

2. DOMAČA NALOGA

Oddaja rešitev nalog v dogovoru s tutorji v tednu od ponedeljka **6. 12. 21** dalje.

1. (10) Izračunajte dvojni integral

$$\int \int_A x \, dx \, dy$$

po množici A v desni polravnini, ki jo omejujejo krivulje $y - x^2 = 0$, $xy = 1$, $2y + x = 0$, $3y + x^2 - 4x = -\frac{5}{2}$.

R: Množica A je krivočrtni štirikotnik z oglišči $(0, 0)$ - presečišče k_1 , k_3 ; $(1, 1)$ - presečišče k_1 , k_2 ; $(2, \frac{1}{2})$ - presečišče k_2 , k_4 ; $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ - presečišče k_3 , k_4 . Krivulji k_2 in k_4 imata v desni polravnini še eno presečišče, ki pa je desno od prvega. Torej je integral enak

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{x}{2}}^{x^2} x \, dy \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}}^{x^2} x \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}}^{\frac{1}{x}} x \, dy \right) dx.$$

Dalje je to

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^3 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5x}{6} \right) dx + \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5x}{6} \right) dx.$$

$$\text{Zato } I = \frac{7}{192} + \frac{17}{72} + \frac{7}{18} = \frac{127}{192}.$$

2. (10) Izračunajte prostornino telesa, $a > 0$,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2a^2, z \leq \frac{x^2 + y^2}{a}\}.$$

R: Izračunati moramo integral

$$V(T) = \int \int \int_T 1 \, dx \, dy \, dz$$

Vpeljemo sferične koordinate: Ploskvi, ki omejujeta T , se sekata v krožnici $x^2 + y^2 = a^2$, $z = a$. Od tod razberemo, da θ zavzema vrednosti od $\frac{\pi}{4}$ do π . Pogoja, ki določata T , se glasita: $r \leq \sqrt{2}a$ ter $a \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} \leq r$ za θ med $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{2}$ in naravni pogoj $0 \leq r$

za θ med $\frac{\pi}{2}$ in π . Tako po vpeljavi sferičnih koordinat v integral dobimo

$$\begin{aligned} V(T) &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}}^{\sqrt{2}a} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi + \frac{1}{2} \frac{4\pi(\sqrt{2}a)^3}{3} = \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sqrt{2} \sin(\theta) - \frac{\cos^3(\theta)}{\sin^5(\theta)}) d\theta + \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3} = \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} (2 - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^5} dt) + \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3} = \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} (2 + \frac{1}{4}(1-4) - \frac{1}{2}(1-2)) + \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3} = \frac{(14 + 16\sqrt{2})\pi a^3}{12} \end{aligned}$$

3. (10) Homogeno telo T je omejeno s ploskvami $x+z=1$, $y-x=1$, $y=0$, $z=1$. Izračunajte vztrajnostni moment telesa T okoli z osi.

R: Izračunati moramo integral

$$I = \int \int \int_T (x^2 + y^2) dV.$$

Nalogo se morda da lotiti neposredno iz slike, lahko pa vpeljimo nove spremenljivke $u = y - x - 1$, $v = y$, $w = z - 1$ (lahko bi eno od teh izpustili in uporabili $x + z - 1$). Jacobijeva determinanta te preslikave in inverza je enaka -1 oz. njena absolutna vrednost je 1. V novih koordinatah dobimo tetraeder $\tilde{T}$ omejen z ravninami $u=0$, $v=0$, $w=0$ in $-u+v+w=1$ in integral

$$\begin{aligned} I &= \int \int \int_{\tilde{T}} ((v-u-1)^2 + v^2) dV = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{u+1} \left(\int_0^{1+u-v} ((v-u-1)^2 + v^2) dw \right) dv \right) du = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{u+1} (u^2 - 2uv + 2v^2 - 2v + 2u + 1)(1+u-v) dv \right) du = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{u+1} (u^3 - 3u^2v + 4uv^2 - 2v^3 + 3u^2 + 4v^2 - 6uv + 3u - 3v + 1) dv \right) du = \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^0 (u^3(u+1) - \frac{3}{2}u^2(u+1)^2 + \frac{4}{3}u(u+1)^3 - \frac{1}{2}(u+1)^4 + \\ + 3u^2(u+1) + \frac{4}{3}(u+1)^3 - 3u(u+1)^2 + 3u(u+1) - \frac{3}{2}(u+1)^2 + (u+1))du = \frac{1}{15}$$

oziroma posamezni sumandi:

$$= (\frac{1}{5} - \frac{1}{4}) + (-\frac{3}{10} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}) + (\frac{4}{15} - 1 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}) + (-\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{2}) + \\ + (-\frac{3}{4} + 1) + (-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{3}) + (\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2}) + (1 - \frac{3}{2}) + (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2})$$

4. (10) Naj bo Σ homogena ploskev, ki je podana kot graf funkcije $f(x, y) = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ch}(\frac{x+y}{a})$ nad kvadratom $[-a, a] \times [-a, a]$, $a > 0$. Izračunajte koordinate njenega težišča.

R: Naj bo σ ploščinska gostota. Masa ploskve je

$$m = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \sigma \sqrt{1 + \text{sh}^2(\frac{x+y}{a})} dy dx = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \sigma \text{ch}(\frac{x+y}{a}) dy dx = \\ = \sigma a \int_{-a}^a \text{sh}(\frac{a+x}{a}) - \text{sh}(\frac{-a+x}{a}) dx = \\ = \sigma a^2 (\text{ch}(2) - 2 + \text{ch}(-2)) = 2\sigma a^2 (\text{ch}(2) - 1).$$

Zaradi simetrije je $x_T = y_T = 0$. Izračunajmo še

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a \sigma \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ch}^2(\frac{x+y}{a}) dy dx = \sigma \frac{a}{2\sqrt{2}} \int_{-a}^a \int_{-a}^a (1 + \text{ch}(2\frac{x+y}{a})) dy dx = \\ = \sigma \frac{a}{2\sqrt{2}} (4a^2 + \frac{a^2}{2} (\text{ch}(4) - 1)) = \sigma \frac{a^3}{4\sqrt{2}} (7 + \text{ch}(4))$$

Zato

$$z_T = \frac{a}{8\sqrt{2}} \frac{\text{ch}(4) + 7}{\text{ch}(2) - 1}.$$

5. (10) Dokazite, da ima množica

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| + |y| = q, q \in \mathbf{Q}\}$$

mero 0.

R: Za vsak $q \in \mathbf{Q}$, $q > 0$, je množica

$$A_q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| + |y| = q\}$$

rob kvadrata z oglišči $(q, 0)$, $(-q, 0)$, $(0, q)$, $(0, -q)$, ki ima mero 0, saj so stranice grafi zveznih (integrabilnih) funkcij nad intervali. Za $q = 0$ je $A_0 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| + |y| = 0\} = \{(0, 0)\}$, ki ima mero 0, in za $q < 0$ je $A_q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x| + |y| = q\}$ prazna množica. Torej je A števna unija (racionalnih števil je števno mnogo) množic z mero 0 in ima zato mero 0.