

Trditev. Za kovariantni funktor $h_n: \underline{\text{Top}}^2 \rightarrow \underline{\text{R-Mod}}$ sta ekvivalentna aksioma:

- (1) Če je $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotopska ekvivalenca parov, je $h_n(f)$ izomorfizem.
- (2) Če je $H: (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$ homotopija parov, je $h_n(H_0) = h_n(H_1)$.

Dokaz. (1) $\implies$ (2) Naj bo (X, A) poljuben par in naj bo $\iota_t: (X, A) \rightarrow (X, A) \times [0, 1] = (X \times [0, 1], A \times [0, 1])$ preslikava parov, definirana s predpisom $\iota_t(x) = (x, t)$.

Dalje naj bo $p: (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (X, A)$ preslikava parov, definirana s predpisom $p(x, t) = x$ (torej projekcija). Za vsako število $t \in [0, 1]$ je $p \circ \iota_t = \text{id}_X$ in iz funktorialnosti sledi $h_n(p) \circ h_n(\iota_t) = \text{id}$. Preslikava p je homotopska ekvivalenca parov, zato je po privzetku (1) inducirani morfizem $h_n(p)$ izomorfizem. Sledi, da so vsi morfizmi $h_n(\iota_t)$ enaki (namreč enaki $h_n(p)^{-1}$). Če je zdaj $H: (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$ poljubna homotopija parov, velja $H_t = H \circ \iota_t$ in zaradi funktorialnosti $h_n(H_t) = h_n(H) \circ h_n(\iota_t)^{-1}$, neodvisno od t . Posebej je $h_n(H_0) = h_n(H_1)$.

(2) $\implies$ (1) Naj bo $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotopska ekvivalenca parov z inverzom $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$. Tedaj obstaja homotopija parov $H: (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (X, A)$ od $g \circ f$ do id_X . Zaradi funktorialnosti je $h_n(H_0) = h_n(g) \circ h_n(f)$ in $h_n(H_1) = \text{id}$. Po privzetku (2) sledi $h_n(g) \circ h_n(f) = \text{id}$. Simetrično je $h_n(f) \circ h_n(g) = \text{id}$, torej sta $h_n(f)$ in $h_n(g)$ med seboj inverzna izomorfizma. $\square$

Sledi, da so homološki funktorji h_n *homotopski* in faktorizirajo skozi homotopsko kategorijo parov, kar je v skladu z motivacijo iz uvodnega predavanja.