

1. DOMAČA NALOGA

Oddaja rešitev nalog v dogovoru s tutorji v tednu od ponedeljka 8. 11. 21 dalje.

1. (10) Pokažite, da enačbi

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{ter} \quad y = z \sin(z)$$

določata gladko omejeno krivuljo Γ v odprti množici $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x > 0, \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2}\}$ in izračunajte njeno dolžino.

R: Točka $(\pi, 0, \pi)$ reši to enačbo v D in je Γ neprazna množica. Poglejmo gradienta funkcij

$$2(x, y, -z) \quad \text{in} \quad (0, 1, -\sin(z) - z \cos(z)).$$

Njun vektorski produkt je

$$2(-y(\sin(z) + z \cos(z)) + z, x(\sin(z) + z \cos(z)), x).$$

Rešujemo sistem enačb

$$-y(\sin(z) + z \cos(z)) + z = 0, \quad x(\sin(z) + z \cos(z)) = 0, \quad x = 0$$

ter

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{in} \quad y = z \sin(z).$$

Na D velja $x > 0$ in potemtakem je Γ gladka krivulja v D . Iz zadnjih dveh enačb dobimo $x^2 = z^2 \cos^2(z)$. Iz pogojev, ki določajo množico D , dobimo $x = -z \cos(z)$. Tako imamo parametrizacijo Γ

$$t \mapsto (-t \cos(t), t \sin(t), t)$$

in t teče od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$. Odvod parametrizacije je

$$(-\cos(t) + t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 1),$$

katerega dolžina je $\sqrt{2 + t^2}$. Torej je dolžina Γ enaka

$$\begin{aligned} L(\Gamma) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} t \sqrt{2 + t^2} + \log(t + \sqrt{2 + t^2}) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\ &= \frac{3\pi}{4} \sqrt{2 + \frac{9\pi^2}{4}} - \frac{\pi}{4} \sqrt{2 + \frac{\pi^2}{4}} + \log\left(\frac{3\pi}{2} + \sqrt{2 + \frac{9\pi^2}{4}}\right) - \log\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2 + \frac{\pi^2}{4}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{8}(3\sqrt{8+9\pi^2} - \sqrt{8+\pi^2}) + \log\left(\frac{3\pi + \sqrt{8+9\pi^2}}{\pi + \sqrt{8+\pi^2}}\right).$$

Opomba: Lahko se takoj zapiše regularna parametrizacija Γ in potem gradienta nista potrebna.

2. (10) Pokažite, da enačbi

$$z = xy \quad \text{ter} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

določata gladko omejeno krivuljo Γ v $\mathbf{R}^3$ in poiščite vse točke na tej krivulji, v katerih je tangenta na Γ vzporedna vektorju $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

R: Množica Γ je neprazna, saj točka $(1, 0, 0)$ reši ta sistem enačb. Ker leži na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, je Γ omenjena. Poglejmo gradienta teh dveh funkcij

$$(y, x, -1) \quad \text{ter} \quad 2(x, y, z).$$

Njun vektorski produkt je $2(xz+y, -(yz+x), y^2-x^2)$. Pokazati moramo, da je le ta različen od $(0, 0, 0)$ na Γ . Torej iščemo rešitve sistema enačb

$$xz + y = 0, \quad yz + x = 0, \quad x^2 - y^2 = 0$$

in

$$xy - z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Iz prve enačbe izrazimo $y = -xz$ in to vstavimo v ostale. Dobimo

$$-xz^2 + x = x(1 - z^2) = 0, \quad x^2 - x^2z^2 = x^2(1 - z^2) = 0,$$

$$x^2z + z = z(x^2 + 1) = 0, \quad x^2 + x^2z^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Iz tretje enačbe dobimo $z = 0$ in nato iz prvih dveh $x = 0$. Ker par $x = 0, z = 0$ ne zadošča zadnji enačbi, je Γ gladka krivulja.

Tangetni vektor na Γ v točki (x, y, z) je vzporeden z vektorjem $(xz + y, -(yz + x), y^2 - x^2)$. Za določitev točk krivulje Γ , pri katerih je tangetna vzporedna danemu vektorju, moramo rešiti sistem

$$xz + y = \lambda \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad yz + x = \lambda \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad x^2 - y^2 = \lambda \frac{1}{\sqrt{6}}$$

in

$$xy - z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

za nek λ , ki je tudi neznanka. Možen način reševanja tega sistema je: pomnožimo prvi dve enačbi in dobimo

$$(xy)z^2 + (x^2 + y^2)z + xy = \lambda^2 2\sqrt{6}.$$

Upoštevamo $z = xy$ ter $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ in imamo $z = \lambda^2 \sqrt{6}$. Od tod

$$x^2 + y^2 = 1 - 6\lambda^4, \quad \text{in} \quad x^2 - y^2 = \lambda \frac{1}{\sqrt{6}},$$

kar nam da

$$x^2 = \frac{1}{2}((1 - 6\lambda^4) + \lambda \frac{1}{\sqrt{6}}) \quad \text{in} \quad y^2 = \frac{1}{2}((1 - 6\lambda^4) - \lambda \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Upoštevajoč $z = xy$ dobimo enačbo za λ

$$\frac{1}{4}((1 - 6\lambda^4)^2 - \frac{\lambda^2}{6}) = 6\lambda^4,$$

kar nam da

$$216\lambda^8 - 216\lambda^4 - \lambda^2 + 6 = 0$$

enačbo četrte stopnje za $\mu = \lambda^2$. Eno racionalno rešitev lahko uganemo $\mu = \lambda^2 = \frac{1}{6}$. Po deljenju nam ostane kubična enačba za $\mu = \lambda^2$

$$p(\mu) = 36\mu^3 + 6\mu^2 - 35\mu - 6 = 0.$$

Ker je $p(-1) = -1 < 0, p(-\frac{1}{2}) = \frac{17}{2} > 0, p(0) = -6 < 0, p(1) = 1 > 0$, ima p eno ničlo na $(-1, -\frac{1}{2})$, eno ničlo na $(-\frac{1}{2}, 0)$ in eno ničlo na $(0, 1)$. Ker naj bi bil $\mu = \lambda^2$, nas zanima le ničla na intervalu $(0, 1)$. Ker je $p(\frac{1}{2}) = -\frac{35}{2}$, za to ničlo velja, da je večja od $\frac{1}{2}$. Potemtakem je vsaj en od izrazov $(6\lambda^4 = 6\mu^2 > \frac{6}{4} = \frac{3}{2})$

$$x^2 = \frac{1}{2}((1 - 6\lambda^4) + \lambda \frac{1}{\sqrt{6}}) \quad \text{in} \quad y^2 = \frac{1}{2}((1 - 6\lambda^4) - \lambda \frac{1}{\sqrt{6}})$$

negativen, kar pa ni možno.

Tako sta edini možni vrednosti za λ enaki $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ter $-\frac{1}{\sqrt{6}}$. Vemo že $z = \lambda^2 \sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Za x in y dobimo iz linearnih enačb zgoraj

v teh dveh spremenljivkah ali $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ za $\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ali $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ za $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, a pogoj $x^2 - y^2 = \lambda \frac{1}{\sqrt{6}}$ pove, da je $\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Torej je edina točka na Γ , v kateri je tangenta vzporedna vektorju

$$(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$$

točka $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Opomba: Krivuljo Γ bi lahko tudi regularno parametrizirali

$$t \mapsto (\cos(t), \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, \frac{\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}), \quad t \in [0, 2\pi)$$

in iskali točke, v katerih je odvod vzporeden danemu vektorju.

3. (10) Za $a > 0$ izračunajte

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos(x) - 1 + ax}{x} dx.$$

Ali ima F kakšno ničlo za $a > 0$?

R: Integral

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\cos(x) - 1}{x} dx + \int_0^\infty e^{-ax} a dx$$

konvergira enakomerno na vsakem intervalu $[c, d]$, kjer je $0 < c < d < \infty$ (celoten integrand ocenimo z $Ma e^{-ax} \leq M d e^{-cx}$). Drugi sumand izračunamo neposredno

$$\int_0^\infty e^{-ax} a dx = 1,$$

prvi sumand $G(a)$ pa odvajamo $G'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax} (\cos(x) - 1) dx = -\frac{a}{a^2+1} + \frac{1}{a}$ (integral je enakomerno konvergenten na vsakem intervalu $[c, d]$, kjer je $0 < c < d < \infty$ kot zgoraj). Torej $G(a) = -\frac{1}{2} \ln(a^2 + 1) + \ln(a) + C$ oziroma $G(a) = \ln(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}})$. Da je $C = 0$, se vidi, ko $a \rightarrow \infty$. Tako $F(a) = \ln(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}) + 1$. Še ničla funkcije F . Rešujemo enačbo

$$\ln(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}) + 1 = 0.$$

Od tod dobimo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = e^{-1}$$

in nato dalje $a = \sqrt{\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}} = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1-e^{-2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$.

4. (10) Naj bo

$$f(t) = \int_0^\infty x^t e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Določite vse vrednosti t , za katere integral obstaja in za katere velja $f(t + \frac{1}{2}) = 6f(t)$. Za te vrednosti t izračunajte $f(t)$.

R: Integral je definiran za $t > -1$. Vpeljemo $x = u^2$ in dobimo

$$f(t) = 2 \int_0^\infty u^{2t+1} e^{-u} du = 2\Gamma(2t+2).$$

Torej $f(t+\frac{1}{2}) = 2\Gamma(2t+3) = 2(2t+2)\Gamma(2t+2)$. Iščemo take t , da je to enako $6f(t) = 12\Gamma(2t+2)$. Ker Γ nima ničel, dobimo pogoj $2t+2 = 6$ in od tod $t = 2$. Torej je $f(2) = 2\Gamma(6) = 2 \cdot 5! = 240$.

5. (10) Naj bo f gladka omejena funkcija na $\mathbf{R}$, katere prvi in drugi odvod sta tudi omenjeni funkciji na $\mathbf{R}$. Za $x \in \mathbf{R}$ in $t \geq 0$ definiramo integral

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} f(x - 2z\sqrt{t}) dz.$$

Pokažite, da je integral enakomerno konvergenten na $\mathbf{R} \times [0, \infty)$. Pokažite, da lahko F vsaj dvakrat odvajamo po obeh parametrih na $\mathbf{R} \times (0, \infty)$, ter da na $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ velja $F_{xx} = F_t$. Za vsak $x \in \mathbf{R}$ izračunajte še limito

$$\lim_{t \downarrow 0} F(x, t).$$

R: Za integrand imamo za nek $M > 0$ oceno $e^{-z^2} |f(x - 2z\sqrt{t})| \leq M e^{-z^2}$, saj je f omejena funkcija. Ocena je neodvisna od parametrov x in t , funkcija e^{-z^2} pa je integrabilna na $\mathbf{R}$. Torej integral konvergira enakomerno na $\mathbf{R} \times [0, \infty)$. Poglejmo kandidate za odvode

$$F_x(x, t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} f'(x - 2z\sqrt{t}) dz$$

in

$$F_{xx}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f''(x - 2z\sqrt{t}) dz.$$

Ker vemo, da sta tudi prvi in drugi odvod f omejena na $\mathbf{R}$, lahko sklepamo kot prej, da ta dva integrala konvergirata enakomerno na $\mathbf{R} \times [0, \infty)$ in torej podajata odvoda F_x ter F_{xx} . Še kandidata za odvoda po t

$$\begin{aligned} F_t(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} f'(x - 2z\sqrt{t})(-2z) \frac{1}{2\sqrt{t}} dz \\ &= -\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z f'(x - 2z\sqrt{t}) dz \end{aligned}$$

in $F_{tt}(x, t)$

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z f'(x - 2z\sqrt{t}) dz + \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z^2 f'(x - 2z\sqrt{t}) dz.$$

Ker sta tudi funkciji $|z|e^{-z^2}$ ter $z^2 e^{-z^2}$ integrabilni na $\mathbf{R}$, oba člena konvergirata enakomerno na $\mathbf{R} \times [c, \infty)$ za vsak $c > 0$ in podajata odvoda F_t ter F_{tt} . Sedaj integrirajmo integral za F_{xx} per partes (drugi odvod f integriramo in e^{-z^2} odvajamo). Tako dobimo

$$F_{xx}(x, t) = e^{-z^2} f'(x - 2z\sqrt{t}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} z f'(x - 2z\sqrt{t}) dz.$$

Prvi del je enak 0 (f' je omejena) in zato dobimo $F_{xx} = F_t$.

Ker je integral enakomerno konvergenten na $\mathbf{R} \times [0, \infty)$, je F zvezna $\mathbf{R} \times [0, \infty)$. Zato je

$$\lim_{t \downarrow 0} F(x, t) = F(x, 0) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} f(x).$$