_x.$$

Skalarni produkt g_x na T_xX torej inducira izomorfizem $T_xX \overset{\cong}{\to} T_x^*X$. Globalno Riemannova metrika g inducira izomorfizem vektorskih svežnjev $TX \overset{\cong}{\to} T^*X$. Vsaka 1-forma α na X določa vektorsko polje v z enačbo

$$\alpha \;=\; v \rfloor g. \tag{6.25}$$

Obratno, ista enačba priredi vektorskemu polju v diferencialno 1-formo α. Če je $g = ds^2$ evklidska metrika (6.19) na $\mathbb{R}^n$, je

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \partial_{x_i} \right) \rfloor ds^2$$

in v posebnem $df = \nabla f \rfloor ds^2$. Splošneje, za poljubno Riemannovo metriko g na X definiramo intrinzičen gradient $\nabla f = \nabla^g f$ diferenciabilne funkcije f z enačbo

$$df \;=\; \nabla f \rfloor g. \tag{6.26}$$

Na primer, v sferični metriki g (6.20) je

$$\nabla f \;=\; (1+|x|^2)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Če je metrika g v lokalnih koordinatah podana s (6.17) in je $(g^{i,j}) = G^{-1}$ inverzna matrika matrike koeficientov $G = (g_{i,j})$, je

$$\nabla f \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g^{i,j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{6.27}$$

Rotor. Vektorskemu polju $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ na domeni v $\mathbb{R}^3$ s koordinatami (x,y,z) in evklidsko metriko $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ priredimo z izomorfizmom (6.25) diferencialno 1-formo

$$\alpha \;=\; v \rfloor g \;=\; adx + bdy + cdz.$$

Njen diferencial je

$$d\alpha \;=\; (c_y - b_z)dy \wedge dz + (a_z - c_x)dz \wedge dx + (b_x - a_y)dx \wedge dy.$$

Primerjava z *rotorjem* polja v,

$$\operatorname{rot} v \;=\; (c_y - b_z)\frac{\partial}{\partial x} + (a_z - c_x)\frac{\partial}{\partial y} + (b_x - a_y)\frac{\partial}{\partial z}$$

pokaže, da je

$$d\alpha \;=\; d(v \rfloor g) \;=\; (\operatorname{rot} v) \rfloor dx \wedge dy \wedge dz, \tag{6.28}$$

to je notranji produkt rotorja polja v z volumsko formo $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Identiteta $\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = 0$ za funkcijo f razreda $\mathscr{C}^2$ je torej ekvivalentna $d^2 f = 0$.

Divergenca. Vektorskemu polju $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$ na domeni v $\mathbb{R}^3$ z volumsko formo $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ priredimo 2-formo

$$\alpha \;=\; v \rfloor \Omega \;=\; v \rfloor dx \wedge dy \wedge dz \;=\; ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy.$$

Njen diferencial je

$$d\alpha \;=\; d(v \rfloor \Omega) \;=\; (a_x + b_y + c_z)\Omega \;=\; (\operatorname{div} v)\Omega.$$

Primerjava s (6.28) pokaže:

$$0 \;=\; d^2(v \rfloor g) \;=\; d\,(\mathrm{rot}\, v \rfloor \Omega) \;=\; (\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, v)\Omega.$$

Torej je $d^2 = 0$ na 1-formah ekvivalentno dejstvu $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ na vektorskih poljih.

Divergenco vektorskega polja lahko definiramo na vsaki Riemannovi mnogoterosti. Riemannovi metriki g na orientirani mnogoterosti X smo priredili volumsko formo Ω (6.24). *Divergenca* vektorskega polja v je funkcija $\mathrm{div}\, v$ na X, ki zadošča identiteti

$$d(v \rfloor \Omega) \;=\; (\mathrm{div}\, v)\,\Omega. \tag{6.29}$$

Če spremenimo orientacijo na X, se Ω spremeni v $-\Omega$ in funkcija $\mathrm{div}\, v$ se ne spremeni, torej orientacija ni bistvena. V lokalnih koordinatah $(x_1, \ldots, x_n)$ je

$$\mathrm{div} \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial\left(v_i \sqrt{\det G}\right)}{\partial x_i}, \tag{6.30}$$

kjer je $G = (g_{i,j})$ matrika metrike g. Če je $g = ds^2$ evklidska metrika (6.19), je

$$\mathrm{div} \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Divergenca meri spreminjanje volumna domene s tokom polja v. Natačneje, če je D kompaktna domena v X, katere rob ∂D ima volumen 0 in je ϕ_t tok polja v, je

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}\,(\phi_t(D)) \;=\; \int_D \mathrm{div}\, v \cdot dV. \tag{6.31}$$

To sledi iz točke (d) v izreku 6.28. V primeru, ko je g evklidska metrika na $\mathbb{R}^n$, je (6.42) klasična *Liouvilleova formula*.

Laplaceov operator. Naj bo (X, g) Riemannova mnogoterost. *Laplace* funkcije $f \in \mathscr{C}^2(X)$ glede na metriko g (metrični Laplace) je funkcija na X, definirana z

$$\Delta f \;=\; \mathrm{div}\,(\nabla f).$$

V lokalnih koordinatah $(x_1, \ldots, x_n)$, v katerih je metrika g podana s (6.17), je

$$\Delta f \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\sqrt{\det G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det G}\, g^{i,j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \tag{6.32}$$

Funkcija f na (X, g) se imenuje *harmonična*, če je $\Delta f = 0$. V evklidski metriki $g = ds^2$ (6.19) na $\mathbb{R}^n$ je

$$\Delta \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

6.8 Integracija diferencialnih form in Stokesov izrek

V tem razdelku bomo definirali integral diferencialne n-forme na orientirani n-razsežni mnogoterosti in dokazali Stokesov izrek.

Na $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \dots, x_n)$ imejmo n-formo α s kompaktnim nosilcem:

$$\alpha \;=\; a\Omega \;=\; a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

kjer je a zvezna funkcija s kompaktnim nosilcem na $\mathbb{R}^n$. Njen integral definiramo kot običajen n-terni Riemannov integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} a\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \tag{6.33}$$

Splošneje, če je a merljiva funkcija na $\mathbb{R}^n$ v razredu $L^1(\mathbb{R}^n)$, lahko zgornji integral razumemo kot Lebesguov integral. S temi posplošitvami se ne bomo uvarjali in integral lahko razumemo v Riemannovem smislu.

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena in $f : D \to f(D) \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfizem na domeno $f(D)$, ki vsebuje nosilec funkcije a. Označimo z $J(f) = \det(\partial f_i/\partial x_j)$ njegovo Jacobijevo determinanto. Tedaj je po formuli za povlek (6.10)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} a(f(x))\,J(f)(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&=\; \pm \int_{\mathbb{R}^n} a(f(x))|J(f)(x)|\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&=\; \pm \int_{\mathbb{R}^n} a(y) dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\
&=\; \pm \int_{\mathbb{R}^n} \alpha
\end{aligned} \tag{6.34}$$

kjer imamo znak $+$, če f ohranja orientacijo ter znak $-$, če jo obrne. Predzadnji enačaj je formula za zamenjavo spremenljivk v n-ternem integralu.

Iz te formule je evidentno, da lahko definiramo integral n-forme α s kompaktnim nosilcem na n-razsežni mnogoterosti X takole. Nosilec $\mathrm{supp}\alpha$ pokrijemo s končnim število lokalnih kart $U_1, U_2, \dots, U_k$, torej $\mathrm{supp}\alpha \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Naj bo $\phi_i : U_i \xrightarrow{\cong} U_i' \subset \mathbb{R}^n$ koordinatni difeomorfizem v izbranem maksimalnem orientiranem atlasu na X in $\psi_i = \phi_i^{-1} : U_i' \to U_i$ lokalna parameterizacija. Izberimo particijo enote $1 = \sum_{i=1}^k \chi_i$ na okolici $\mathrm{supp}\alpha$ s $\mathrm{supp}\chi_i \subset U_i$ za $i = 1, \dots, k$ in definirajmo

$$\int_X \alpha \;=\; \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \psi_i^*(\chi_i \alpha).$$

S pomočjo formule (6.34) zlahka preverimo, da je integral neodvisen od izbir v njegov definiciji, torej od pokritja nosilca forme α z orientiranimi lokalnimi kartami in od podrejene particije enote.

Podobno definiramo integral $\int_D \alpha$, če je $D \Subset X$ relativno kompaktna domena, katere rob ima volumen nič (npr., če je rob odsekoma $\mathscr{C}^1$) in je α zvezna n-forma na $\overline{D}$. Domeno lahko razdelimo na unijo $D = \cup_{i=1}^k D_i$ končno mnogo poddomen istega tipa, ki se sekajo samo v robnih ploskvah in je vsaka $\overline{D}_i$ vsebovana v domeni $U_i \subset X$ neke orientirane lokalne karte $\phi_i : U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^n$. Sedaj lahko definiramo

$$\int_D \alpha \;=\; \sum_{i=1}^k \int_{D_i} \alpha \;=\; \sum_{i=1}^k \int_{\phi_i(D_i)} (\phi_i^{-1})^* \alpha.$$

Vsak integral na desni je enakega tipa kot (6.33).

Če je mnogoterost X kompaktna (lahko z robom), je s tem definiran integral poljubne zvezne n-forme na X. Če X ni kompaktna, definiramo posplošeni integral

$$\int_X \alpha \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_X \chi_k \alpha,$$

kjer je $\chi_k : X \to [0,1]$ zaporedje funkcij s kompaktnimi nosilci, tako da je $\mathrm{supp}\chi_1 \subset \mathrm{supp}\chi_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{k=1}^\infty \mathrm{supp}\chi_k = X$. Če integral konvergira absolutno, je limita neodvisna od izbire izčrpanja.

Sedaj bomo dokazali naslednji centralni izrek diferencialno-integralnega računa.

Izrek 6.16 (Stokesov izrek) *Naj bo X gladka orientirana mnogoterost dimenzije n s koherentno orientiranim robom ∂X. Za vsako gladko $(n-1)$-formo α na X s kompaktnim nosilcem velja Stokesova formula*

$$\int_{\partial X} \alpha \;=\; \int_X d\alpha. \tag{6.35}$$

Posledica 6.17 *Če je X orientirana n-razsežna mnogoterost (z ali brez roba) in je α gladka $(n-1)$-forma na X, katere nosilec ne seka ∂X, je*

$$\int_X d\alpha \;=\; 0.$$

Preden Stokesov izrek dokažemo, omenimo nekaj posledic in opažanj.

1. Izrek velja pod bistveno milejšimi pogoji. Npr., dovolj je predpostaviti, da je X razreda $\mathscr{C}^2$ z odsekoma $\mathscr{C}^2$ robom in je α razreda $\mathscr{C}^1(X)$. V literaturi najdemo vrsto nadaljnjih posplošitev na manj regularne mnogoterosti in forme.
2. Če je X mnogoterost kompaktna, velja zaključek za vse $(n-1)$-forme na X.
3. Izrek vsebuje vse klasične primere:
   - $n=1$: Leibnizova formula: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.
   - $n=2$: Greenova formula v ravnini: $\int_{\partial X} Pdx + Qdy = \iint_X (Q_x - P_y)dxdy$.
   - $n=2$: Stokesova formula za ploskovne integrale: $\int_{\partial X} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \iint_X \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{dA}$.
   - $n=3$: Gaussova formula za domene $X \subset \mathbb{R}^3$: $\iint_{\partial X} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dA} = \iiint_X \mathrm{div}\,\mathbf{F}\cdot dV$.

Dokaz izreka 6.16 Pričeli bomo z obravnavo dveh posebnih primerov; splošen rezultat bo njihova preprosta posledica.

1. primer: $X = \mathbb{R}^n$, $\partial X = \varnothing$. V tem primeru je

$$\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_j(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

kjer ima vsaka funkcija a_j kompakten nosilec. Stokesova formula trdi $\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = 0$. Zaradi linearnosti integrala zadošča dokazati to formulo za vsak člen v zgornji vsoti posebej. Torej lahko vzamemo, da je

$$\alpha \;=\; a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{6.36}$$

Iz definicije diferenciala, integrala forme in Fubinijevega izreka sledi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha \;&=\; (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&=\; (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_n \\
&=\; (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

Ker je $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j = 0$ po Leibnizovi formuli, je rezultat enak 0.

2. primer: $X = \mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$, $\partial X = \{x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Koherentna orientacija roba $\partial\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$ je $(-1)^n$-krat standardna orientacija $\mathbb{R}^{n-1}$. Označimo z $\iota : \partial\mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{H}^n$ vložitev $\iota(x') = (x', 0)$. Naj bo α podana s (6.36).

V primeru $1 \leq j < n$ nam isti argument kot v primeru 1 pokaže, da je $\int_{\mathbb{H}^n} d\alpha = 0$. Po drugi strani je tudi $\int_{\partial\mathbb{H}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \iota^*\alpha = 0$, ker je $\iota^* dx_n = 0$.

Recimo sedaj, da je $j = n$ in $\alpha = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^n} d\alpha \;&=\; (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial a}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&=\; (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\
&=\; \int_{\partial\mathbb{H}^n} \alpha.
\end{aligned}$$

Uporabili smo Leibnizovo formulo $\int_0^\infty \frac{\partial a}{\partial x_n} dx_n = -a(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, pri tretji enakosti pa upoštevali koherentno orientacijo roba $\partial\mathbb{H}^n$.

3. Splošen primer. Kompakten nosilec $\operatorname{supp}\alpha$ pokrijemo s končno mnogo odprtimi množicami $U_1, \ldots, U_k \subset X$, tako da obstajajo lokalne karte

$$\phi_i : U_i \xrightarrow{\cong} U_i' \subset \mathbb{H}^n, \qquad \phi_i(U_i \cap \partial X) \;=\; U_i' \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Karte izberemo skladno z orientacijo mnogoterosti X. Nadalje izberemo particijo enote $1 = \sum_{i=1}^{k} \chi_i$ na okolici $\operatorname{supp}\alpha$, tako da je $\operatorname{supp}\chi_i \subset U_i$ za $i = 1, \ldots, k$. Na nosilcu $\operatorname{supp}\alpha$ tedaj velja $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \chi_i \alpha$. Po aditivnosti integrala je

$$\int_{\partial X} \alpha \;=\; \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial X} \chi_i \alpha, \qquad \int_X d\alpha \;=\; \sum_{i=1}^{k} \int_X d(\chi_i \alpha).$$

Stokesovo formulo zadošča dokazati za vsak člen $\alpha_i = \chi_i \alpha$, torej je $\operatorname{supp}\alpha_i \subset U_i$. Naj bo $\psi_i = (\phi_i)^{-1} : U_i' \to U_i$. S prenosom integracije v lokalno karto in uporabo že dokazanih posebnih primerov 1 in 2 dobimo:

$$\int_{\partial X} \alpha_i \;=\; \int_{\partial \mathbb{H}^n} \psi_i^* \alpha_i \;=\; \int_{\mathbb{H}^n} d(\psi_i^* \alpha_i) \;=\; \int_{\mathbb{H}^n} \psi_i^*(d\alpha_i) \;=\; \int_X d\alpha_i.$$

S tem je Stokesov izrek dokazan. $\square$

Opomba 6.18 Namesto uporabe particije enote lahko izrek dokažemo najprej za kompaktne domene v $\mathbb{R}^n$ z odsekoma gladkim robom, podobno kot v klasični analizi (npr. pri dokazu Gaussovega izreka v R^3). Splošen primer sledi s pomočjo triangulacije kompaktne mnogoterosti X na unijo končnega števila zaprtih domen $D_1, \ldots, D_k \subset X$ z odsekoma gladkim robom, tako da se poljubni dve domeni sekata kvečjemu v preseku njunih robov in je vsaka od njih vsebovana v neki lokalni karti. Integral $\int_{\partial X} \alpha$ je tedaj enak vsoti $\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial D_i} \alpha$, saj se integrali po notranjih robnih ploskvah med seboj uničijo. Z uporabo prenosa v lokalno karto nato sledi $\int_{\partial D_i} \alpha = \int_{D_i} d\alpha$. Vendar je zgornji dokaz bistveno preprostejši. $\square$

Ena od posledic Stokesovega izreka je naslednji Gaussov izrek.

Izrek 6.19 (Gaussov izrek o divergenci) *Naj bo X gladka orientirana mnogoterost s koherentno orientiranim robom ∂X in ω volumska forma na X. Za vsako vektorsko polje v s kompaktnim nosilcem na X velja*

$$\int_{\partial X} v \rfloor \omega \;=\; \int_X (\operatorname{div} v)\omega.$$

Dokaz Po definiciji divergence (6.29) je

$$d(v \rfloor \omega) \;=\; (\operatorname{div} v)\, \omega.$$

Izrek sedaj sledi neposredno iz Stokesove formule (6.35). $\square$

Primer 6.20 Naj bo X domena z odsekoma gladkim robom v $\mathbb{R}^3$ s koordinatami (x,y,z), $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ in $v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$. Tedaj je

$$v \rfloor \omega \;=\; a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy, \qquad \operatorname{div} v \;=\; a_x + b_y + c_z.$$

Dobimo klasično Gaussovo formulo:

$$\int_{\partial X} a\,dy\wedge dz + b\,dz\wedge dx + c\,dx\wedge dy \;=\; \int_X (a_x+b_y+c_z)\omega.$$

Primer 6.21 Naj bo $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ enotna krogla s središčem v izhodišču in $S^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$ enotna $(n-1)$-sfera. Radialno vektorsko polje $v = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ je v vsaki točki sfere S^{n-1} pravokotno na tangentni prostor sfere in ima dolžino 1. Odtod sledi, da je notranji produkt

$$\alpha \;=\; v\rfloor\omega \;=\; \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}x_i\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots dx_n$$

s standardno volumsko formo $\omega = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ volumska forma na S^{n-1} glede na evklidsko metriko. Velja $d\alpha = n\omega$ (glej primer 6.7). Volumen sfere je torej enak

$$\mathrm{Vol}(S^{n-1}) \;=\; \int_{S^{n-1}}\alpha \;=\; \int_{\mathbb{B}^n} n\omega \;=\; n\,\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n).$$

V primeru $n=2$ je $\mathrm{Vol}(S^1) = 2\pi = 2\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^2)$. V primeru $n=3$ je $\mathrm{Vol}(S^2) = 3\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^3) = 3(4\pi/3) = 4\pi$. □

Omenimo še eno zanimivo posledico Stokesovega izreka.

Izrek 6.22 *Ne obstaja gladka preslikava $f:\overline{\mathbb{B}}^n \to \partial\mathbb{B}^n = S^{n-1}$ zaprte krogle na sfero, katere zožitev na S^{n-1} je identiteta.*

Preslikava f kot v izreku se imenuje *retrakcija* $\overline{\mathbb{B}}^n$ na S^{n-1}; izrek trdi, da take gladke retrakcije ni. S topološkimi metodami se da dokazati, da tudi zvezne retrakcije ni.

Dokaz Denimo, da je f preslikava kot v izreku. Naj bo $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow \overline{\mathbb{B}}^n$ inkluzija in naj bo $\alpha = v\rfloor\omega$ volumska forma na sferi iz primera 6.21. Ker je $d\alpha = 0$ na S^{n-1}, sledi $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha) = 0$. Po Poincaréjevi lemi 6.4.1 je $f^*\alpha = d\beta$ za neko $(n-1)$-formo β na $\overline{\mathbb{B}}^n$. Ker je $f\circ\iota = \mathrm{Id}$ na S^{n-1}, dobimo

$$\alpha \;=\; (f\circ\iota)^*\alpha \;=\; \iota^*(f^*\alpha) \;=\; \iota^*(d\beta) \;=\; d(\iota^*\beta).$$

Iz posledice 6.17 sledi $\int_{S^{n-1}}\alpha = \int_{S^{n-1}} d(\iota^*\beta) = 0$, kar je protislovje z rezultatom $\int_{S^{n-1}}\alpha = n\,\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n) > 0$ v primeru 6.21. □

Integracija na Riemannovih mnogoterostih. Integral diferencialne forme je *usmerjen integral* v smislu, da je odvisen od orientacije mnogoterosti in ni definiran na neorientabilni mnogoterosti. Razen problema z orientacijo vsebujejo diferencialne forme vso potrebno informacijo za integriranje in pri zamenjavi koordinat, ki ohranjajo orientacijo, se transformirajo enako kot integral.

V klasični analizi pogosto obravnavamo tudi neusmerjene integrale. Tak je običajni n-terni integral funkcije po domeni v $\mathbb{R}^n$ glede na Lebesguovo mero, krivuljni integral funkcije glede na ločno dožino krivulje, ploskovni integral funkcije glede na ploskovno mero, ipd. Omenjene tipe integralov združuje dejstvo, da je objekt, po katerem integriramo, opremeljen z mero (npr., Lebesguova mera na $\mathbb{R}^n$, element ločne dolžine, element ploskovne površine, itd.) Vsaka od teh mer je inducirana z neko Riemannovo metriko, ki omogoča merjenje vseh relevantnih količin.

Pojavi se torej naravno vparašanje, ali lahko definiramo integral zvezne funkcije na poljubni Riemannovi mnogoterosti kot posplošitev in združitev vseh omenjenih tipov neusmerjenih integralov. Odgovor je pozitiven in ga daje naslednji razmislek. Začnimo z domeno $D \subset \mathbb{R}^n$ z Riemannovo metriko

$$g \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j} dx_i \otimes dx_j.$$

Prirejena volumska forma je

$$\Omega \;=\; \sqrt{\det G}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad G = (g_{i,j})$$

(glej (6.24)). Vrednost forme Ω na vsaki pozitivno orientirani ortonormirani bazi tangentnega prostora $T_x\mathbb{R}^n$ v poljubni točki $x \in D$ je enaka 1. Naravno je torej definirati volumen domene D glede na metriko g z

$$\mathrm{Vol}_g(D) \;=\; \int_D \Omega \;=\; \int_D \sqrt{G}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Integral je posplošen, obstaja pa na vsaki relativno kompaktni domeni v D z robom volumna nič. (Slednje zagotovi, da je integral dobro definiran.) Pri spremembi koordinat se integral transformira enako kot volumska forma do znaka natančno. Če ignoriramo znak in vzamemo absolutno vrednost integrala, dobimo pojem volumna poljubne relativno kompaktne množice $D \Subset X$ v Riemannovi mnogoterosti (X, g), ki ima rob ∂D z volumnom nič. Če je D dovolj majhna, da leži $\overline{D}$ v neki lokalni karti $U \subset X$ s pripadajočim difeomorfizmom $\phi : U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^n$, definiramo

$$\mathrm{Vol}_g(D) \;=\; \mathrm{Vol}_{g'}(\phi(D)), \qquad g' \;=\; (\phi^{-1})^* g.$$

Glede na povedano je rezultat neodvisen od izbire lokalne karte. Definicijo volumna nato razširimo na standarden način kot v teoriji mere na σ-algebro vseh Borelovih množic in s tem dobimo Borelovo mero na X, ki jo označimo z dV in imenujemo *volumski element* metrike g. V primeru $\dim X = 2$, ko je X ploskev, se volumski element imenuje tudi *ploščinski element* in se označuje z dA. Na krivuljah pa gre za *element ločne dolžine*. Za vsako zvezno funkcijo f s kompaktnim nosilcem na X je tedaj integral $\int_X f\, dV$ dobro definiran in je neodvisen od orientabilnosti oziroma orientacije mnogoterosti X. Podobno definiramo $\int_X f\, dV$ kot posplošeni integral, če obstaja. Lebesguova mera na $\mathbb{R}^n$ je volumski element, prirejen standardni evklidski metriki ds^2 na opisani način.

6.9 Cartanova formula in posledice

V tem in naslednjem razdelku si bomo ogledali nekaj pomembnih in uporabnih formul, ki povezujejo diferencialne forme, vektorska polja ter razne operacije med njimi. Večina nosi ime *Cartanove formule* po francoskem matematiku Élieju Cartanu, ki je bistveno prispeval k razvoju področja diferencialnih sistemov in koordinatno neodvisni formulaciji problemov s področja parcialnih diferencialnih enačb. (Njegov sin Henri Cartan je bil eden vodilnih kompleksnih analistov 20. stoletja; omenili smo ga v poglavju 1 v povezavi s Steinovimi mnogoterostmi.) Pregled Cartanovih formul lahko najdemo v [2, pp. 444–446].

Prva od Cartanovih formul, ki jih bomo predstavili, je naslednja. Spomnimo se, da $[v,w]$ označuje komutator vektorskih polj v in w (glej razdelek 2.5).

Trditev 6.23 *Če je α diferencialna 1-forma in sta v,w vektorski polji, velja*

$$\langle d\alpha, v\wedge w\rangle \;=\; v(\langle \alpha, w\rangle) - w(\langle \alpha, v\rangle) - \langle \alpha, [v,w]\rangle. \tag{6.37}$$

Dokaz Ker so vse operacijo v zgornji formuli koordinatno neodvisne, zadošča obravnati forme in vektorska polja na $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $(x_1,\ldots,x_n)$. Zaradi svobode izbire koordinat in linearnosti vseh izrazov v (6.37) zadošča formulo dokazati v naslednjem posebnem primeru:

$$\alpha \;=\; a\,dx_1, \qquad v \;=\; b\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w \;=\; c\frac{\partial}{\partial x_k},$$

kjer je $1\le j\le k$ in so a,b,c funkcije. Z $\delta_{i,j}$ označimo Kroneckerjev delta. Velja:

$$\begin{aligned}
v(\langle \alpha, w\rangle) &= b\frac{\partial}{\partial x_j}(ac\delta_{1,k}) \;=\; ab\frac{\partial c}{\partial x_j}\delta_{1,k} + bc\frac{\partial a}{\partial x_j}\delta_{1,k}\\
w(\langle \alpha, v\rangle) &= c\frac{\partial}{\partial x_k}(ab\delta_{1,j}) \;=\; ac\frac{\partial b}{\partial x_k}\delta_{1,j} + bc\frac{\partial a}{\partial x_k}\delta_{1,j}\\
\langle \alpha, [v,w]\rangle &= \left\langle a\,dx_1, b\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} - c\frac{\partial b}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle\\
&= ab\frac{\partial c}{\partial x_j}\delta_{1,k} - ac\frac{\partial b}{\partial x_k}\delta_{1,j}.
\end{aligned}$$

Odtod sledi, da je desna stran enačbe (6.37) enaka 0, če $1\notin\{j,k\}$ ali $j=k$, ter je enaka $-bc\frac{\partial a}{\partial x_k}$, če je $1=j<k$. Po drugi strani je leva stran enačbe (6.37) enaka

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, v\wedge w\rangle &= \left\langle \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_l}dx_l\wedge dx_1, b\frac{\partial}{\partial x_j}\wedge c\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle\\
&= \begin{cases} 0, & \text{če } 1\notin\{j,k\} \text{ ali } j=k,\\ -bc\frac{\partial a}{\partial x_k}, & \text{če je } 1=j<k. \end{cases}
\end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana. □

V luči formule (6.37) si ponovno oglejmo problem involutivnosti, ki smo ga obravnavali v sklopu Frobeniusovega izreka v razdelku 2.7. Naj bo $E \subset TX$ gladek vektorski podsveženj kodimenzije d tangentnega svežnja TX. Njegov *anihilator* je

$$E^{\perp} \;=\; \big\{\alpha \in T_x^*X : x \in X,\ \langle \alpha, v\rangle = 0 \text{ za vsak } v \in E_x\big\}. \tag{6.38}$$

Očitno je $E^{\perp}$ vektorski podsveženj ranga d kotangentnega svežnja. Lokalno v okolici poljubne točke $p \in X$ je $E^{\perp}$ generiran z 1-formami $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, ki so linearno neodvisne po točkah. Obratno lahko vsakemu vektorskemu podsvežnju $E^* \subset T^*X$ ranga d priredimo vektorski podsveženj tangentnega svežnja

$$E \;=\; (E^*)^{\perp} \;=\; \{v \in T_xX : x \in X,\ \langle \alpha, v\rangle = 0 \text{ za vsak } \alpha \in E_x^*\},$$

ki ima rang enak $\dim X - d$.

Zanima nas, kako bi involutivnost podsvežnja $E \subset TX$ karakterizirali z lastnostmi njegovega anihilatorja $E^{\perp}$ oziroma z 1-formami, ki slednjega lokalno generirajo. Naj bo $U \subset X$ odprta podmnožica, na kateri sta svežnja E in $E^{\perp}$ trivialna. Izberimo vektorska polja $v_1, \ldots, v_m$ na U, ki generirajo $E|_U$ in 1-forme $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, ki generirajo $E^{\perp}|_U$; torej je $m + d = n = \dim X$. Tedaj je $\langle \alpha_i, v_j\rangle = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, d$ in $j = 1, \ldots, m$, zato iz Cartanove formule (6.37) sledi

$$\langle d\alpha_i, v_j \wedge v_k\rangle \;=\; -\langle \alpha_i, [v_j, v_k]\rangle.$$

Podsveženj $E|_U$ je involutiven natanko tedaj, ko so vsi komutatorji $[v_j, v_k]$ tangentni na E. Iz zgornjih enačb sledi, da to velja natanko tedaj, ko je zožitev vsake 2-forme $d\alpha_i$ na E enaka nič, kar pišemo $d\alpha_i|_E = 0$; torej velja

$$\langle d\alpha_i, v \wedge w\rangle \;=\; 0 \;\text{ za poljubna } v, w \in E_x,\;\; x \in U.$$

Za dokončanje argumenta potrebujemo naslednjo trditev.

Trditev 6.24 *Naj bo $E \subset TX$ vektorski podsveženj kodimenzije d, ki je definiran z 1-formami $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Za poljubno 2-formo β velja $\beta|_E = 0$ natanko tedaj, ko je $\beta = \sum_{i=1}^d \beta_i \wedge \alpha_i$ za neke 1-forme $\beta_1, \ldots, \beta_d$ na X.*

Dokaz Denimo, da je $\beta|_E = 0$. Fiksiramo točko $p \in X$ in lokalno v okolici p dopolnimo $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ do lokalne baze $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kotangentnega svežnja. Tedaj je $\beta = \sum_{i<j} b_{i,j} \alpha_i \wedge \alpha_j$. Naj bodo $v_{d+1}, \ldots, v_n$ linearno neodvisna vektorska polja v okolici p, tangentna na E, tako da je $\langle \alpha_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$ za $d+1 \le i, j \le n$. Ker je $\beta|_E = 0$, sledi

$$0 \;=\; \langle \beta, v_k \wedge v_l\rangle \;=\; b_{k,l} \;\text{ za } d+1 \le k, l \le n.$$

Torej vsak neničeln člen v β vsebuje vsaj eno od form $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Odtod sledi, da je β želene oblike v neki okolici poljubne točke $p \in X$. Globalne 1-forme β_i na X s temi lastnostmi najdemo s pomočjo particije enote. □

Iz trditve in prejšnje diskusije sledi naslednja karakterizacija involutivnosti.

Izrek 6.25 *Za vektorski podsveženj $E \subset TX$ kodimenzije d, definiran z 1-formami $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, so naslednje lastnosti ekvivalentne.*

1. *E je involutiven (in zato popolnoma integrabilen po izreku 2.59).*
2. *$d\alpha_i|_E = 0$ za $i = 1, \ldots, d$.*
3. *$d\alpha_i = \sum_{j=1}^{d} \beta_{i,j} \wedge \alpha_j$ $(i = 1, \ldots, d)$ za neke 1-forme $\beta_{i,j}$ na X.*

Zgornji izrek lahko povemo na bolj formalen način. Naj bo $\mathscr{J}_E \subset \mathscr{D}(X)$ dvostranski ideal v algebri $\mathscr{D}(X)$ vseh gladkih form na X, ki je generiran s prerezi anihilatorja $E^\perp$ (6.38). Tedaj je E involutiven natanko tedaj, ko je $\mathscr{J}_E$ diferencialni ideal v smislu

$$d(\mathscr{J}_E) \subset \mathscr{J}_E.$$

V primeru $d = 1$ ima izrek 6.25 naslednjo posledico.

Posledica 6.26 *Naj bo $E = \ker\alpha \subset TX$ vektorski podsveženj kodimenzije 1 (torej je α 1-forma brez ničel na X). Tedaj so naslednje lastnosti ekvivalentne:*

1. *E involutiven.*
2. *$d\alpha|_E = 0$.*
3. *$\alpha \wedge d\alpha = 0$.*
4. *$d\alpha = \beta \wedge \alpha$ za neko 1-formo β na X.*

Godbillon–Veyjev kohomološki razred foliacije. Naj bo $E = \ker\alpha \subset TX$ integrabilen vektorski podsveženj kodimenzije ena, ki je globalno definiran z neničelno 1-formo α. Taka forma obstaja natanko tedaj, ko je normalni sveženj $TX/E \cong E^\perp$ trivialen sveženj premic; v tem primeru pravimo, da je foliacija X s hiperploskvami, tangentnimi na E (glej izrek 2.59), *transverzalno orientabilna*. (Pri svežnjih premic je orientabilnost ekvivalentna trivialnosti.) V tem primeru lahko podsvežnju E pridružimo kohomološki razred v $H^3_{dR}(X)$ na naslednji način.

Po izreku 2.59 in posledici 6.26 je integrabilnost svežnja E ekvivalentna obstoju 1-forme β na X, tako da je $d\alpha = \beta \wedge \alpha$. Iz

$$0 \;=\; d^2\alpha \;=\; d\beta \wedge \alpha - \beta \wedge d\alpha \;=\; d\beta \wedge \alpha - \beta \wedge \beta \wedge \alpha \;=\; d\beta \wedge \alpha$$

sledi $d\beta|_E = 0$. Dejansko, če je $u, v \in E_x$ in je $w \in T_xX$ vektor z $\langle \alpha, w\rangle = 1$, dobimo

$$0 \;=\; \langle d\beta \wedge \alpha, u \wedge v \wedge w\rangle \;=\; \langle d\beta, u \wedge v\rangle.$$

Ker je $E = \ker\alpha$, iz trditve 6.24 sledi $d\beta = \gamma \wedge \alpha$ za neko 1-formo γ. Definirajmo

$$\omega \;=\; \alpha \wedge \beta \wedge \gamma. \tag{6.39}$$

Njen diferencial je enak

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d\alpha\wedge\beta\wedge\gamma - \alpha\wedge d\beta\wedge\gamma + \alpha\wedge\beta\wedge d\gamma \\
&= (\beta\wedge\alpha)\wedge\beta\wedge\gamma - \alpha\wedge(\gamma\wedge\alpha)\wedge\gamma + \alpha\wedge\beta\wedge d\gamma \\
&= \alpha\wedge\beta\wedge d\gamma.
\end{aligned}
$$

Nadalje je

$$0 = d^2\beta = d(\gamma\wedge\alpha) = d\gamma\wedge\alpha - \gamma\wedge d\alpha = d\gamma\wedge\alpha - \gamma\wedge\beta\wedge\alpha.$$

Če enačbo pomnožimo na desni z β, dobimo

$$0 = d\gamma\wedge\alpha\wedge\beta = \alpha\wedge\beta\wedge d\gamma = d\omega.$$

Torej je 3-forma ω (6.39) sklenjena in zato določa de Rhamov kohomološki razred $[\omega]\in H^3_{dR}(X)$. Nadalje lahko preverimo, je razred $[\omega]$ odvisen le od svežnja E in ne od izbire definicijske 1-forme α; konkretno, če je $\alpha' = f\alpha$ za neko funkcijo f na X brez ničel, prirejena forma ω' zadošča $[\omega'] = [\omega]\in H^3_{dR}(X)$.
Ta razred se imenuje Godbillon–Veyjev kohomološki razred foliacije, ki jo določa integrabilen sveženj hiperravnin $E\subset TX$.

6.10 Liejev odvod forme in Cartanove formule

V razdelku 2.6 smo definirali Liejev odvod $L_v w$ vektorskega polja w vzdolž vektorskega polja v in pokazali, da je $L_v w = [v,w]$ enak komutatorju polj (glej trditev 2.49). Podobno lahko definiramo Liejev odvod poljubnega tenzorskega polja w vzdolž vektorskega polja v. Naj bo ϕ_t tok polja v. Če je w kovariantno tenzorsko polje (to je vektorsko polje ali njihov tenzorski ali vnanji produkt), imamo na vsaki kompaktni podmnožici v mnogoterosti X definiran potisk $(\phi_t)_* w$ z difeomorfizmom ϕ_t za majhen $t\in\mathbb{R}$ in povlek $\phi_t^* w = (\phi_{-t})_* w$. Če je w kontravariantno tenzorsko polje (to je tenzorski ali vnanji produkt diferencialnih form), imamo definiran povlek $\phi_t^* w$. V vsakem primeru definiramo Liejev odvod z naslednjo formulo:

$$L_v w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^* w. \tag{6.40}$$

Bolj eksplicitno:

$$(L_v w)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi_t^*(w_{\phi_t(p)}) - w_p\right), \qquad p\in X.$$

Podobno kot pri vektorskih poljih dobimo naslednjo preprosto posledico definicije.

Trditev 6.27 *Naj bo ϕ_t tok vektorskega polja v. Za vsako tenzorsko polje w velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}(\phi_t^* w) \;=\; \phi_s^*(L_v w).$$

Torej velja

$$L_v w \;=\; 0 \iff \phi_t^* w \;=\; w \;\text{ za vsak } t.$$

Izrek 6.28 (Lastnosti Liejevega odvoda diferencialnih form) *Naj bo v gladko vektorsko polje na mnogoterosti X. Liejev odvod L_v ima naslednje lastnosti.*

(a) *Če je f funkcija na X, velja*

$$L_v f \;=\; v(f) \;=\; \langle df, v\rangle, \qquad L_v(df) \;=\; d(v(f)) \;=\; d(v\rfloor df).$$

(b) *Če sta α in β diferencialni formi na X, velja Leibnizovo pravilo:*

$$L_v(\alpha\wedge\beta) \;=\; (L_v\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_v\beta).$$

(c) *Za vsako diferencialno formo α velja*

$$L_v(d\alpha) \;=\; d(L_v\alpha).$$

(d) *Za vsako diferencialno formo α velja Cartanova formula*

$$L_v\alpha \;=\; v\rfloor d\alpha + d(v\rfloor\alpha). \tag{6.41}$$

Če je α sklenjena, velja $L_v\alpha = d(v\rfloor\alpha)$.

(e) *Za vsako formo α in funkcijo f velja*

$$L_{fv}\alpha \;=\; f\cdot L_v\alpha + df\wedge(v\rfloor\alpha).$$

(f) *Če je $f: X\to Y$ difeomorfizem, v vektorsko polje na Y in α diferencialna forma na Y, velja*

$$f^*(L_v\alpha) \;=\; L_{f^*v}(f^*\alpha).$$

Dokaz

(a) Za funkcijo f velja

$$(L_v f)_p \;=\; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\phi_t(p)) \;=\; v(f)_p, \qquad p\in X,$$

ker je $\frac{d}{dt}\phi_t(p) = v_p$. Za prostorski diferencial $d = d_X$ (to oznako uporabimo, da ga ločimo od odvoda po t) dobimo:

$$\begin{aligned} L_v(d_X f)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^* \left((d_X f)_{\phi_t(p)}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d_X(f\circ\phi_t)_p \\ &= d_X\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\phi_t(p))\right) \\ &= d_X(v(f))_p. \end{aligned}$$

(b) V računu bomo uporabili dejstvo, da je povlek form homomorfizem za vnanji produkt (glej (6.8)):

$$\begin{aligned} L_v(\alpha\wedge\beta) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^*(\alpha\wedge\beta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\phi_t^*\alpha\wedge\phi_t^*\beta\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^*\alpha\right)\wedge\beta+\alpha\wedge\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^*\beta\right) \\ &= (L_v\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge(L_v\beta). \end{aligned}$$

(c) Dokaz je enak kot v drugem primeru točke (a), ko je $\alpha = f$ funkcija.

(d) Formulo (6.41) dokažemo z indukcijo na stopnjo r forme α. Za $r = 0$ je $\alpha = f$ funkcija in formula sovpada s prvim primerom v točki (a). Denima, da formula velja za vse r-forme. Poljubno $(r+1)$-formo α lahko zapišemo v obliki

$$\alpha = \sum_i df_i\wedge\omega_i,$$

kjer so ω_i r-forme in f_i funkcije. Zaradi linearnosti zadošča dokazati formulo (6.41) za vsak člen posebej, zato lahko vzamemo, da je $\alpha = df\wedge\omega$. Po točki (b) je leva stran formule enaka

$$L_v(df\wedge\omega) = L_v(df)\wedge\omega+df\wedge L_v\omega.$$

Izračunajmo še desno stran:

$$\begin{aligned} v\rfloor d\big(df\wedge\omega\big) &+ d\big(v\rfloor(df\wedge\omega)\big) \\ &= -v\rfloor(df\wedge d\omega)+d\big((v\rfloor df)\omega-df\wedge(v\rfloor\omega)\big) \\ &= -(v\rfloor df)\wedge d\omega+df\wedge(v\rfloor d\omega)+ \\ &+ d(v\rfloor df)\wedge\omega+(v\rfloor df)\wedge d\omega+df\wedge d(v\rfloor\omega) \\ &= df\wedge\big(v\rfloor d\omega+d(v\rfloor\omega)\big)+d(v(f))\wedge\omega \\ &= df\wedge L_v\omega+L_v(df)\wedge\omega. \end{aligned}$$

Pri zadnjem enačaju smo uporabili induktivno hipotezo, da formula velja za ω. Dobljen izraz je enak kot smo ga dobili na levi strani.

(e) Uporabimo točko (d):

$$\begin{aligned} L_{fv}\alpha &= (fv)\rfloor d\alpha + d\big((fv)\rfloor \alpha\big) \\ &= f(v\rfloor d\alpha) + d\big(f(v\rfloor\alpha)\big) \\ &= f(v\rfloor d\alpha) + f\,d(v\rfloor\alpha) + df\wedge(v\rfloor\alpha) \\ &= f\cdot L_v\alpha + df\wedge(v\rfloor\alpha). \end{aligned}$$

(f) Poleg že dokazanih lastnosti bomo v naslednjem računu uporabili lahko preverljivo dejstvo, da je $(f^*v)\rfloor(f^*\alpha) = f^*(v\rfloor\alpha)$:

$$\begin{aligned} f^*(L_v\alpha) &= f^*\big(v\rfloor d\alpha + d(v\rfloor d\alpha)\big) \\ &= f^*v\rfloor f^*d\alpha + d\big(f^*(v\rfloor\alpha)\big) \\ &= f^*v\rfloor d(f^*\alpha) + d\big(f^*v\rfloor f^*\alpha\big) \\ &= L_{f^*v}(f^*\alpha). \end{aligned}$$

S tem je izrek 6.28 dokazan. □

S pomočjo formule (6.41) dokažimo naslednjo *Liouvillovo formulo*, ki pove, da divergenca vektorskega polja meri spremembo volumna v toku polja.

Izrek 6.29 (Liouvillova formula) *Če je v vektorsko polje na Riemannovi mnogoterosti (X,g) s tokom ϕ_t in je D relativno kompaktna domena v X, katere rob ima volumen nič, potem je*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}_g(\phi_t(D)) = \int_D \mathrm{div}\, v\cdot dV. \tag{6.42}$$

Dokaz Denimo najprej, da je X orientirana in naj bo Ω volumska forma na X, prirejena Riemannovi metriki g in dani orientaciji (glej (6.24)). Po formuli (6.29) je $d(v\rfloor\Omega) = \int_D(\mathrm{div}\, v)\Omega$. Iz definicije Liejevega odvoda in formule (6.41) sledi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}_g(\phi_t(D)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_{\phi_t(D)}\Omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_D \phi_t^*\Omega \\ &= \int_D \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^*\Omega = \int_D L_v\Omega = \int_D d(v\rfloor\Omega) = \int_D(\mathrm{div}\, v)\Omega. \end{aligned}$$

Če X ni orientabilna, razdelimo D na unijo manjših zaprtih domen, ki se sekajo samo vzdolž robnih ploskev in je vsaka od njih orientabilna. Na vsaki od teh manjših domen uporabimo dokazano formulo in upoštevamo, da divergenca ni odvisna od izbire orientacije. □

Poglavje 7

De Rhamova kohomologija in Poincaréjeva dualnost

7.1 De Rhamova kohomologija gladke mnogoterosti

Pojem de Rhamove komologije smo uvedli v razdelku 6.4 in jo na kratko ponovimo. Naj bo $\mathscr{D}(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathscr{D}^k(X)$ gradirana algebra gladkih diferencialnih form na gladki mnogoterosti X dimenzije $n = \dim X$. (Za $k > n$ je $\mathscr{D}^k(X) = \{0\}$.) Diferencial $d : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k+1}(X)$ je linearna preslikava vektorskih prostorov in njegov kvadrat $d^2 = d \circ d$ je enak nič (glej izrek 6.2). Za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$ je k-ta *de Rhamova kohomološka grupa* realen vektorski prostor

$$H^k_{dR}(X) \;=\; \frac{\{\alpha \in \mathscr{D}^k(X) : d\alpha = 0\}}{\{d\beta : \beta \in \mathscr{D}^{k-1}(X)\}} \;=\; \frac{\mathscr{Z}^k(X)}{\mathscr{E}^k(X)}, \tag{7.1}$$

kjer sta

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}^k(X) &= \ker\Big(d : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^{k+1}(X)\Big) \\ \mathscr{E}^k(X) &= \operatorname{im}\Big(d : \mathscr{D}^{k-1}(X) \to \mathscr{D}^k(X)\Big) \end{aligned}$$

vektorska prostora sklenjenih in eksaktnih k-form; pri tem je $\mathscr{E}^0(X) = \{0\}$.

De Rhamova kohomološka algebra mnogoterosti X je direktna vsota vseh de Rhamovih kohomoloških grup:

$$H^*_{dR}(X) \;=\; \bigoplus_{k=0}^{\dim X} H^k_{dR}(X). \tag{7.2}$$

Če je mnogoterost X povezana, je $\mathscr{Z}^0(X) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(X) : df = 0\} = \mathbb{R}$ in zato $H^0_{dR}(X) = \mathbb{R}$. Očitno je $H^k_{dR}(X) = 0$ za $k > n = \dim X$. Iz Poincaréjeve leme 6.4.1 sledi, da za kontraktibilno mnogoterost X (v posebnem za vsako konveksno domeno v $\mathbb{R}^n$) velja $H^k_{dR}(X) = 0$ za vse $k \geq 1$. Iz posledice 6.17 Stokesovega izreka sledi tudi naslednja trditev.

Trditev 7.1 *Če je X kompaktna orientabilna mnogoterost dimenzije n brez roba, je $H^n_{dR}(X) \neq 0$.*

Dokaz Naj bo g Riemannova metrika na X in Ω prirejena volumska forma (glej (6.24)). Očitno je $d\Omega = 0$. Ker je $\int_X \Omega = \mathrm{Vol}_g(X) > 0$, forma Ω po posledici 6.17 ni eksaktna. Njen kohomološki razred $[\Omega] \in H^n_{dR}(X)$ torej ni enak 0. □

Opomba 7.2 *Če je X kompaktna, orientabilna, povezana mnogoterost dimenzije n brez roba, je $H^n_{dR}(X) \cong \mathbb{R}$; glej posledico 7.23 Poincaréjevi dualnosti (izrek 7.22).*

Naj bo $f : X \to Y$ gladka preslikava mnogoterosti. Povlek diferencialne forme $\alpha \in \mathscr{D}^k(Y)$ je diferencialna forma $f^*\alpha \in \mathscr{D}^k(X)$. Po točki 5 v izreku 6.2 povlek komutira z diferencialom: $d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha)$. Odtod sledi, da povlek preslika sklenjene forme na Y v sklenjene forme na X in eksaktne forme na Y v eksaktne forme na X:

$$f^* : \mathscr{Z}^k(Y) \to \mathscr{Z}^k(X), \qquad f^* : \mathscr{E}^k(Y) \to \mathscr{E}^k(X).$$

Zato povlek inducira linearno preslikavo de Rhamovih kohomoloških grup:

$$f^* : H^k_{dR}(Y) \longrightarrow H^k_{dR}(X), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Če je tudi $g : Y \to Z$ gladka preslikava, velja $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. To pomeni:

$$\text{prireditev } X \rightsquigarrow H^*_{dR}(X) \text{ je kontravarianten funktor.}$$

Difeomorfizem $X \to Y$ torej inducira izomorfizem $H^k_{dR}(Y) \to H^k_{dR}(X)$ za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$. Diferencial je antiderivacija na algebri $\mathscr{D}(X)$ (glej točko 2 v izreku 6.2):

$$d(\alpha \wedge \beta) \;=\; d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad \text{za } \alpha \in \mathscr{D}^p(X) \text{ in } \beta \in \mathscr{D}^q(X).$$

Če je $d\alpha = 0$ in $d\beta = 0$, sledi $d(\alpha \wedge \beta) = 0$, torej je produkt sklenjenih form spet sklenjena forma. Nadalje, če je $d\beta = 0$, iz zgornje formule sledi

$$d\alpha \wedge \beta \;=\; d(\alpha \wedge \beta),$$

torej je produkt sklenjene forme z eksaktno formo spet eksaktna forma. To pomeni, da klinasti produkt $\wedge$ na algebri gladkih form $\mathscr{D}(X)$ inducira produkt na de Rhamovi kohomologiji $H^*_{dR}(X)$ (7.2), ki spoštuje gradacijo:

$$[\alpha] \in H^p_{dR}(X), \quad [\beta] \in H^q_{dR}(X) \implies [\alpha \wedge \beta] \in H^{p+q}_{dR}(X). \tag{7.3}$$

Uvedli bomo tudi de Rhamovo kohomologijo s kompaktni nosilci. Označimo z

$$\mathscr{D}_c(X) \;=\; \bigoplus_{k=0}^{\dim X} \mathscr{D}^k_c(X)$$

algebro diferencialnih form s kompaktnim nosilcem. Torej je $\mathscr{D}_c(X) = \mathscr{D}(X)$ natanko tedaj, ko je mnogoterost X kompaktna. Prirejena de Rhamova kohomologija s kompaktnimi nosilci je

$$H^k_{dR,c}(X) = \frac{\{\alpha \in \mathscr{D}^k_c(X) : d\alpha = 0\}}{\{d\beta : \beta \in \mathscr{D}^{k-1}_c(X)\}} = \frac{\mathscr{Z}^k_c(X)}{\mathscr{E}^k_c(X)},$$

$$H^*_{dR,c}(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} H^k_{dR,c}(X), \tag{7.4}$$

kjer sta $\mathscr{Z}^k_c(X)$ in $\mathscr{E}^k_c(X)$ vektorska prostora sklenjenih in eksaktnih k-form s kompaktnim nosilcem.

Na odprti (nekompaktni) povezani mnogoterosti je vsaka sklenjena 0-forma konstantna funkcija; ta ima kompakten nosilec samo če je ničelna funkcija. Torej je $H^0_{dR,c}(X) = 0$, medtem ko je $H^0_{dR}(X) = \mathbb{R}$.

7.2 Poincaréjeva lema za de Rhamovo kohomologijo

Naj bo X gladka mnogoterost, $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ projekcija $\pi(x,t) = x$ in $\iota_s : X \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$ vložitev $\iota_s(x) = (x,s)$, kjer je $s \in \mathbb{R}$.

Izrek 7.3 *Za vsak $s \in \mathbb{R}$ sta preslikavi*

$$\pi^* : H^*_{dR}(X) \to H^*_{dR}(X \times \mathbb{R}), \qquad \iota_s^* : H^*_{dR}(X \times \mathbb{R}) \to H^*_{dR}(X)$$

inverzna izomorfizma. Izomorfizem $\iota_s^* = (\pi^*)^{-1}$ je torej neodvisen od $s \in \mathbb{R}$.

Dokaz Iz $\pi \circ \iota_s = \mathrm{Id}_X$ sledi $\iota_s^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}$ na $\mathscr{D}(X)$ in zato $\iota_s^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}$ na $H^*_{dR}(X)$.
Obratno, $\iota_s \circ \pi(x,t) = (x,s)$ in $\pi^* \circ \iota_s^*$ očitno ni identiteta na $\mathscr{D}(X \times \mathbb{R})$. Dokazali pa bomo, da je $\pi^* \circ \iota_s^* = \mathrm{Id}$ na $H^*_{dR}(X \times \{R\})$. To sledi iz naslednje leme, v kateri konstruiramo t.i. *homotopski operator* za diferencial d.

Lema 7.4 *Za vsak $k \in \mathbb{N}$ in $s \in \mathbb{R}$ obstaja linearen operator $K_k : \mathscr{D}^k(X \times \mathbb{R}) \to \mathscr{D}^{k-1}(X)$, ki zadošča pogoju*

$$\mathrm{Id} - \pi^* \circ \iota_s^* = (-1)^{k+1}(d \circ K_k - K_{k+1} \circ d). \tag{7.5}$$

Denimo, da lema velja. Za vsako formo $\alpha \in \mathscr{D}^k(X \times \mathbb{R})$ je po zgornji formuli

$$\alpha - \pi^* \iota_s^* \alpha = (-1)^{k+1}\big(d(K_k\alpha) - K_{k+1}(d\alpha)\big).$$

Če je $d\alpha = 0$, dobimo

$$\alpha - \pi^* \iota_s^* \alpha = (-1)^{k+1} d(K_k \alpha),$$

torej je $[\alpha] = [\pi^* \iota_s^* \alpha] \in H^k_{dR}(X \times \mathbb{R})$. To ravno pomeni, da je $\pi^* \circ \iota_s^* = \mathrm{Id}$ na $H^*_{dR}(X \times \{R\})$ in izrek je dokazan.

Dokaz leme 7.4 Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$ in označimo spremenljivko na $\mathbb{R}$ s t. Diferencial na produktni mnogoterosti $X \times \mathbb{R}$ je vsota $d = d_X + d_t$ diferencialov na posameznih faktorjih. Vsaka forma na $X \times \mathbb{R}$ je vsota form naslednjih dveh tipov:

$$\text{(a)}\ \ (\pi^*\alpha) f(x,t), \qquad \text{(b)}\ \ (\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt,$$

kjer je $\alpha \in \mathscr{D}(X)$ in $f \in \mathscr{C}^\infty(X \times \mathbb{R})$. Operator $K : \mathscr{D}(X \times \mathbb{R}) \to \mathscr{D}(X)$ definiramo tako, da je enak nič na vseh formah tipa (a), na formah tipa (b) pa je

$$K\big((\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt\big) \;=\; (\pi^*\alpha) \int_s^t f(x,\tau)d\tau.$$

Naj bo $\omega = (\pi^*\alpha) f(x,t)$ k-forma tipa (a). Tedaj je

$$\begin{aligned}
\iota_s^* \omega &= \iota_s^* \pi^* \alpha \cdot \iota^* f(x,t) \;=\; \alpha \cdot f(x,s), \\
\pi^* \iota_s^* \omega &= \pi^*(\alpha \cdot f(x,s)) = (\pi^*\alpha) f(x,s), \\
(\mathrm{Id} - \pi^* \iota_s^*)\omega &= (\pi^*\alpha)(f(x,t) - f(x,s)), \\
dK\omega - Kd\omega &= -Kd\omega \qquad (\text{ker je } K\omega = 0) \\
&= -K\big(d(\pi^*\alpha) f(x,t) + (-1)^k (\pi^*\alpha)(d_X f(x,t) + f_t(x,t)dt)\big) \\
&= (-1)^{k+1} (\pi^*\alpha) \int_s^t f_t(x,\tau)d\tau \\
&= (-1)^{k+1} (\pi^*\alpha)\,(f(x,t) - f(x,s)) \\
&= (-1)^{k+1} (\mathrm{Id} - \pi^* \circ \iota_s^*)\omega.
\end{aligned}$$

Torej formula 7.5 velja za forme tipa (a). Naj bo sedaj $\omega = (\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt$ k-forma tipa (b), torej je $\alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(X)$. Ker je $\iota_s^*(dt) = 0$, je $\iota_s^*\omega = 0$. Velja:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \pi^*(d\alpha) \wedge f(x,t)dt + (-1)^{k-1} \pi^*(\alpha) \wedge d_X f(x,t)dt, \\
K(d\omega) &= \pi^*(d\alpha) \int_s^t f(x,\tau)d\tau + (-1)^{k-1} \pi^*(\alpha) \wedge \int_s^t d_X f(x,\tau)d\tau, \\
d(K\omega) &= d\left((\pi^*\alpha) \int_s^t f(x,\tau)d\tau\right) \\
&= \pi^*(d\alpha) \int_s^t f(x,\tau)d\tau \\
&\qquad + (-1)^{k-1} (\pi^*\alpha) \wedge \left(\int_s^t d_X f(x,\tau)d\tau + f(x,t)dt\right), \\
d(K\omega) - K(d\omega) &= (-1)^{k-1} (\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt = (-1)^{k-1}\omega \\
&= (\mathrm{Id} - \pi^* \circ \iota_s^*)\omega.
\end{aligned}$$

Lema 7.4 je dokazana in s tem tudi izrek 7.3. □

Opomba 7.5 Izrek 7.3 velja z istim dokazom, če $X \times \mathbb{R}$ nadomestimo z $X \times I$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ poljuben interval. Če je $\iota_s : X \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$ vložitev $\iota(x) = (x,s)$, kjer je $s \in I$, je izomorfizem $\iota_s^* = (\pi^*)^{-1} : H^*_{dR}(X \times I) \to H^*_{dR}(X)$ neodvisen od $s \in I$.

Posledica 7.6 *Če je $f_t : X \to Y$ $(t \in [0,1])$ gladka homotopija gladkih preslikav, je homomorfizem $f_t^* : H^*_{dR}(Y) \to H^*_{dR}(X)$ neodvisen od $t \in [0,1]$.*

Dokaz Naj bo $F : X \times [0,1] \to Y$ preslikava $F(x,t) = f_t(x)$ in $\iota_t : X \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$ vložitev $\iota_t(x) = (x,t)$ za $t \in [0,1]$. Tedaj je $f_t = F \circ \iota_t$ in zato je homomorfizem $f_t^* = \iota_t^* \circ F^*$ neodvisen od $t \in [0,1]$. □

Posledica 7.7 *Če je gladka preslikava $f : X \to Y$ homotopska ekvivalenca, inducira izomorfizem $f^* : H^*_{dR}(Y) \xrightarrow{\cong} H^*_{dR}(X)$ na de Rhamovi kohomologiji. V posebnem, če je X kontraktibilna, je $H^k_{dR}(X) = 0$ za vsak $k \geq 1$.*

Dokaz Predpostavka pomeni, da obstaja gladka preslikava $g : Y \to X$, tako da sta kompoziciji $g \circ f : X \to X$ in $f \circ g : Y \to Y$ izotopni identični preslikavi na X oziroma Y. Iz posledice 7.6 sledi, da sta $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^*_{dR}(X) \to H^*_{dR}(X)$ in $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^*_{dR}(Y) \to H^*_{dR}(Y)$ identični preslikavi. □

Primer 7.8 (de Rhamova kohomologija krožnice) Dokažimo, da za krožnico S^1 velja
$$H^0_{dR}(S^1) = \mathbb{R}, \qquad H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}, \qquad H^k_{dR}(S^1) = 0 \ \text{ za } k \geq 2.$$
Prva enakost sledi, ker je S^1 povezana, zadnja pa iz dejstva, da so na vsaki mnogoterosti X de Rhamove grupe dimenzije $k > \dim X$ enake nič. Preostane nam dokazati $H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$. Predstavimo krožnico kot kvocient $S^1 = \mathbb{R}/2\pi$ in naj bo $t \in \mathbb{R}$ parameter na S^1. Vsaka 1-forma na S^1 je oblike $\alpha = f(t)dt$, kjer je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka 2π-periodična funcija. Oglejmo si linearen funkcional
$$K : \mathscr{Z}^1(S^1) = \mathscr{D}^1(S^1) \to \mathbb{R}, \qquad K(f(t)dt) = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$
Ker je $\int_0^{2\pi} c\,dt = 2\pi c$ za $c \in \mathbb{R}$, je K surjektiven. Jedro $\ker K$ sestavljajo forme $f(t)dt$ z integralom enakim nič. Slednje velja natanko tedaj, ko je funkcija $g(t) = \int_0^t f(s)ds$ $(s \in \mathbb{R})$ 2π-periodična, torej definira funkcijo na S^1. Njen diferencial je $dg(t) = f(t)dt$. Torej je $\ker K$ ravno množica $\mathscr{E}^1(S^1)$ vseh eksaktnih 1-form na S^1. Zato K inducira izomorfizem $H^1_{dR}(S^1) = \mathscr{Z}^1(S^1)/\mathscr{E}^1(S^1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$.

Primer 7.9 (Kohomologija ravninskih domen) Punktirana ravnina $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ je homotopna krožnici, zato iz posledice 7.7 in primera 7.8 sledi
$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) = H^k_{dR}(S^1) = \begin{cases} 1, & k \in \{0,1\}; \\ 0, & k \geq 2. \end{cases}$$

Podobno lahko vidimo, da za domeno $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$, kjer so $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^2$ različne točke, velja

$$H^k_{dR}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}\right) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0; \\ \mathbb{R}^m, & k = 1; \\ 0, & k > 1. \end{cases} \tag{7.6}$$

Za $k = 0$ to velja, ker je domena povezana. Za $k = 2$ trditev sledi iz posledice 7.7 ter dejstva, da obstaja gladka retrakcija domene X na šop m krožnic; slednja sicer ni gladka mnogoterost v eni točki, toda argumenti še vedno veljajo. (Isto sledi iz točke 2 v posledici 7.23, kjer uporabimo Poincaréjevo dualnost.)

Dokažimo sedaj (7.6) za $k = 1$. Izberimo točko $p_0 \in X$ in zanke $\gamma_i : [0, 1] \to X$ pripete v $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = p_0$ za $i = 1, \ldots, m$, tako da γ_i enkrat obkroži točko p_i v pozitivni smeri in ne obkroži nobene druge točke p_j za $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i\}$. (Natančneje to pomeni, da ima γ_i ovojno število 1 okrog točke p_i in 0 okrog vsake druge točke p_j za $j \neq i$.) Naj bo $\alpha = adx + bdy$ sklenjena 1-forma na X, torej velja $d\alpha = (b_x - a_y)dx \wedge dy = 0$. Oglejmo si linearno *periodno preslikavo*

$$P = (P_1, \ldots, P_m) : \mathscr{Z}^1(X) \to \mathbb{R}^m, \qquad P_i(\alpha) = \int_0^1 \gamma_i^* \alpha \ \ (i = 1, \ldots, m).$$

Trdimo, da P inducira izomorfizem $H^1_{dR}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m$.

Da je P surjektivna najlaže vidimo, če identificiramo X s $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$. Vsaka holomorfna 1-forma $\omega = g(z)dz$ na X je sklenjena. Po izreku o ostankih meromorfna 1-forma $\omega_i = \frac{dz}{z - p_i}$ zadošča $P_i(\alpha_i) = 2\pi\mathrm{i}$ (ker je ostanek ω_i v p_i enak 1) in $P_j(\alpha_i) = 0$ za $j \neq i$. Realne 1-forme $\alpha_i = \frac{1}{2\pi}\Re\omega_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ so torej sklenjene 1-forme na X, ki zadoščajo $P_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$. Torej je periodna preslikava P surjektivna.

Jedro $\ker P$ sestoji iz sklenjenih 1-form $\alpha \in \mathscr{Z}^1(X)$, ki imajo ničelne periode po zankah $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Če je $\alpha = df$ eksaktna 1-forma, je $\int_0^1 \gamma_i^*(df) = \int_0^1 d(f \circ \gamma_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, m$, torej je $\mathscr{E}^1(X) \subset \ker P$. Obratno, če ima 1-forma $\alpha \in \mathscr{Z}^1(X)$ ničelne periode po zankah γ_i, je integral $f(p) = \int_{p_0}^p \alpha$ neodvisen od izbire poti v X od p_0 do $p = (x, y) \in X$ in je zato dobro definirana gladka funkcija na X, ki zadošča $df = \alpha$. Jedro $\ker P$ torej sestoji ravno iz eksaktnih 1-form in trditev (7.6) za $k = 1$ sledi.

Formule 7.6 veljajo tudi v primeru, če nekatere od točk p_j nadomestimo s kompaktnimi množicami, difeomorfnimi zaprtemu disku. Dokaz je enak kot v primeru točk. $\square$

7.3 Mayer–Vietorisovo zaporedje za de Rhamovo kohomologijo

Da bi lahko izračunali de Rhamovo kohomologijo za splošnejše mnogoterosti, si bomo v tem razdelku ogledali pomembno orodje, ki povezuje kohomologijo unije dveh množic s kohomologijo posameznih množic ter njunega preseka.

Označimo z $\mathscr{D}^*(X) = (\mathscr{D}(X), d)$ de Rhamov kompleks mnogoterosti X:

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}^0(X) \xrightarrow{d} \mathscr{D}^1(X) \xrightarrow{d} \mathscr{D}^2(X) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{D}^n(X) \xrightarrow{d} 0,$$

kjer je d diferencial in $n = \dim X$. V terminologiji abstraktne (ko-)homološke teorije je to *koverižni kompleks* ali *kokompleks*, kjer beseda *kompleks* pomeni, da je $d^2 = 0$, beseda *koverižni* pa, da je operator d stopnje $+1$. (V verižnem kompleksu je operator stopnje -1 in puščice so obrnjene.) V vsakem kokompleksu jedro naslednjega homomorfizma vsebuje sliko prejšnjega in kohomologija kokompleksa je po definiciji direktna vsota ustreznih kvocientov; v našem primeru je to ravno de Rhamova kohomologija $H^*_{dR}(X)$.

Naj bo $X = U \cup V$, kjer sta U in V odprti podmnožici v X. *Mayer–Vietorisovo zaporedje* je kratko eksaktno zaporedje de Rhamovih kompleksov

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}^*(X) \xrightarrow{r} \mathscr{D}^*(U) \oplus \mathscr{D}^*(V) \xrightarrow{\delta} \mathscr{D}^*(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

kjer je r restrikcijski operator, δ pa je razlika zožena na $U \cap V$:

$$r(\alpha) = (\alpha|_U, \alpha|_V), \qquad \delta(\alpha, \beta) = \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U\cap V}.$$

Mayer–Vietorisovo zaporedje je dvojni kompleks, katerega del je prikazan na naslednjem diagramu:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d"'] & {} \arrow[d, "d"'] & {} \arrow[d, "d"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^{k-1}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k-1}(U) \oplus \mathscr{D}^{k-1}(V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^{k}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k}(U) \oplus \mathscr{D}^{k}(V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^{k+1}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k+1}(U) \oplus \mathscr{D}^{k+1}(V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}^{k+1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Sestavni del definicije homomorfizma kompleksov je, da vsi kvadrati v diagramu komutirajo, kar je v danem primeru trivialno preveriti.

Lema 7.10 *Mayer–Vietorisovo zaporedje je eksaktno v smislu, da je vsaka vrstica zgornjega diagrama kratko eksaktno zaporedje. Ekvivalentno, r je injektivna, δ je surjektivna in* $\operatorname{im} r = \ker \delta$.

Dokaz Očitno je preslikava r injektivna in velja $\delta \circ r = 0$. Dokažimo sedaj, da je $\operatorname{im} r = \ker \delta$. Če je $\delta(\alpha, \beta) = 0$, dobimo dobro definirano formo ω na X s predpisom $\omega|_U = \alpha$ in $\omega|_V = \beta$ in očitno je $r(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) = (\alpha, \beta)$. Preostane nam dokazati, da je δ surjektivna. Naj bo $\omega \in \mathscr{D}^*(U \cap V)$. Izberimo gladko particijo enote (ρ_U, ρ_V) na X, podrejeno pokritju $\{U, V\}$; torej je $\operatorname{supp} \rho_U \subset U$, $\operatorname{supp} \rho_V \subset V$ in $\rho_U + \rho_V = 1$. Definirajmo $\alpha = \rho_U \omega$ in $\beta = -\rho_V \omega$. Tedaj se α razširi iz $U \cap V$ do gladke forme na U, β se razširi iz $U \cap V$ do gladke forme na V in $\alpha - \beta = \rho_U \omega + \rho_V \omega = (\rho_U + \rho_V)\omega = \omega$. $\square$

Splošni izrek v abstraktni kohomološki teoriji pove, da je vsakemu kratkemu eksaktnemu zaporedju koverižnih kompleksov naravno prirejeno dolgo eksaktno zaporedje kohomoških grup teh kompleksov. V danem primeru imamo dolgo eksaktno Mayer–Vietorisovo zaporedje

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow H^0_{dR}(X) \xrightarrow{r} H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \xrightarrow{\delta} H^0_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H^1_{dR}(X) \longrightarrow \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\delta} H^{k-1}_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\phi} \\
&\xrightarrow{\phi} H^k_{dR}(X) \xrightarrow{r} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \xrightarrow{\delta} H^k_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H^{k+1}_{dR}(X) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}
$$

Preslikava $\phi = \phi_{k-1} : H^{k-1}_{dR}(U \cap V) \to H^k_{dR}(X)$ se imenuje *vezni homomorfizem* in je dobljena na naslednji način. Naj bo $[\omega] \in H^{k-1}_{dR}(U \cap V)$. Zapišemo jo kot $\omega = \delta(\alpha, \beta) = \beta|_{U\cap V} - \alpha|_{U \cap V}$. Ker je $0 = d\omega = d\beta|_{U\cap V} - d\alpha|_{U\cap V}$, leži par $(d\alpha, d\beta) \in \mathscr{D}^k(U) \oplus \mathscr{D}^k(V)$ v jedru homomorfizma δ in zato v sliki homomorfizma $r : \mathscr{D}^k(X) \to \mathscr{D}^k(U) \oplus \mathscr{D}^k(V)$. Ker so vrstice diagrama eksakne, obstaja k-forma $\alpha' \in \mathscr{D}^k(X)$, da je $\alpha'|_U = d\alpha$ in $\alpha'|_V = d\beta$. Očitno je $d\alpha' = 0$ in zato α' definira kohomološki razred $[\alpha'] = \phi([\omega]) \in H^k_{dR}(X)$. Potrebno je preveriti, da je razred $[\alpha'] = \phi([\omega])$ odvisen le od kohomološkega razreda $[\omega]$ in da je zgornje zaporedje eksaktno. Dokaz lahko najdemo v katerikoli knjigi iz homološke algebre.

Primer 7.11 Predstavimo krožnico S^1 kot unijo $U \cup V$ dveh intervalov, katerih presek $U \cap V = I_1 \cup I_2$ je unija dveh intervalov. Mayer–Vietorisovo zaporedje je

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \overset{=\mathbb{R}}{H^0_{dR}(S^1)} \xrightarrow{r} \overset{=\mathbb{R}^2}{H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V)} \xrightarrow{\delta} \overset{=\mathbb{R}^2}{H^0_{dR}(U \cap V)} \xrightarrow{\phi} \\
&\xrightarrow{\phi} H^1_{dR}(S^1) \xrightarrow{r} \overset{=0}{H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V)} \xrightarrow{\delta} \overset{=0}{H^1_{dR}(U \cap V)}\,.
\end{aligned}
$$

Ker je homomorfizem r v prvi vrstici injektiven in je $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ neničeln homomorfizem, ima δ enorazsežno sliko. Vezni homomorfizem ϕ zato preslika $\mathbb{R}^2/\operatorname{im}(\delta) = \mathbb{R}$ izomorfno na $H^1_{dR}(S^1)$; torej je $H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$. $\square$

Primer 7.12 S poplošitvijo argumenta v prejšnjem primeru sedaj dokažimo, da ima n-sfera S^n de Rhamovo kohomologijo

$$H^k_{dR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0 \text{ ali } k = n, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo $S^n = U \cup V$, kjer sta U in V hemisferi, ki se sekata v ekvatorialnem pasu $U \cap V$ okrog krožnice S^{n-1}. Ker je $U \cap V$ homotopsko ekvivalenten sferi S^{n-1}, je po posledici 7.7 kohomologija $U \cap V$ enaka kohomologiji sfere S^{n-1} in po induktivni predpostavki je slednja podana z zgornjo formulo. V Mayer–Vietorisovem zaporedju je $H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) = 0$ za vsak $k \geq 1$, zato iz eksaktnosti zaporedja sledi $H^k_{dR}(S^{n-1}) \cong H^{k+1}_{dR}(S^n)$ za $k \geq 1$. Odtod dobimo $H^n_{dR}(S^n) \cong H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$, ostale kohomološke grupe indeksa $k \geq 1$ pa so enake nič. Generator grupe $H^n_{dR}(S^n) \cong \mathbb{R}$ je katerakoli n-forma α na S^n z $\int_{S^n} \alpha \neq 0$. $\square$

7.4 De Rhamova kohomologija s kompaktnimi nosilci

V tem razdelku bomo dokazali nekaj rezultatov o de Rhamovi kohomologiji s kompaktnimi nosilci.

Naj bo $\mathscr{D}^*_c(X) = (\mathscr{D}^*_c(X), d)$ de Rhamov kompleks s kompaktnimi nosilci:

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}^0_c(X) \xrightarrow{d} \mathscr{D}^1_c(X) \xrightarrow{d} \mathscr{D}^2_c(X) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{D}^n_c(X) \xrightarrow{d} 0,$$

kjer je d diferencial in je $n = \dim X$ dimenzija mnogoterosti X. Prirejeno de Rhamovo komologijo s kompaktnimi nosilci smo že definirali v (7.4):

$$\begin{aligned} H^k_{dR,c}(X) &= \frac{\{\alpha \in \mathscr{D}^k_c(X) : d\alpha = 0\}}{\{d\beta : \beta \in \mathscr{D}^{k-1}_c(X)\}} = \frac{\mathscr{Z}^k_c(X)}{\mathscr{E}^k_c(X)}, \\ H^*_{dR,c}(X) &= \bigoplus_{k=0}^{\dim X} H^k_{dR,c}(X), \end{aligned}$$

kjer sta $\mathscr{Z}^k_c(X)$ in $\mathscr{E}^k_c(X)$ vektorska prostora sklenjenih in eksaktnih k-form s kompaktnimi nosilci na X.

Če je $f : X \to Y$ gladka preslikava in mnogoterost X ni kompaktna, potem povlek $f^*\alpha$ forme s kompaktnim nosilcem nima nujno kompaktnega nosilca. Slednje velja, če je f *prava preslikava*. Vsaka prava gladka preslikava $f : X \to Y$ torej inducira homomorfizem $f^* : H^k_{dR,c}(Y) \to H^k_{dR,c}(X)$ za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$. Tako kot pri običajni de Rhamovi kohomologiji je $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, če sta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ pravi gladki preslikavi. V posebnem sledi, da difeomorfizem $f : X \to Y$ inducira izomorfizem $f^* : H^k_{dR,c}(Y) \to H^k_{dR,c}(X)$ za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$.

Naslednji rezultat je Poincaréjeva lemo za kohomologijo s kompaktnimi nosilci.

Izrek 7.13 *Za vsako gladko mnogoterost X in $k \in \mathbb{Z}_+$ je $H^{k+1}_{dR,c}(X \times \mathbb{R}) \cong H^k_{dR,c}(X)$.*

Dokaz Naj bo $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ projekcija $\pi(x,t) = x$. Definirali bomo linearno preslikavo $\pi_* : \mathscr{D}^{k+1}_c(X \times \mathbb{R}) \to \mathscr{D}^k_c(X)$ kot integracijo na vlaknih. Vsaka forma s kompaktnim nosilcem na $X \times \mathbb{R}$ je vsota form naslednjih dveh tipov:

$$\text{(a)}\ \ (\pi^*\alpha)f(x,t), \qquad \text{(b)}\ \ (\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt,$$

kjer je $\alpha \in \mathscr{D}(X)$ (ne nujno s kompaktnim nosilcem) in $f \in \mathscr{C}^\infty_c(X \times \mathbb{R}) = \mathscr{D}^0_c(X)$. Na formah tipa (a) ima π_* vrednost 0, na formi tipa (b) pa definiramo

$$\pi_*\big((\pi^*\alpha) \wedge f(x,t)dt\big) = \alpha \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt.$$

Ni težko preveriti, da velja

$$d_X \circ \pi_* = \pi_* \circ d_{X \times \mathbb{R}}.$$

Odtod sledi, da π_* inducira homomorfizem $\pi_* : H^{k+1}_{dR,c}(X \times \mathbb{R}) \to H^k_{dR,c}(X)$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ (glej dokaz izreka 7.3).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^0_c(X \times \mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\pi_*"'] & \mathscr{D}^1_c(X \times \mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\pi_*"'] & \mathscr{D}^2_c(X \times \mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "\pi_*"'] & \cdots \arrow[dl, "\pi_*"'] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}^0_c(X) \arrow[r, "d"] & \mathscr{D}^1_c(X) \arrow[r, "d"] & \mathscr{D}^2_c(X) \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definirajmo še inverzno preslikavo. Naj bo $e(t)$ gladka funkcija na $\mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem, ki zadošča $\int_{\mathbb{R}} e(t)dt = 1$. Priredimo ji homomorfizem

$$e_* : \mathscr{D}^*_c(X) \to \mathscr{D}^{*+1}_c(X \times \mathbb{R}), \qquad e_*(\alpha) = (\pi^*\alpha) \wedge e(t)dt.$$

Za vsako formo $\alpha \in \mathscr{D}^*(X)$ je

$$e_*(d\alpha) = (\pi^* d\alpha) \wedge e(t)dt = d(\pi^*\alpha) \wedge e(t)dt) = d(e_*\alpha),$$

torej velja $e_* \circ d_X = d_{X \times \mathbb{R}} \circ e_*$. Iz definicije e_* sledi

$$\pi_* \circ e_*(\alpha) = \pi_*\big(\pi^*\alpha \wedge e(t)dt\big) = \alpha \int_{\mathbb{R}} e(t)dt = \alpha,$$

torej je $\pi_* \circ e_* = \mathrm{Id}$. Sedaj je potrebno dokazati še, da je $e_* \circ \pi^* = \mathrm{Id}$ na $H^*_{dR,c}(X \times \mathbb{R})$. To sledi iz naslednje leme, ki podaja ustrezen homotopski operator.

Lema 7.14 *Obstaja linearen operator $K : \mathscr{D}^{*+1}_c(X \times \mathbb{R}) \to \mathscr{D}^*_c(X \times \mathbb{R})$, tako da za vsak $k \in \mathbb{Z}_+$ velja*

$$\mathrm{Id} - e_* \circ \pi_* = (-1)^{k-1}\,(d \circ K - K \circ d) \ \ na\ \mathscr{D}_c^k(X \times \mathbb{R}). \tag{7.7}$$

Dokaz Preslikavo K definiramo tako, da je enaka nič na formah $(\pi^*\alpha)f(x,t)$ tipa (a), na formah tipa (b) pa je enaka

$$K\,(\pi^*\alpha \wedge f(x,t)dt) = \alpha \int_{-\infty}^{t} f(x,\tau)d\tau - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\tau)d\tau \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau.$$

Podobno kot v dokazu leme 7.4 preverimo, da velja (7.7).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_c^0(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "K"'] & \mathscr{D}_c^1(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "K"'] & \mathscr{D}_c^2(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "K"'] & \cdots \arrow[dl, "K"'] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_c^0(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] & \mathscr{D}_c^1(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] & \mathscr{D}_c^2(X\times\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Odtod sledi izrek 7.13 v naslednji preciznejši obliki.

Izrek 7.15 *Preslikavi*

$$\pi_* : H_{dR,c}^{*+1}(X \times \mathbb{R}) \to H_{dR,c}^{*}(X), \qquad e_* : H_{dR,c}^{*}(X) \to H_{dR,c}^{*+1}(X \times \mathbb{R})$$

sta inverzna izomorfizma.

Primer 7.16 Z indukcijo na n sledi iz izreka 7.13, da je

$$H_{dR,c}^{k}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = n; \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Generator grupe $H_{dR,c}^{k}(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ je katerakoli n-forma ω s kompaktnim nosilcem, za katero je $\int_{\mathbb{R}^n} \omega \neq 0$. $\square$

Mayer–Vietorisovo zaporedje za kohomologijo s kompaktnimi nosilci Naj bo $X = U \cup V$, kjer sta U in V odprti podmnožici v X. Oglejmo si *Mayer–Vietorisovo* kratko eksaktno zaporedje de Rhamovih kompleksov s kompaktnimi nosilci:

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_c^*(U \cap V) \xrightarrow{\delta} \mathscr{D}_c^*(U) \oplus \mathscr{D}_c^*(V) \xrightarrow{\sigma} \mathscr{D}_c^*(X) \longrightarrow 0,$$

kjer je

$$\delta(\alpha) = (-\alpha, \alpha), \qquad \sigma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta.$$

Zaporedje je dvojni kompleks, katerega del je prikazan na naslednjem diagramu:

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d"'] & {} \arrow[d, "d"'] & {} \arrow[d, "d"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_c^{k-1}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k-1}(U)\oplus\mathscr{D}_c^{k-1}(V) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_c^{k-1}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k}(U)\oplus\mathscr{D}_c^{k}(V) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k}(X) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{D}_c^{k+1}(U\cap V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k+1}(U)\oplus\mathscr{D}_c^{k+1}(V) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "d"'] & \mathscr{D}_c^{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Prirejeno dolgo eksaktno Mayer–Vietorisovo zaporedje na kohomologiji s kompaktnimi nosilci je

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^0_{dR,c}(U\cap V) &\xrightarrow{\delta} H^0_{dR,c}(U)\oplus H^0_{dR,c}(V) \xrightarrow{\sigma} H^0_{dR,c}(X) \xrightarrow{\phi} \\
\xrightarrow{\phi} H^1_{dR,c}(U\cap V) &\xrightarrow{\delta} H^1_{dR,c}(U)\oplus H^0_{dR,c}(V) \xrightarrow{\sigma} H^1_{dR,c}(X) \xrightarrow{\phi} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\sigma} H^{k-1}_{dR,c}(X) \xrightarrow{\phi} \\
\xrightarrow{\phi} H^k_{dR,c}(U\cap V) &\xrightarrow{\delta} H^k_{dR,c}(U)\oplus H^k_{dR,c}(V) \xrightarrow{\sigma} H^k_{dR,c}(X) \xrightarrow{\phi} \cdots
\end{aligned}
$$

Primer 7.17 Če je $X\subset\mathbb{R}^n$ odprta množica, ki je difeomorfna $\mathbb{R}^n$, sledi iz primera 7.16 in dejstva, da difeomorfizem inducira izomorfizem na de Rhamovi kohomologiji, da je

$$
H^k_{dR,c}(X)=\begin{cases}\mathbb{R}, & k=n;\\ 0, & k\neq n.\end{cases}
$$

Punktirano ravnino $X=\mathbb{R}^2\setminus\{p\}$ lahko predstavimo kot unijo $X=U\cap V$ dveh odprtih podmnožic, ki sta difeomorfni $\mathbb{R}^2$, tako da je $U\cap V=W_1\cap W_2$ ravno tako unija dveh odprtih podmnožic, difeomorfnih $\mathbb{R}^2$. (Množice U,V,W_1,W_2 lahko izberemo kot stožce z vrhom v p.) Iz Mayer–Vietorisovega zaporedja dobimo

$$
0\longrightarrow H^1_{dR,c}(X)\xrightarrow{\phi}\overset{=\mathbb{R}^2}{H^2_{dR,c}(U\cap V)}\xrightarrow{\delta}\overset{=\mathbb{R}^2}{H^2_{dR,c}(U)\oplus H^2_{dR,c}(V)}\xrightarrow{\sigma}H^2_{dR,c}(X)\xrightarrow{\phi}0.
$$

Ker je slika morfizma δ očitno enorazsežna, sledi

$$
H^1_{dR,c}(X)=\mathbb{R},\qquad H^2_{dR,c}(X)=\mathbb{R}.
$$

Prav tako vidimo, da je $H^k_{dR,c}(X)=0$ za $k\notin\{1,2\}$. To sledi tudi iz dejstva, da je $X=\mathbb{R}^2\setminus\{p\}$ difeomorfna produktu $S^1\times\mathbb{R}$ in je po izreku 7.13

$$H^k_{dR,c}(X) \cong H^{k-1}_{dR,c}(S^1) = H^{k-1}_{dR}(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 1,2; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Splošneje je $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ difeomorfna $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ in je zato

$$H^k_{dR,c}(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) = H^{k-1}_{dR}(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 1,n; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za zaključek razdelka bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 7.18 *Za poljubno gladko kompaktno mnogoterost X (z ali brez roba) je vsaka de Rhamova kohomološka grupa $H^k_{dR}(X)$ končno razsežen vektorski prostor nad X.*

V dokazu bomo uporabili naslednji pojem.

Definicija 7.19 *Odprto pokritje $\mathscr{U} = \{U_i\}_i$ je* dobro pokritje *mnogoterosti X, če je vsak končen neprazen presek $U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ difeomorfen $\mathbb{R}^n$, $n = \dim X$. Mnogoterost je* končnega tipa*, če ima končno dobro pokritje.*

V tej smeri velja naslednji izrek.

Izrek 7.20 *Vsaka gladka mnogoterost ima dobro pokritje. Vsaka kompaktna gladka mnogoterost ima končno dobro pokritje.*

Tega izreka ne bomo dokazali, omenimo pa, da lahko dobro pokritje sestavimo npr. iz geodetsko konveksnih okolic točk v poljubni Riemannovi metriki na X. To je standardna konstrukcija v diferencialni geometriji; glej npr. do Carmo [9].

S pomočjo pojma dobrega pokritja imamo tudi naslednji analog izreka (7.18) za de Rhamovo kohomologijo s kompaktnimi nosilci.

Izrek 7.21 *Če je X gladka mnogoterost končnega tipa, potem je vsaka de Rhamova kohomološka grupa $H^k_{dR,c}(X)$ končno razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.*

Dokaz izrekov 7.18 in 7.21 Denimo, da je $X = U \cup V$, kjer sta U in V odprti množici z lastnostjo, da so de Rhamove kohomološke grupe množic U, V in $U \cap V$ končno razsežni vektorski prostori. Iz Mayer–Vietorisovega zaporedja za de Rhamovo kohomologijo sledi ista lastnost za X.

Dokaz obeh izrekov sledi z indukcijo na število m množic v končnem dobrem pokritju mnogoterosti X. Izreka veljata za $m = 1$, saj je tedaj X difeomorfna $\mathbb{R}^n$. Denimo, da veljata za nek $m \in \mathbb{N}$. Naj bo $X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_{m+1}$ dobro pokrije X. Po induktivni predpostavki izreka veljata za $Y = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$. Ker je $Y \cap U_{m+1} = \bigcup_{j=1}^m (U_j \cap U_{m+1})$ dobro pokritje dolžine m za $Y \cap U_{m+1}$, sledi iz Mayer–Vietorisovega zaporedja, da izreka veljata tudi za $X = Y \cup U_{m+1}$. $\square$

7.5 Poincaréjeva dualnost

V tem razdelku bomo dokazali naslednji *Poincaréjev dualnostni izrek*.

Izrek 7.22 *Če je X gladka orientabilna mnogoterost končnega tipa (glej definicijo 7.19) brez roba, velja*

$$H^k_{dR}(X) \;\cong\; H^{n-k}_{dR,c}(X)^*, \quad k = 0,1,\dots,n = \dim X.$$

Če je X kompaktna orientabilna gladka mnogoterost brez roba, je

$$H^k_{dR}(X) \;\cong\; H^{n-k}_{dR}(X)^*, \quad k = 0,1,\dots,n = \dim X.$$

Izomorfizem v zgornjem izreku je induciran z neizrojenim bilinearnim parjenjem

$$\mathscr{P} : H^k_{dR}(X) \otimes H^{n-k}_{dR,c}(X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki ga inducira bilinearen funkcional

$$\mathscr{P}(\alpha,\beta) \;=\; \int_X \alpha \wedge \beta, \qquad \alpha \in \mathscr{Z}^k(X),\; \beta \in \mathscr{Z}^{n-k}_c(X). \tag{7.8}$$

Če je ena od form α,β eksaktna, je tudi $\alpha \wedge \beta$ eksaktna in je integral enak nič po Stokesovem izreku 6.16, zato je parjenje dobro definirano na kohomologiji. Da je neizrojeno bomo dokazali s pomočjo Mayer–Vietorisovega zaporedja za obe kohomologiji ter indukcije na število množic v dobrem pokritju mnogoterosti X.

Iz izreka 7.22 sledi $H^k_{dR}(X) \;\cong\; H^{n-k}_{dR,c}(X)$ za vsak k, vendar izomofizem vektorskega prostora na njegov dual ni naraven in za njegovo določitev je v konkretnem primeru potreben izbor Riemannove metrike na X.

Posledica 7.23 *Naj bo X kot v izreku 7.22.*

1. *Če je X kompaktna, je $H^n_{dR}(X) \cong H^0_{dR}(X) \cong \mathbb{R}$.*
2. *Če je X nekompaktna in končnega tipa, je $H^n_{dR}(X) \cong H^0_{dR,c}(X) = 0$.*

V dokazu izreka 7.22 bomo uporabili t.i. 5-lemo. Dokaz je elementaren in ga lahko najdemo v vsaki knjigi iz homološke algebre (glej npr. S. Lang, Algebra).

Lema 7.24 *Dan je komutativen diagram homomorfizmov abelovih grup*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

z eksaktnima vrsticama. Če so vsi vertikalni homomorfizmi razen ϕ izomorfizmi, je tudi ϕ izomorfizem.

Dokaz izreka 7.22 Če je $X = \mathbb{R}^n$, sta edini neničelni kohomološki grupi $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R} = H^n_{dR,c}(\mathbb{R}^n)$. V tem primeru je funkcional (7.8) neizrojen, saj je pozitiven na formi $a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, kjer je $a \geq 0$ funkcija s kompaktnim nosilcem, ki je v neki točki pozitivna. Isti zaključek velja v primeru, ko je X difeomorfna $\mathbb{R}^n$.

Denimo, da je $X = U \cup V$ in izrek velja za odprte množice U, V in $U \cap V$. Dokazali bomo, da tedaj velja tudi za X. Za poljubno mnogoterost izrek sledi z indukcijo na število množic v dobrem pokritju X, podobno kot v dokazu izrekov 7.18 in 7.21 .

Oglejmo si naslednji diagram z eksaktnima vrsticama, ki sta Mayer–Vietorisovo zaporedje za de Rhamovo kohomologijo (v zgornji vrstici) in de Rhamovo kohomologijo s kompaktnimi nosilci (v spodnji vrstici), na istoležnih elementih pa je uporabljeno bilinearno parjenje kot je označeno. Zaradi preprostosti oznak bomo izpustili index dR na kohomologiji in pisali $U \cap V = W$ ter $q = n - p$, torej $p + q = n$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H^{p-1}(U) \otimes H^{p-1}(V) & \to & H^{p-1}(W) & \to & H^p(X) & \to & H^p(U) \otimes H^p(V) & \to & H^p(W) \\
\otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes \\
H_c^{q+1}(U) \otimes H_c^{q+1}(V) & \leftarrow & H_c^{q+1}(W) & \leftarrow & H_c^q(X) & \leftarrow & H_c^q(U) \otimes H_c^q(V) & \leftarrow & H_c^q(W) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \int_U + \int_V} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \int_W} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \int_X} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \int_U + \int_V} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \int_W} \\
\mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Preprosto je preveriti, da diagram komutira na vseh mestih do znaka natančno. Vsaka vertikalna preslikava je bilinearno parjenje, ki inducira homomorfizem elementa v prvi vrstici v istoležni element v drugi vrstici naslednjega diagrama. (Puščice v drugi vrstici so obrnjene zaradi prehoda na dualne preslikave.)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
H^{p-1}(U) \otimes H^{p-1}(V) & \to & H^{p-1}(W) & \to & H^p(X) & \to & H^p(U) \otimes H^p(V) & \to & H^p(W) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_c^{q+1}(U)^* \otimes H_c^{q+1}(V)^* & \to & H_c^{q+1}(W)^* & \to & H_c^q(X)^* & \to & H_c^q(U)^* \otimes H_c^q(V)^* & \to & H_c^q(W)^*
\end{array}
$$

Po predpostavki so vsi vertikalni homomorfizmi, razen morda srednji, izomorfizmi. Iz leme 7.24 sledi, da je tudi srednji homomorfizem izomorfizem. S tem je induktivni korak dokazan in izrek sledi. $\square$

Poincaréjev dual podmnogoterosti. Naj bo X orientirana gladka mnogoterost dimenzije n, za katero velja dualnostni izrek 7.22. Vsaka zaprta orientirana podmnogoterost $M \subset X$ dimenzije m brez roba določa linearen funkcional

$$[M] : \mathscr{Z}_c^m(X) \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \langle [M], \alpha \rangle = \int_M \alpha \tag{7.9}$$

na prostoru sklenjenih m-form s kompaktnim nosilcem na X. Imenuje se *funkcional integracije po M*. Ker po Stokesovem izreku velja

$$\langle [M], d\alpha \rangle = \int_M d\alpha = 0 \quad \text{za } \alpha \in \mathscr{D}_c^{m-1}(X),$$

$[M]$ inducira linearen funkcional

$$[M] : H^m_{dR,c}(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \langle [M], [\alpha] \rangle = \int_M \alpha.$$

Po izreku 7.22 je dual $H^m_{dR,c}(X)^*$ izomorfen de Rhamovi grupi $H^{n-m}_{dR}(X)$. Zato obstaja natanko en kohomološki razred $[\eta_M] \in H^{n-m}_{dR}(X)$, da je

$$\int_M \alpha = \int_X \alpha \wedge \eta_M \quad \text{za vsako formo } \alpha \in \mathscr{Z}^m_c(X).$$

Ta kohomološki razred $[\eta_M]$, ki je predstavljen s sklenjeno $(n-m)$-formo $\eta_M \in \mathscr{Z}^{n-m}_{dR}(X)$, se imenuje (zaprt) *Poincaréjev dual* podmnogoterosti $M \subset X$.

Če je podmnogoterost $M \subset X$ kompaktna in brez roba (sklenjena), integracija po M definira linearen funkcional

$$[M] : \mathscr{Z}^m(X) \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \mapsto \langle [M], \alpha \rangle = \int_M \alpha \tag{7.10}$$

na prostoru sklenjenih m-form s poljubnim nosilcem na X. Izrek 7.22 zagotovi obstoj sklenjene forme $\eta'_M \in \mathscr{D}^{n-m}_c(X)$ s kompaktnim nosilcem, tako da velja

$$\int_M \alpha = \int_X \alpha \wedge \eta'_M \quad \text{za vsako formo } \alpha \in \mathscr{Z}^m(X).$$

Kohomološki razred $[\eta'_M] \in H^{n-m}_{dR,c}(X)$ je po izreku 7.22 enolično določen in se imenuje *kompakten Poincaréjev dual* orientirane sklenjene podmnogoterosti M.

Vsaka sklenjena orientirana m-razsežna podmnogoterost $M \subset X$ torej določa dva Poincaréjeva duala, zaprt Poincaréjev dual $[\eta_M] \in H^{n-m}_{dR}(X)$ in kompakten Poincaréjev dual $[\eta'_M] \in H^{n-m}_{dR,c}(X)$. Ta dva duala sta v splošnem različna, kot vidimo na naslednjem primeru; glej tudi primer 7.27.

Primer 7.25 (Poincaréjev dual točke v $\mathbb{R}^n$) Naj bo p točka v $\mathbb{R}^n$. Ker je $H^n_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$, je zaprt Poincaréjev dual $[\eta_p] = 0$ enak nič. Po drugi strani je $H^n_{dR,c}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ (glej primer 7.16) in je kompakten Poincaréjev dual predstavljen s poljubno formo $g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ s kompaktnim nosilcem in $\int_{\mathbb{R}^n} g = 1$.

Primer 7.26 (Poincaréjev dual poltraka v $\mathbb{R}^2_*$) Naj bo $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2_*$ s koordinatama (x,y) in $M = \{(x,0) : x > 0\}$ poltrak; to je zaprta nekompaktna podmnogoterost X. Trdimo, da je kohomološki razred sklenjene 1-forme

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{d\theta}{2\pi}, \qquad \theta = \arctan(y/x) \tag{7.11}$$

Poincaréjev dual M. Dejansko, če je $\alpha \in \mathscr{D}^1_c(X)$ sklenjena 1-forma s kompaktnim nosilcem, je po Fubinijevem izreku

$$\int_{\mathbb{R}^2_*} \alpha \wedge \eta = \int_{\mathbb{R}^2_*} \alpha \wedge \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_{\Gamma_\theta} \alpha,$$

kjer je $\Gamma_\theta = \{re^{\mathrm{i}\theta} : r > 0\}$. Ker je $d\alpha = 0$ in ima α kompakten nosilec, sledi iz Stokesovega izreka, da je $\int_{\Gamma_\theta} \alpha$ neodvisen od θ in zato enak $\int_{\Gamma_0} \alpha = \int_M \alpha$. Sledi

$$\int_{\mathbb{R}^2_*} \alpha \wedge \eta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \int_M \alpha = \int_M \alpha.$$

To ravno pomeni, da je razred $[\eta] \in H^1_{dR}(\mathbb{R}^2_*)$ Poincaréjev dual poltraka M.

Primer 7.27 (Poincaréjev dual krožnice v $\mathbb{R}^2_*$) Naj bo

$$S_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\right\}, \quad r > 0.$$

Za vsako sklenjeno 1-formo α na $\mathbb{R}^2_*$ je po Stokesovem izreku integral $\int_{S_r} \alpha$ neodvisen od $r > 0$. Če ima α kompakten nosilec, je integral enak 0, kar vidimo za dovolj velik $r > 0$. Torej je zaprt Poincaréjev dual krožnice S_r enak nič.

Po drugi strani pa integral $\int_{S_r} \alpha$ v splošnem ni enak nič, če nosilec sklenjene 1-forme α ni kompakten. Na primer, za formo (7.11) je $\int_{S_r} \eta = 2\pi$. To pomeni, da kompakten Poincaréjev dual $[\eta'_{S_r}] \in H^1_{dR,c}(\mathbb{R}^2_*)$ krožnice $S_r \subset \mathbb{R}^2_*$ ni enak 0. Z integracijo v polarnih koordinatah vidimo, da je kompakten Poincaréjev dual predstavljen s poljubno 1-formo oblike $h(\rho)d\rho$, kjer je $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ in je h funkcija s kompaktnim nosilcem na $(0,+\infty)$, ki zadošča $\int_0^\infty h(\rho)d\rho = 1$. $\square$

Opomba 7.28 (Potoki) Linearni funkcionali na prostorih gladkih diferencialnih form na mnogoterostih se imenujejo *potoki* (angl. *currents*). Potok integracije po zaprti orientirani podmnogoterosti (7.9) je eden osnovnih primerov potokov. Splošnejši *rektifikabilni potoki* so določeni z integracijo forme po orientabilni m-rektifikabilni podmnožici $M \subset X$, kar v bistvu pomeni, da je M lokalno slika domene v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^m$ z Lipshitzovo preslikavo. Taka preslikava je diferenciabilna na komplementu množice z mero nič, zato lahko vpeljemo pojem m-razsežnega volumna in definiramo integral m-forme po taki množici. (To področje analize se imenuje *geometrijska teorija mere*; glej npr. Federer [13] ali Morgan [34]). Splošnejši potoki so lahko odvisni tudi od odvodov koeficientov diferencialne forme in so torej diferencialni operatorji na formah. V smislu Poincaréjeve dualnosti lahko razumemo vsak potok T na prostoru $\mathscr{D}^m_c(X)$ testnih form (opremljenim z ustrezno topologijo) kot diferencialno $(n-m)$-formo β_T na X z distribucijskimi koeficienti, ki zadošča pogoju

$$T(\alpha) = \int_X \alpha \wedge \beta_T, \qquad \alpha \in \mathscr{D}^m_c(X).$$

Bibliografija

1. R. Abraham. Transversality in manifolds of mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:470–474, 1963.
2. R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
3. L. V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
4. L. V. Ahlfors and L. Sario. *Riemann surfaces*. Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
5. R. Baire. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Mat. (3)*, 3:1–123, 1899.
6. H. Behnke and K. Stein. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.*, 120:430–461, 1949.
7. W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.
8. G. de Rham. *Differentiable manifolds. Forms, currents, harmonic forms*, volume 266 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Translated from the French by F. R. Smith, With an introduction by S. S. Chern.
9. M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
10. S. Donaldson. *Riemann surfaces*, volume 22 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2011.
11. Y. Eliashberg and M. Gromov. Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension $3n/2+1$. *Ann. of Math. (2)*, 136(1):123–135, 1992.
12. H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
13. H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
14. O. Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan. Reprint of the 1981 English translation.
15. F. Forstnerič. Oka manifolds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(17-18):1017–1020, 2009.
16. F. Forstnerič. Oka manifolds: from Oka to Stein and back. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(4):747–809, 2013. With an appendix by Finnur Lárusson.

17. F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings (The homotopy principle in complex analysis)*, volume 56 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*. Springer, Cham, second edition, 2017.
18. F. Forstnerič and F. Lárusson. Survey of Oka theory. *New York J. Math.*, 17A:11–38, 2011.
19. W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
20. M. Goresky and R. MacPherson. *Stratified Morse theory*, volume 14 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
21. H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68:460–472, 1958.
22. M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
23. V. Guillemin and A. Pollack. *Differential topology*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Reprint of the 1974 original.
24. R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
25. P. Hartman. *Ordinary differential equations*, volume 38 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Corrected reprint of the second (1982) edition [Birkhäuser, Boston, MA; MR0658490 (83e:34002)], With a foreword by Peter Bates.
26. A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
27. L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990.
28. J. L. Kelley. *General topology*, volume 27 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.].
29. S. Kobayashi. *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, volume 2 of *Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.
30. J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.
31. J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
32. J. Milnor. *Morse theory*, volume 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.
33. J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
34. F. Morgan. *Geometric measure theory. A beginner's guide*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fourth edition, 2009.
35. A. P. Morse. The behavior of a function on its critical set. *Ann. of Math. (2)*, 40(1):62–70, 1939.
36. M. Morse. *The calculus of variations in the large*, volume 18 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Reprint of the 1932 original.
37. R. Narasimhan. *Analysis on real and complex manifolds*, volume 35 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Reprint of the 1973 edition.
38. L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2001.
39. A. Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48:883–890, 1942.
40. R. Thom. Les singularités des applications différentiables. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:43–87, 1955–1956.
41. R. Thom. Un lemme sur les applications différentiables. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 1:59–71, 1956.

42. F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.
43. H. Whitney. A function not constant on a connected set of critical points. *Duke Math. J.*, 1(4):514–517, 1935.
44. H. Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 37(3):645–680, 1936.
45. H. Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Math. (2)*, 45:220–246, 1944.
46. H. Whitney. *Complex analytic varieties*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1972.

Indeks